数学小丛书 12 SHUXUEXIAOCONGSHU

多面形的欧拉定理和闭曲面的拓扑分类

江泽涵

北京市数学会编 · 人民教育出版社

数学小丛书

多面形的欧拉定理
和
闭曲面的拓扑分类

江泽涵

北京市数学会编

人民教育出版社

1964年·北京

一个多面形是有顶点(或叫作角),有棱,有面的. 把它的顶点数,棱数,面数分别记作 V, E, F; 整数 V－E＋F 就叫做它的欧拉示性数. 第一章里的定理1是说: 凸多面形的欧拉示性数是 2. 这是属于中学立体几何范围的一个定理. 只要读者对于立体图形有一些理解,它的证明是容易懂的. 在第二章里,通过定理1的证明的分析讨论,以及橡皮薄膜作成的多面形的变形,引进拓扑变换的直观描写,从而得到更广的定理 2,闭多面形的欧拉定理. 在最后一章里,定理3(包含定理1和定理2为特例)和定理4圆满地解决由定理2所提出的、闭多面形的欧拉示性数是哪些整数等问题,同时给出闭多面形和闭曲面的拓扑分类.

多面形的欧拉定理

和

闭曲面的拓扑分类

江 泽 涵

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

新华书店北京发行所发行

全国新华书店经售

国营五二三厂印装

统一书号: 13012·0245　　字数: 30 千

开本: 787×1092 毫米　1/32　印张: $1\frac{1}{2}$

1964 年 6 月第一版

1979 年 1 月第 3 次印刷

北京: 96,501—396,500 册

定价 0.14 元

引　言

在这个小册子里我们从凸多面形的欧拉定理(定理 1) 讲起, 通过闭多面形的欧拉定理(定理 2), 讲到闭多面形和闭曲面的拓扑分类(定理 3 和定理 4). 书中所讲到的概念主要的是下面的四个: 引进闭多面形的定义是为了确定所讨论的对象; 引进拓扑变换的概念是为了说明拓扑分类的观点; 而欧拉示性数和单侧双侧性是拓扑分类的标志.

书中的证明主要集中在第一章 §2 和 §3.1, 第二章 §3 和 §4, 第三章 §1.2. 其它部分基本上都是思路和结果(定理)的说明. 更具体地说, 书中的三章所说明的思路和结果分别是 1)怎样从平面多边形的按照边数分类想到凸多面形的分类问题, 从而发现定理 1; 2)怎样从定理 1 和它的证明(第一章 §2) 想到闭多面形以及橡皮薄膜所作成的闭多面形的变形, 从而想到更广的定理 2 或定理 2′; 3)怎样从双侧的球面 S_1 和单侧的具有一个交叉帽的球面 Q_1 想到 S_h 和 Q_k 以及它们的欧拉示性数(第三章的定理 2″ 和 §2.4), 从而想到定理 3 (包含定理 1 和定理 2 为特例)和定理 4.

一般地说, 证明是演绎推理, 读起来比较费力. 而思路和结果是主要的, 读起来比较省力, 而且应该在读证明之前读懂. 建议读者在读完定理 1 的证明后, 即在读完第一章前两节后, 先读全书中的思路和结果部分, 然后再回头来补读若干其余的证明.

双侧的闭多面形是常见的图形，橡皮变形是常见的物理现象．所以闭多面形的拓扑分类反映现实世界的一种客观规律，在一些科学技术问题中有其实际应用．本书只限于说明闭多面形的拓扑分类，希望对于读者在遇到拓扑分类的实际应用时有所帮助．

重 印 说 明

趁这次重印的机会，加两个注记．

1．定理 1 的更直观的证明，可参看《三S 几何》立体部分第 817—818 页和《直观几何》第 287—290 页（王联芳译，高等教育出版社出版）．

2．本书中只有五色定理，关于四色定理的证明，请参看美国出版的期刊《科学》卷 193(1976)，第 564—565 页，或《美国数学会通报》卷 82(1976)，第 711—712 页．

