数理化自学丛书

代　　　数

第二册

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编

上海科学技术出版社

数理化自学丛书
代　　数（第二册）
数理化自学丛书编委会
数 学 编 写 小 组 编
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
北 京 出 版 社 重 印
北京市新华书店发行
北京印刷二厂印刷
开本 787×1092　1/32　　印张 13.875　　字数 306,000
1964年2月第1版　　1979年1月第1次印刷
书号：13119·561　　定价：0.91 元

目　录

第一章　一元一次方程和可以化为一元一次方程的分式方程

§1·1 等　式

在代数第一册里，我们已经学过代数式．我们知道，用运算符号把由数字或者字母表示的数连结起来所得的式子，叫做代数式．例如，$3a$，$-\frac{1}{2}x^2y$，$5x+7$，$\frac{5}{x-2}$，$(x+y)^2$ 等．我们还知道，单独的一个用数字或者字母表示的数，例如，x，a，3，5.4 等，也可以看做是代数式．

用等号连结两个代数式所成的式子，叫做**等式**．例如，

$$m+2m=3m;\qquad \frac{4x^2}{2x}=2x;$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;\qquad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$

$$x-5=8;\qquad x^2=9$$

等都是等式．

在等式里，等号左边的代数式，叫做**左边**；等号右边的代数式，叫做**右边**．例如，在等式 $m+2m=3m$ 里，左边是 $m+2m$，右边是 $3m$．

我们来看上面的几个等式．在等式 $m+2m=3m$ 里，不论 m 等于任何数值，左边和右边的值总是相等的．

等式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 是代数第一册里已经学过的乘法公式，它是多项式乘法的结果，不论 a 和 b 等于任何数

值，左边和右边的值总是相等的．例如，当 $a=-\frac{1}{2}$, $b=0$ 时，左边等于 $\frac{1}{4}$，右边也等于 $\frac{1}{4}$.

等式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 是因式分解中常用的一个立方和公式，不论 a 和 b 等于任何数值，左边和右边的值也总是相等的.

等式 $\frac{4x^2}{2x}=2x$，这是根据分式的基本性质，从约分所得的结果. 当 $x=0$ 时，分母 $2x$ 等于 0，分式没有意义，所以 x 的数值不允许等于 0．但是除了 $x=0$ 时分式没有意义以外，不论 x 等于其他任何数值，左边的值总是等于右边的值.

这就是说，在上面的四个等式里，不论用任何允许取的数值代替其中的字母，等式总是成立的.

一个等式，不论用任何允许取的数值代替其中的字母，它的左右两边的值总是相等的，这样的等式叫做**恒等式**．例如，上面所讲的四个等式都是恒等式.

由数字组成的等式，也都是恒等式．例如，下面这些等式，都是恒等式:

$$-(7-2)=-7+2; \qquad (-2)^3=-8;$$

$$3^2+4^2=5^2; \qquad (7+3\times2-3)\div2=4+1.$$

我们再来看等式 $x-5=8$ 和 $x^2=9$．在等式 $x-5=8$ 里，x 并不是可以取任何数值都能使左右两边的值相等．例如，当 $x=1$ 时，左边等于 -4，而右边等于 8，两边的值就不相等．所以 $x-5=8$ 虽然是等式，但不是恒等式.

同样，在等式 $x^2=9$ 里，x 也不是可以取任何数值都能使等式成立．例如，当 $x=-5$ 时，左边等于 25，而右边等于 9，两边的值就不相等，所以 $x^2=9$ 也不是恒等式.

例 判别下列等式是不是恒等式:

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

(2) $2x+5=3x-1$.

【解】 (1) 因为不论 a 和 b 等于任何数值，左右两边的值总相等. 所以 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 是恒等式.

(2) 因为 x 并不是取任何数值都能使左右两边的值相等，例如，当 $x=5$ 时，左边等于 15, 而右边等于 14, 两边的值就不相等. 所以 $2x+5=3x-1$ 不是恒等式.

