初等数学论丛

2

CHU DENG SHU XUE LUN CONG

初 等 数 学 论 丛

（第 2 辑）

上 海 教 育 出 版 社

初 等 数 学 论 丛
（第 2 辑）
本 社 编
上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）
新华书店上海发行所发行　上海崇明印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 7.5　字数 164,000
1981 年 2 月第 1 版　1981 年 2 月第 1 次印刷
印数 1—28,000 本

统一书号：7150・2377　　定价：0.61 元

目　录

质点几何学简介

南京大学数学系　莫绍揆

初学者都觉得几何学和代数学不同，它技巧性极强，普遍性较差，而且非常依赖于图形的直觉，离开图形简直无从下手(教科书上也强调，在解几何题时必须绘图，不鼓励离开图形而作几何推导).

自从线性代数出现以后，把绝大部分的几何(射影几何与仿射几何乃至欧氏几何，后者可以说是仿射几何的发展)都吸收于线性代数之中. 而线性代数和别的代数一样，主要依赖于计算推导，几乎无须任何图形的帮助，而且普遍性强，好些几何定理都归结于一、两个公式之中. 因此，有了线性代数，人们可以说，至少有了一种工具，可以不必完全依靠图形而解决几何问题了.

但是，目前的线性代数却有好些大缺点.

首先，线性代数的基本概念是矢量而不是点，而几何中却以点作为基本概念，矢量(有向线段)只是一个导出概念. 因此，作为推导几何的工具来说，线性代数是不那么合适的.

其次，用目前的线性代数来推导几何，不论推导射影几何或仿射几何，都有些牵强，都不够自然. 例如，对射影几何说来，人们把分量成比例的矢量看作同一点，例如$(1, 3, 2, 4)$与$(3, 9, 6, 12)$为同一点，而$(1, 0, -1, 3)$与$(2, 0, -2, 6)$又为同一点，但是$(1, 3, 2, 4)+(1, 0, -1, 3)=(2, 3, 1, 7)$与

$(3,9,6,12)+(2,0,-2,6)=(5,9,4,18)$却是不同的点(这两矢量的分量不成比例)，在理论上说，这非常不合理．就仿射几何说来，每个(代数上的)矢量都代表几何上的矢量而不代表点；必须规定一个原点，有了原点以后，每个点才和从原点出发的矢量(叫做位置矢量)的终点一一对应．此外，同一个(代数上的)矢量既代表了几何上的矢量，又代表了几何上的点，这是非常不方便的．更成问题的是，这时原点变得非常特殊，与别的点截然不同(因为原点由零矢量代表，而零矢量是非常特殊的矢量)，但在几何上，每个点都处在相等的地位，没有任何特殊的点．因此，尽管从某个角度说来，使用线性代数可以相当方便地处理射影几何与仿射几何，但从本质上说，拿目前的线性代数来处理几何，仍有很多大毛病，是不能令人满意的．

本文介绍一种新几何，叫做*质点几何*(它也相应地有一种新代数，可以叫做*质点代数*)，完全克服了上述各毛病，而目前线性代数的各种优点它都继承下来了．具体说来，它从几何中的基本概念——点——出发，逐步地推导出几何中各种概念．当然，它不是完全遵照几何中原来的处理方式，而是略作了更改．它把几何中的点加以推广而成为质点，作为一个基本概念．读者容易看见，它的发展过程既和几何(射影几何、仿射几何及欧氏几何)中的发展过程完全符合，又象线性代数那样运算方便、普遍性强．可以说，它吸收了目前线性代数的长处而克服其缺点，是完全可用以代替目前的初等几何的．

本文中对各概念都是从头讲起的，但为了帮助读者的理解，我们经常引用别的科学(物理、解析几何)乃至于几何学本身后面的事实，这些都是解释性的，并非把质点几何建基于这些结果之上．

(一) 质点及其运算

我们先注意一个事实．在解析几何中，设有两点 P: (x_1, y_1), Q: (x_2, y_2)，则以分段比 $m:n$ 而划分 PQ 的分点 R，其坐标 (x, y) 可由下式确定：

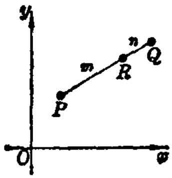

图 1-1

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\quad y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}.$$