作者 1978 年 7 月

目　次

第一章　凸多面形的欧拉定理

第二章　閉多面形的欧拉定理

第三章 閉多面形的一般定理和拓扑分类

第一章　凸多面形的欧拉定理

1　定理的叙述和来源

1.1 什么是凸多面形　我們用中学立体几何教科书中的下面的这些定义．由若干个平面多边形所圍成的封閉的立体叫作多面体．这些多边形就叫作多面体的面，这些多边形的边和頂点分别叫作多面体的棱和頂点．多面体的表面叫作多面形(在第二章以后，叫作初等多面形)；多面体的面、棱和頂点也叫作这多面形的面、棱和頂点．当多面形在它的每一个面所决定的平面的同一侧，它就叫作凸多面形．例如图 1 中

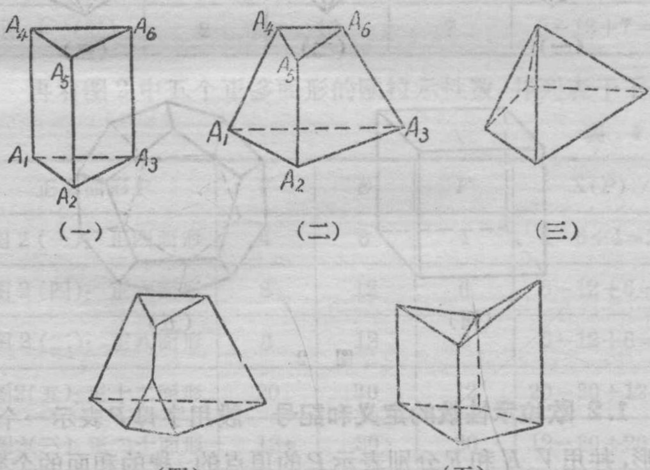
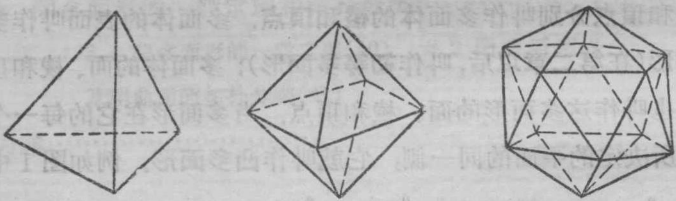


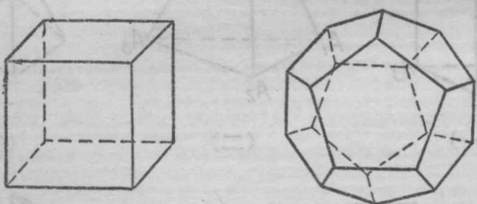
图　1

的(一)到(四)都是凸多面形，图1中的(五)不是凸多面形.

如果一个凸多面形的所有的面都是全等的正多边形（等边和等角的平面多边形叫作正多边形），并且所有的多面角都相等．这样的凸多面形就叫作**正多面形**．中学立体几何教科书中所說的正多面体的表面，就是正多面形．教科书中通常都有五种正多面体的图（如图2），而且还說明了怎样用硬紙板制作这五种正多面形的模型．我們現在只看正多面体的表面，所以把图2中的五个图形都看作是正多面形.



(一)　(二)　(三)



(四)　(五)

图　2

1.2 欧拉示性数的定义和記号　設用字母P表示一个多面形，并用V、E和F分别表示P的頂点的、棱的和面的个数．然后

$$V-E+F$$

这个数是一个确定的整数，叫作多面形P的欧拉（L. Euler, 1707—1783)示性数，记作$X(P)$，即

$$X(P)=V-E+F.$$

我们先来看图1中五个多面形的欧拉示性数$X(P)$，并列表于下：

表 I

多面形 P	V	E	F	$X(P)$
图1（一）	6	9	5	$6-9+5=2$
图1（二）	6	9	5	$6-9+5=2$
图1（三）	5	8	5	$5-8+5=2$
图1（四）	8	12	6	$8-12+6=2$
图1（五）	8	13	7	$8-13+7=2$

再看图2中五个正多面形的欧拉示性数，并列表于下：

表 II

正多面形 P	V	E	F	$X(P)$
图2(一)：正四面形	4	6	4	$4-6+4=2$
图2(四)：正六面形	8	12	6	$8-12+6=2$
图2(二)：正八面形	6	12	8	$6-12+8=2$
图2(五)：正十二面形	20	30	12	$20-30+12=2$
图2(三)：正二十面形	12	30	20	$12-30+20=2$

从上面两个表中的最右一栏可以看出这些多面形的欧拉

示性数都是 2. 这些多面形中除掉图 1(五)是非凸的以外，其它的都是凸多面形. 我們很容易产生这样的問題: 是不是所有的凸多面形的欧拉示性数都是 2 呢？下面是这个問題的解答.