习 题 1·1

1. 等式和代数式有什么区别? 举两个例子来说明.
2. 什么叫做恒等式? 举两个例子.
3. 指出下列等式中，哪些是恒等式? 哪些不是恒等式?

(1) $4+7=11$; (2) $x+7=11$;

(3) $3x-5=-2$; (4) $-(x-4)=4-x$;

(5) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; (6) $x^2=x\cdot x$;

(7) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$; (8) $x^2=2x$;

(9) $9-2x=x-6$; (10) $3x-y=1$;

(11) $x+y=y+x$; (12) $x^2+y=x+y^2$;

(13) $(x-2)(x+1)=x^2-x-2$; (14) $(x-2)(x+1)=0$;

(15) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$; (16) $x^3-y^3=1$.

§1·2 方 程

我们来看下面这个问题:

什么数减去 2 等于 3?

如果用 x 表示这个数，那末可以写出等式

$$x-2=3.$$

因为这里 x 并不是取任何数值都能使左右两边的值相等，所以 $x-2=3$ 不是恒等式.

在这个等式里，2 和 3 是问题中已经告诉我们的数，这种数叫做**已知数**．而字母 x 的值，需要根据它与等式里的已知数 2 和 3 之间的关系来确定的.

等式里字母的值，需要根据它与等式里的已知数之间的关系来确定的，这样的字母叫做**未知数**.

含有未知数的等式，叫做**关于这个未知数的方程**，简称**方程**．方程中不含未知数的项叫做**常数项**.

例如，$x-2=3$ 就是方程．又如，$5y=2$，$x^2=9$，$x+y=10$ 等也都是方程.

在方程 $x-2=3$ 里，如果用 5 代替未知数 x，那末方程左右两边的值相等.

能够使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做**方程的解**.

例如，5 是方程 $x-2=3$ 的解．又如，在方程 $5y=2$ 里，用 $\frac{2}{5}$ 代替未知数 y，方程左右两边的值相等，所以 $\frac{2}{5}$ 是方程 $5y=2$ 的解．在方程 $x^2=9$ 里，用 3 或者 -3 代替未知数 x，方程左右两边的值都相等，所以 3 和 -3 都是方程 $x^2=9$ 的解.

只含有一个未知数的方程的解，也叫做**方程的根**．例如，方程 $x-2=3$ 的解是 5，我们也可以说，方程 $x-2=3$ 的根是 5．同样可以说，方程 $5y=2$ 的根是 $\frac{2}{5}$；方程 $x^2=9$ 的根是 3 和 -3.

求方程的解或根的过程，叫做**解方程**.

例 1．根据下面所说的数量关系，列出方程：

(1) x 加上 3 等于 7;

(2) x 的 4 倍减去 2 等于 x 的 2 倍;

(3) x 的 5 倍比 x 的 3 倍大 8.

【解】 (1) $x+3=7$;

(2) $4x-2=2x$;

(3) $5x-3x=8$.

说明 x 的 5 倍比 x 的 3 倍大 8, 就是说, x 的 5 倍减去 x 的 3 倍等于 8.

例 2. 检验下列各数是不是方程 $x^2=x+2$ 的根:

(1) 1; (2) -1; (3) 2.

【解】 (1) 用 1 代替方程 $x^2=x+2$ 里的 x, 这时,

左边 $=1^2=1$, 右边 $=1+2=3$,

$\because$ 左边 $\neq$ 右边, $\therefore$ 1 不是方程 $x^2=x+2$ 的根.

(2) 用 -1 代替方程 $x^2=x+2$ 里的 x, 这时,

左边 $=(-1)^2=1$, 右边 $=-1+2=1$,

$\because$ 左边 $=$ 右边, $\therefore$ -1 是方程 $x^2=x+2$ 的根.