亦可写成

$$(x,\ y)=\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

$$=\frac{n}{m+n}(x_1,\ y_1)+\frac{m}{m+n}(x_2,\ y_2). \tag{1}$$

如果不引进坐标系，而只从几何学上的点、线着眼，我们显然应该写为

$$R=\frac{n}{m+n}P+\frac{m}{m+n}Q. \tag{2}$$

换句话说，我们应该引进有关"点"的"加"运算．当然，这种加运算不是固定的，它还依赖于 m、n（这里，m、n 不限于整数，可以是任意实数）．我们注意到，不管 m、n 等于什么，恒有

$$\frac{n}{m+n}+\frac{m}{m+n}=1.$$

因此，如果引入一个依赖于 a 的加法"$+_a$"使得

$$P+_aQ=aP+(1-a)Q, \tag{3}$$

那末上面的式子可以写成

$$R=P+_aQ.\quad \left(这里\ a=\frac{n}{m+n}\right) \tag{4}$$

点的这种加法运算是一个非常重要的运算，可以用来作为建立仿射几何、射影几何乃至欧氏几何的出发点．

这里，我们是把"$+_a$"中的 a 看作是关于加法的参数，a 变

动时加法也作变动(故有无穷多种加法). 研究无穷多种运算显然是不方便的. 我们能否把"aP"看作是"a乘P", 把"$(1-a)Q$"看作是"$(1-a)$乘Q", 然后只用一种公共的加法把它们加起来. 如果能够这样做的话, 那当然方便多了. 因此, 最好能够在加法(两个点相加)之外, 还引入"倍法", 用一个实数乘一个点.

用一个实数乘一个点, 这能够是什么呢? 在几何学中, 点是只有位置而没有大小的, 乘了一个实数, 大小当然仍然为零(因为 $a\times 0=0$), 是不是改动位置呢? 事实表明, 如果因实数乘一个点而能改变其位置, 那更是不方便的. 因此, 在原来几何学的范围内, 我们是无法解释点的倍法的.

在力学中, 我们经常讨论质点. 所谓质点是有位置没有大小(与几何中的点相同)但却有质量. 如果用实数 k 乘一质点, 则该质点的质量便倍大成为 k 倍, 但大小、位置均不变. 这正合于我们的要求.

因此, 我们可把几何学中的点加以推广而讨论质点, 即具有质量的点. 通常几何学中所讨论的点, 则看成是质量为 1 的点.

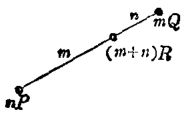

图 1-2

根据力学可以知道, 如果 P 处放一个质量为 m 的点, 而 Q 处放一个质量为 n 的点, 那末这两质点所组成的系统的重心 R 恰巧满足下列方程

$$(m+n)R=nP+mQ. \tag{5}$$

这样, 上面所讨论的重要的运算恰巧相应于求重心的运算.

这样, 引入了质点的概念以后, 倍法与加法便很自然地引入了. 讨论质点的几何, 便叫做质点几何学.

（二）质点加法、倍法的公理系统

在质点几何中，质点是一个基本概念．每个质点都具有一个质量，当质量为1时便是通常的几何点．每个质量非零的质点都占有一个位置(故通常的点恒占有一位置)，但质量为零的点(叫做零点，它与原点不同)位置不定．用非0实数a乘质点时，质量放大a倍，而位置不变．因此，如果某通常的点记为P，则同位置而质量为a的质点便可记为aP．我们总把通常点记为P, Q, R等，而一般的质点则表成aP, bQ, cR等，亦可表成$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$等．

这里强调指出，在通常的力学中，质量必为正数，至多还可为0，绝不能为负数．但是，在讨论质点几何时，引入负质量是非常必要的．姑且不论近代物理已渐渐谈论引入负质量的可能性，至少在概念上，“负质量”是无可非议的．因此，我们约定：质量以及倍法中所使用的实数可以是任意实数．

质点加法、倍法的公理系统

1° 如果$\boldsymbol{P}$为任何质点，a为任何实数，则$a\boldsymbol{P}$为一个确定的质点，位置与$\boldsymbol{P}$同，而质量为$\boldsymbol{P}$的质量的a倍．

2° 如果$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$为任何质点，则当$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$质量之和非零时，$\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$为一个确定的质点，其质量为$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$的质量之和．

注意：如$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$质量之和为0，则$\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$为矢量，参见本书第13页．

3° (交换律)　$a\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}a$, $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}$.