1.3 定理 1（凸多面形的欧拉定理） 任意一个凸多面形 P 的欧拉示性数都是 2:

$$X(P)=V-E+F=2.$$

在证明这个定理以前，我們先来分析一下它的結論. 这結論只是关于凸多面形的頂点个数 V、棱的条数 E 和面的个数 F 这样的三个整数的一种組合，即 $X(P)=V-E+F$，而不是其它的組合，例如不是 $V+E+F$ 等. 这結論的內容并不涉及凸多面形 P 的棱的长度、面的面积的大小以及面上的內角的大小；也就是說这結論的內容并不涉及凸多面形 P 的度量性质. 这是定理 1 的特点，与中学里所見到的一般的儿何定理不一样.

在证明这定理以前，我們还要先談一談欧拉是怎样发現这个定理的.

1.4 定理 1 的来源 我們可以設想欧拉发現这定理的过程大約是下面这样的. 我們知道平面多边形的初步分类是用边的条数来分的，例如三条边的是三边形，四条边的是四边形，…，n 条边的是 n 边形. 它們的記号是用頂点的排列表示出来的，例如三边形用它的三个頂点排列 $A_1A_2A_3$ 来表示，它是以 A_1A_2，A_2A_3，A_3A_1 为它的三个边. n 边形的記法为 $A_1A_2\cdots A_n$，以 $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_nA_1$ 为边. 很自然地会想到凸

多面形或者可以用它的面的个数 F 来分类，而且把图 1 (一)这个多面形記作

$$A_1A_2A_3,\ A_4A_5A_6,\ A_1A_2A_5A_4,\ A_2A_3A_6A_5,\ A_3A_1A_4A_6.$$

图 1(一)与图 1(二)这两个多面形的面数 F 同为 5，它們的記法也相同，因而会想到把它們归成一类而把它們叫作同构(即結构相同)的多面形. 图 1(三)的面数 F 虽然也是 5，它的記法却与前两个凸五面形不同，因为它的五个面中有四个三边形而只有一个四边形，前两个凸五面形的五个面却同是两个三边形和三个四边形. 所以图 1 (三)不能和前两个凸五面形归为一类. 这說明了仅用面数 F 来作为凸多面形分类的依据是不够的.

既然要把凸多面形分类时，只看它們的面数 F 是不够的，那末就会想到在看它們的面数 F 的同时再看頂点数 V；行不行呢？这样倒是把图 1(三)与图 1(一)区别出来了；图 1(三)有 5 个面和 5 个頂点，而图 1(一)或图 1(二)有 5 个面和 6 个頂点. 它們的面数 F 虽然同是 5，而它們的頂点数 V 却不一样. 这好像說明了同时看凸多面形的面数 F 和頂点数 V，就可以区别出它們的結构，可以作为分类的依据似的. 但只要再看下去，就知道这还是不够的. 图 1(四)和图 2(四)这两个凸六面形有相同的面数 F，有相同的頂点数 $V=8$. 但是图 1(四)的六个面中有两个三边形，两个四边形和两个五边形；可是图 2(四)的六个面都是四边形. 它們的結构显然大不相同；它們不同类，虽然它們的面数 F 和頂点数 V 都相同.