(3) 用 2 代替方程 $x^2=x+2$ 里的 x, 这时,

左边 $=2^2=4$, 右边 $=2+2=4$,

$\because$ 左边 $=$ 右边, $\therefore$ 2 是方程 $x^2=x+2$ 的根.

注 符号"$\neq$"读做"不等于". 有些书上写成"$\mp$", 是通用的.

习 题 1·2

1. 用方程来表示下列数量关系:

(1) x 减去 6 等于 3;

(2) x 的 4 倍加上 5 等于 13;

(3) x 的 2 倍加上 7 等于它的 5 倍减去 8;

(4) x 的 3 倍比 x 的 5 倍小 4;

(5) y 比 y 的 $\frac{1}{4}$ 大 12;

(6) x 的 $\frac{1}{3}$ 与 x 的 $\frac{2}{5}$ 的和等于 22;

(7) x 与 2 的差的 5 倍等于 15;

(8) x 与 3 的和的平方等于 x 的 10 倍与 6 的和.

2. 什么叫做方程的根? 用下列方程后面括号里的数值一一代替方程中的未知数，指出哪些是方程的根? 哪些不是方程的根?

(1) $x+2=0$, $(2,\ -2)$;

(2) $2x-5=1$, $(3,\ 4)$;

(3) $2x=6$, $(3,\ -3)$;

(4) $x^2=9$, $(3,\ -3)$;

(5) $x^2-x=6$, $(3,\ -2)$;

(6) $(x-3)(x+3)=0$, $(-3,\ 3,\ 0)$;

(7) $3x+8=\frac{x}{4}-14$, $(8,\ -8)$;

(8) $2x(3x+2)=0$, $\left(-\frac{2}{3},\ 0,\ \frac{2}{3}\right)$;

(9) $x(x-2)=8$, $(-2,\ 2,\ -4,\ 4)$;

(10) $x^3-7x=6$, $(1,\ 2,\ -3)$.

§1·3 同解方程

我们来看下面的两个方程:

$$3x-2=4, \tag{1}$$

$$3x=6. \tag{2}$$

如果用 $x=2$ 代入方程(1)时，方程两边的值都等于 4, 所以 2 是方程(1)的根. 如果用 2 以外的任何数值代替方程(1)里的 x, 例如用 5 代替 x, 左边的值等于 13, 右边的值等于 4, 这时方程两边的值就不相等，所以 5 不是方程(1)的根. 因此，方程(1)只有一个根 2.

用同样的方法，我们可以知道方程 (2) 也只有一个根 2. 这就是说，方程(1)的根和方程(2)的根完全相同.

两个方程，如果第一个方程的根都是第二个方程的根，并且第二个方程的根也都是第一个方程的根，那末这两个方程叫做同解方程.

例如，方程(1)和方程(2)是同解方程.

又如，在习题 1·2 的第 2 题里，我们已经做过，知道方程 $2x-5=1$ 的根是 3，方程 $2x=6$ 的根也是 3，所以方程 $2x-5=1$ 和方程 $2x=6$ 是同解方程.

方程 $x^2=9$ 有两个根 -3 和 3，方程 $(x-3)(x+3)=0$ 也有两个根 -3 和 3，所以方程 $x^2=9$ 和方程 $(x-3)(x+3)=0$ 是同解方程.

但是，方程 $x+2=0$ 的根是 -2，方程 $x^2-x=6$ 的根是 -2 和 3，虽然方程 $x+2=0$ 的根是方程 $x^2-x=6$ 的根，但是方程 $x^2-x=6$ 的两个根里，只有一个根 -2 是方程 $x+2=0$ 的根，而另一个根 3 却不是方程 $x+2=0$ 的根，所以这两个方程就不是同解方程.

例 已知方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 有而且只有两个根：-2 和 $\frac{1}{2}$，方程 $2x^2+3x=2$ 有而且只有两个根：$\frac{1}{2}$ 和 -2，判别这两个方程是同解方程吗？

【解】 因为方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 有两个根，它们都是方程 $2x^2+3x=2$ 的根，并且方程 $2x^2+3x=2$ 有两个根，它们也都是方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 的根，所以这两个方程是同解方程.