4° (结合律)　$a(b\boldsymbol{P})=(ab)\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}+(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R})=(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})+\boldsymbol{R}$.

5° (分配律)　$a\boldsymbol{P}+b\boldsymbol{P}=(a+b)\boldsymbol{P}$, $a\boldsymbol{P}+a\boldsymbol{Q}=a(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})$.

6° $1\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}$, $0\boldsymbol{P}=O$. (O表“零点”)

7° $O+\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}+O=\boldsymbol{P}$.

8° 任给两质点$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$，如果其质量不相等，则必有一质点$\boldsymbol{R}$，使得

$P+R=Q$.（易证 R 的质量为 Q 的质量减 P 的质量之差）

注意：如 P、Q 质量相等，则满足上方程的 R 为矢量，参见本书第 14 页.

由于在第 2° 公理中要考虑 P、Q 两者质量之和是否为 0，在第 8° 公理中要考虑两者质量是否相等，因此，把每个质点的质量标出来是很有用的. 为此，在下文我们不用 P、Q 等来表示一般的质点，而仅用来表示质量为 1 的通常点. 至于一般的质量为 a 的质点，则表为 aP. 这时，第 2° 与第 8° 公理可分别表示为：

2° aP、bQ 为任两质点，如果 $a+b\neq 0$，则有 R，使得

$$(a+b)R=aP+bQ.$$

8° aP、bQ 为任两质点，如果 $a\neq b$，则有 R，使得

$$aP+(b-a)R=bQ.$$

其余公理亦可同法改写. 总之，读者应该注意，P、Q、R 等均表示质量为 1 的通常点. 还应注意，等式两边的质量和必须相等，即等式两边系数之和要相等.

如果两质点都由同一个通常点倍大而得，便说这两质点是同位置的. 显然，两质点 P、Q 同位置当且仅当有不全为 0 的两实数 a、b，使得 $aP=bQ$ 或 $aP+(-b)Q=O$. 根据这个定义，零点和任何点均同位置.

定义 1 设 P、Q 为两个不同位置的质点，则由所有形如 $aP+bQ$ 的点组成一条直线，记为 PQ. 当 $b=0$、$a=1$ 时，该点变为 P；当 $a=0$、$b=1$ 时，该点变为 Q，故直线 PQ 包含有 P、Q 两点.

从 PQ 直线上任取两个不同位置的质点 R、S，这时有 $R=r_1P+r_2Q$、$S=s_1P+s_2Q$，因两点不同位置，故 $\frac{r_1}{s_1}\neq\frac{r_2}{s_2}$，

故可求得四实数 x_1、x_2、y_1、y_2，使得 $P=x_1R+x_2S$、$Q=y_1R+y_2S$（因只须解下述方程 $r_1x_1+s_1x_2=1$，$r_2x_1+s_2x_2=0$，$r_1y_1+s_1y_2=0$，$r_2y_1+s_2y_2=1$ 便可）.

定理1 从 PQ 直线上任取两个不同位置的点 R、S，则直线 RS 和直线 PQ 完全一致.

证明 如上规定，可知凡形如 $aR+bS$ 的点均可写成 $a(r_1P+r_2Q)+b(s_1P+s_2Q)=(ar_1+bs_1)P+(ar_2+bs_2)Q$ 的形状，故直线 RS 上的点都是 PQ 线上的点；反之，凡形如 $aP+bQ$ 的点都可写成 $a(x_1R+x_2S)+b(y_1R+y_2S)=(ax_1+by_1)R+(ax_2+by_2)S$ 的形状，故直线 PQ 上的点都是 RS 线上的点，两直线完全一致．这就证得了定理. □

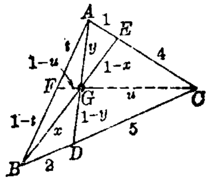

图 1-3

定理1便是通常所说的：两点决定一直线.