凸多面形的面数 F 和頂点数 V 既然不够作为分类的依

据，那末同时再加看棱的条数，是不是就行呢？还是不行，因为結构不同的图 1(四)和图 2(四)不但有相同的面数 $F=6$，相同的頂点数 $V=8$，还有相同的棱的条数 $E=12$. 再試作各种面数 F 相等和頂点数 V 相等，但結构不同的凸多面形，結果必然是它們的棱数 E 也相等；而且更进一步，发現下面的事实．不論結构怎么样不同的两个凸多面形，尽管它們的面数 F 与頂点数 V 都不一样，只要当它們的面数 F 与頂点数 V 相加的和数 $V+F$ 相等时，它們的棱的条数 E 也必然相等，并且总滿足关系式：$E=V+F-2$，也就是 $V-E+F=2$. 凸多面形分类的这样的討論，就引导我們发現定理 1.

2 定理 1 的证明

凸多面形的欧拉定理有种种不同的证法．我們現在要給出的证明是勒让德(A. M. Legendre, 1752—1833)的证明．这需要球面几何学中的一个簡单事实．先来证明这个事实，作为证明定理的准备工作．

2.1 球面多边形內角和公式　設平面 n 边形的 n 个內角是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ $(n\geqslant 3)$．这 n 个內角的和 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 可以簡写成 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$，即

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i+\cdots+\alpha_n,$$

其中 α_i 表示第 i 个角的弧度，$i=1, 2, \cdots, n$．記号“Σ”表示和

的意思，讀作“西格碼”. $\sum_{i=1}^{n}$ 表示下标是 1 的項加到下标是 n 的項的总和. 中学平面几何教科书中都已經证明过：平面 n 边形的 n 个内角和是 $(n-2)\pi$，即

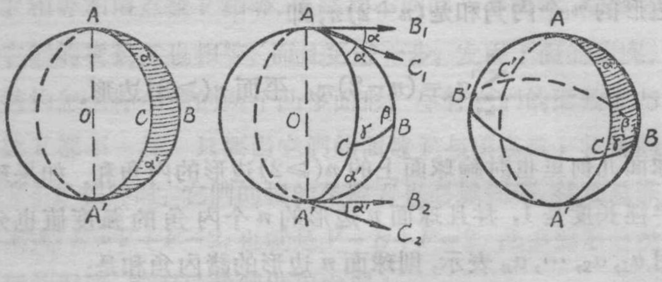
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=(n-2)\pi,\text{ 平面 } n(\geqslant 3)\text{ 边形.}$$

球面几何里也討論球面上的 $n(\geqslant 2)$ 边形的內角和. 如果球的半徑长度是 1，并且球面 n 边形的 n 个内角的弧度值也分别用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 表示，則球面 n 边形的諸內角和是：

(1) $$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=(n-2)\pi+W,\text{ 球面 } n(\geqslant 2)\text{ 边形,}$$

式中的 α_i 表示第 i 个内角的弧度值，W 表示这球面 n 边形的面积. 关于这个公式(1)，还必須加以說明如下. 首先，球面多边形的边，必須是大圓(即以球心为圓心的圓)的圓弧. 其次，任意两个不同的大圓有两个交点，是球面上的一对对徑点，即球的同一条直徑的两个端点，如图 3(一)中的点 A 和 A'. 最后，任意两个不同的大圓弧把球面分成四部分；其中的任一部分叫作一个月形，它是一个球面 2 边形(平面上沒有 2 边形). 图 3(一) 中有阴影的部分是一个月形，也就是一个球面 2 边形，α 和 α' 是它的两个内角. 图 3(三)中有阴影的部分是一个球面三角形，α, β 和 γ 是它的三个内角. 此外，还要說明一下球面多边形内角的量法. 設要測量球面多边形的一个頂点 A 处的內角 α，如图 3(二). 夹这个角 α 的两个边必是大圓弧.

在顶点 A 处分别作这两个大圆的切线(射线即半直线) AB_1 和 AC_1. 平面角 $\angle B_1AC_1$ 的弧度就是角 α 的弧度.