习 题 1·3

1. (1) 什么叫做同解方程？

(2) 方程 $5x=10$ 和方程 $x+1=3$ 是不是同解方程?

2. (1) 第一个方程的根是 3 和 5, 第二个方程的根是 5 和 3, 这两个方程是不是同解方程?

(2) 第一个方程的根是 3 和 5, 第二个方程的根是 3 和 -5, 这两个方程是不是同解方程?

(3) 第一个方程的根是 3 和 5, 第二个方程的根是 5, 这两个方程是不是同解方程?

(4) 第一个方程的根是 3 和 5, 第二个方程的根是 3, 5 和 6, 这两个方程是不是同解方程?

3. 下列方程后面的括号里的数是这个方程全部的根, 指出下列方程中哪些是同解方程:

(1) $2x-3=x$, (3);　　(2) $2x-1=3x$, (-1);

(3) $(x+1)(x-3)=0$, $(-1, 3)$;　　(4) $5x-8=2x+1$, (3);

(5) $x^2-3x=0$, $(0, 3)$;　　(6) $x^2-3=2x$, $(3, -1)$.

[解法举例: 方程 $2x-3=x$ 的根是方程 $5x-8=2x+1$ 的根, 方程 $5x-8=2x+1$ 的根也是方程 $2x-3=x$ 的根, 所以这两个方程是同解方程.]

4. (1) $\frac{1}{2}$ 和 -3 是方程$(2x-1)(x+3)=0$ 的根吗?

(2) 方程 $2x-1=0$ 和方程$(2x-1)(x+3)=0$ 是不是同解方程?

(3) 方程$(2x-1)(x+3)=0$ 和方程 $x+3=0$ 是不是同解方程?

5. (1) 5 是方程 $2x+1=3x-4$ 的根吗? 4 是方程 $2x+4=3x-1$ 的根吗?

(2) 方程 $2x+1=3x-4$ 和方程 $2x+4=3x-1$ 是不是同解方程?

§1·4 方程的两个基本性质

在上一节里, 要判别一个方程和另一个方程是不是同解方程, 我们需要把两个方程的根一一代入检验, 这样的方法是很麻烦的. 为了解决这个问题, 并且能够正确地掌握解方程的方法, 我们先来研究方程的两个基本性质.

1．方程的第一个基本性质 我们看下面一个问题：

什么数减去 3 等于 7？

如果设某数为 x，可以列出方程

$$x-3=7.$$

我们如果用算术方法来考虑：某数减去 3 所得的差是 7，大家都知道，这个某数（即被减数）等于差 7 与减数 3 的和．列出方程，可以得到

$$x=7+3.$$

这里，当 $x=10$ 的时候，方程 $x-3=7$ 的两边都等于 7，方程 $x=7+3$ 的两边都等于 10．这就是说，10 是方程 $x-3=7$ 的根，也是方程 $x=7+3$ 的根．所以方程 $x-3=7$ 和方程 $x=7+3$ 是同解方程．

从这个例子，我们可以得出一个性质：

方程的两边都加上（或者都减去）同一个数，所得的方程和原方程是同解方程．

再看下面这个方程：

$$3x-2=10.$$

从这个方程的两边都减去同一个整式 $2x-1$，得到

$$3x-2-(2x-1)=10-(2x-1).$$

当 $x=4$ 的时候，方程 $3x-2=10$ 的两边相等，这时 $2x-1=7$，所以两边都减去整式 $2x-1$，实际上就是两边都减去 7，因此方程 $3x-2-(2x-1)=10-(2x-1)$ 的两边也相等．所以我们知道方程 $3x-2=10$ 和方程 $3x-2-(2x-1)=10-(2x-1)$ 也是同解方程．

根据上面所说的，我们得到方程的第一个基本性质：

方程的两边都加上（或者都减去）同一个数或者同一个整式，所得的方程和原方程是同解方程．

例 1. 把下列方程变形成它的同解方程，使方程的左边只留下一个未知数 x，而右边是用数字表示的数：

(1) $x-5=8$;

(2) $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$.