(一) (二) (三)

图 3

2.2 公式(1)的证明 在 $n=2$ 时，如图 3(一) 中由两个大圆弧 ABA' 和 ACA' 所包围的球面上的部分，就是一个球面二边形，简记为 $ABA'CA$. 在 A 与 A' 处分别作同一个大圆 ABA' 的切线 AB_1 与 $A'B_2$，参看图 3(二)，因为都是与直径 AA' 垂直的线段，故这两切线平行，即 $AB_1 \parallel A'B_2$. 同理，在 A 与 A' 处分别作同一个大圆 ACA' 的两切线 AC_1 与 $A'C_2$ 也平行，即 $AC_1 \parallel A'C_2$. 从而两个平面角 $\angle B_1AC_1$ 与 $\angle B_2A'C_2$ 相等，也就是 $\alpha=\alpha'$，即 $\sum_{i=1}^{2}\alpha_i=2\alpha$. 这是公式(1)的左端，在 $n=2$ 时的值. 公式(1)右端的第一项，在 $n=2$ 时为零. 再计算公式(1)右端第二项 W 的值. 在这里，W 是月形的面积. 已知单位半径的球面积是 4π. 由于把半圆弧 ABA' 绕直径旋转一个周角 2π 时得球面，而旋转一个 α 角时得内角为 α 的月形，所以

球面积与月形面积的比值，等于 $2\pi:\alpha$. 所以内角为 α 的月形面积 $W=2\alpha$. 公式(1)的左右端相等，这证明了在 $n=2$ 时公式(1)成立.

在 $n=3$ 时，如图 3(三)中由三个大圆弧 AB（不是 $AA'B$，下同）、BC 和 CA 所包圍的球面上的部分，就是一个球面三边形，它的三个內角是 α, β 和 γ. 所以公式(1)的左端:

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=\alpha+\beta+\gamma.$$

下面我們来計算公式(1)的右端. 右端的第一項是 $(3-2)\pi=\pi$. 右端的第二項，球面三边形的面积等于什么呢？为方便起見，用記号 $\triangle ABC$ 表示这个球面三边形的面积. 同理，由三个大圆弧 $A'B, BC$ 和 CA' 为边的球面三边形的面积用記号 $\triangle A'BC$ 表示. 从图 3(三)可以看出

$\triangle ABC+\triangle A'BC=2\alpha$ （因为左端就是月形 $ABA'CA$ 的面积），

$\triangle ABC+\triangle B'AC=2\beta$ （因为左端就是月形 $BAB'CB$ 的面积），

$\triangle ABC+\triangle C'AB=2\gamma$ （因为左端就是月形 $CBC'AC$ 的面积）；

因为 $\triangle C'AB$ 和 $\triangle CA'B'$ 对于球心对称，所以

$$\triangle C'AB=\triangle CA'B',$$

因而第三式可以改写为

$$\triangle ABC+\triangle CA'B'=2\gamma.$$

把上面的第一式，第二式和改写后的第三式相加，得

$$2(\triangle ABC)+(\triangle ABC+\triangle A'BC+\triangle B'AC+\triangle CA'B')$$
$$=2(\alpha+\beta+\gamma).$$

但是这和式左端的第二个括号中的四个面积，应等于 2π. 所以上式化简为

$$2(\triangle ABC)+2\pi=2(\alpha+\beta+\gamma),$$

即 $$\triangle ABC+\pi=\alpha+\beta+\gamma.$$

这证明了在 $n=3$ 时公式(1)也成立.

跟证明平面 n 边形内角和公式一样，可以用数学归納法证明在 $n>3$ 时公式(1)也都成立.

2.3 定理 1 的证明 設有一个凸多面形 P. 已知它有 V 个頂点、E 条棱和 F 个面.

在凸多面形 P 所包圍的空間內部，任取一点 O. 作一个以 O 为球心，半徑是单位长的球面 S. 然后，P 上的任一点 x

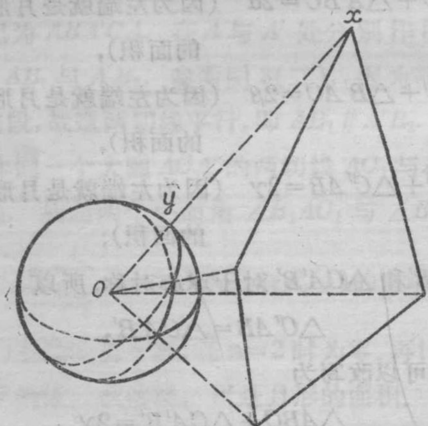


图 4