分析 利用方程的第一个基本性质，我们可以把原方程变形成它的最简单形式的同解方程.

【解】 (1) $x-5=8$.

方程的两边都加上 5，得

$$x=8+5,$$

就是

$$x=13.$$

(2) $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$.

方程的两边都加上一个整式 $-8x+\frac{7}{10}$，得

$$9x-8x=\frac{3}{5}+\frac{7}{10}.$$

合并同类项，得

$$x=1\frac{3}{10}.$$

注意 把方程逐步变形成它的同解方程时，不可以用"="把前后两个方程连结起来. 例如，从方程 $x-5=8$ 得出它的同解方程 $x=8+5$，不能错误地写成 $x-5=8=x=8+5$，应该按照上面例题中那样一步一步分开写. 很明显，如果照 $x-5=8=x=8+5$ 这样的写法，就会得出 $8=8+5$ 这样一个错误的结论.

例 2. 证明方程 $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$ 和方程 $x=1\frac{3}{10}$ 是同解方程.

【证】 把 $1\frac{3}{10}$ 代替方程 $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$ 里的 x，得

$$左边=9\times\frac{13}{10}-\frac{7}{10}=11,$$

$$右边=8\times\frac{13}{10}+\frac{3}{5}=11.$$

方程左右两边的值相等，所以方程 $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$ 的根是 $1\frac{3}{10}$. 用其他的值代替方程中的 x，左右两边就不相等，说明它没有别的根. 这就是说，方程 $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$ 的根和方程 $x=1\frac{3}{10}$ 的根是完全相同的. 因此，这两个方程是同解方程.

我们来观察一下：在上面例 1(1) 中的两个方程 $x-5=8$ 和 $x=8+5$ 里，含有 -5 的一项原来在第一个方程的哪一边？符号是正的还是负的呢？后来在第二个方程的哪一边？符号是正的还是负的呢？很明显，含有 -5 的一项原来在方程的左边，符号是负的；后来在方程的右边，符号变成正的了. 再看例 1(2) 中的两个方程 $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$ 和 $9x-8x=\frac{3}{5}+\frac{7}{10}$ 里，含有 $-\frac{7}{10}$ 的一项，原来在方程的左边，符号是负的，后来在方程的右边，符号变成正的；而含有 $8x$ 的一项原来在方程的右边，符号是正的，后来在方程的左边，符号变成负的了.

从上面的例题可以看出：

方程中的任何一项，都可以把它的符号改变后，从方程的一边移到另一边.

把方程中的项改变符号后，从方程的一边移到另一边，这

种变形，叫做移项．移项以后所得的方程和原方程是同解方程．

移项的法则是：

要把方程中的项从等号的一边移到另一边，必须改变这个项的符号．

移项法则在以后解方程中经常要用到，必须熟练掌握．

例 3． 利用移项的方法，把下列方程变形成左边只留下一个未知数 x，而右边是数字表示的数的方程：

(1) $\frac{4}{7}x=3-\frac{3}{7}x$；

(2) $8x+5=10x+1-3x$．

【解】 (1) $\frac{4}{7}x=3-\frac{3}{7}x$．

移项，得

$$\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}x=3．$$

合并同类项，得

$$x=3．$$

(2) $8x+5=10x+1-3x$．

移项，得

$$8x-10x+3x=1-5．$$

合并同类项，得

$$x=-4．$$

习 题 1·4(1)

1．根据方程的第一个基本性质，说明下列各题中的两个方程是同解方程：

(1) $5x-3=2$ 和 $5x=5$；