当 P、Q 不同位置时，如果有 $R=aP+bQ=a_1P+b_1Q$，则必有 $a=a_1$，$b=b_1$，否则 $(a-a_1)P+(b-b_1)Q=O$ 而 P、Q 同位置了．这是我们解题时必须注意到的.

[例1] 如图1-3，试求各线段之比.

解法一 （几何法）根据分段比，可得

$$E=\frac{4}{5}A+\frac{1}{5}C,\quad D=\frac{5}{7}B+\frac{2}{7}C.$$

故得

$$G=(1-x)B+xE=(1-x)B+\frac{4x}{5}A+\frac{x}{5}C$$

$$=(1-y)A+yD=(1-y)A+\frac{5y}{7}B+\frac{2y}{7}C.$$

令各点的系数分别相等，得

$$\frac{4x}{5}=1-y;\quad \frac{5y}{7}=1-x,\quad \frac{x}{5}=\frac{2}{7}y.$$

解之，得 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{7}{15}$. 从而 $G=\frac{8}{15}A+\frac{1}{3}B+\frac{2}{15}C$.

$$\therefore\quad AG:GD=7:8,\quad BG:GE=2:1.$$

再讨论 F，有(令 $CF:FG=u:1-u$)

$$F=(1-t)A+tB=(1-u)C+uG$$
$$=\frac{8u}{15}A+\frac{u}{3}B+\left(1-\frac{13}{15}u\right)C.$$

令各系数相等，得

$$\frac{8u}{15}=1-t,\quad \frac{u}{3}=t.$$

解之，得

$$t=\frac{5}{13},\quad u=\frac{15}{13}.\ \left(1-u=-\frac{2}{13}\right)$$

$$\therefore\quad AF:FB=5:8,\quad CG:GF=13:2.$$

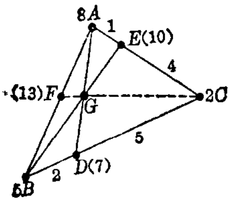

图 1-4

解法二 (质点法) 由 E 点位置知 A、C 的质量比应为 4:1. 由 D 点知 B、C 质量比应为 5:2. 合并两者，得质量比 $A:B:C=8:5:2$. 故

$$AF:BF=5:8.$$

而 D、E、F 的质量分别为 7, 10, 13. 由 A、D 质量得

$$AG:GD=7:8,$$

由 B、E 质量得

$$BG:GE=10:5,$$

由 C、F 质量得

$$CG:GF=13:2.$$

对比例 1 的两种解法，足见用质点法解题方便得多.

用这种方法，在六对线段比中(三边上的三对，通过三顶点的三条内线上的三对)，只要任意知道两对，其余四对比也就可以求出了.

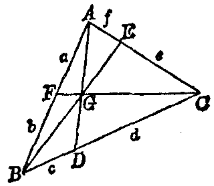

图 1-5

定理 2(Ceva)　三角形 ABC 所在平面上任取一点 G (图 1-5)，AG、BG、CG 分别交对边于 D、E、F，则 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$；反之，如果 BC, CA, AB 边上的三点 D、E、F，有 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，则 AD, BE, CF 必交于一点.

证明　根据 D、E 的分段比，可知放在 B、C 上的质量比应为 $B:C=d:c$，放在 A、C 处的质量比应为 $C:A=f:e$. 故得质量比

$$A:B:C=ce:df:cf.$$

由于 $A:B=ce:df$，故 F 所作的分段比应为

$$a:b=df:ce,\quad 即\quad ace:bdf=1.$$

定理前半得证.

其次，设 AD 与 BE 交于 G，而 CG 与 AB 交于 F'. 根据上面已证得的定理前半，知 $\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，但题设 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，故得 $\frac{AF'}{F'B}=\frac{AF}{FB}=\frac{a}{b}$. 依照加法的定义，可知

$$F'=aB+bA.$$

但同时亦有

$$F=aB+bA,$$

因加法的结果应唯一，故得 $F=F'$，即 CF 必过 G 点. 定理后半得证. □

定理 3(Menelaus) 设有一直线,交三角形 ABC 的三边(或其延长线)于 D、E、F 三点(如图 1-6)。则有

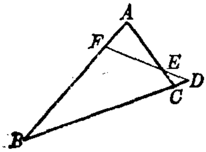

图 1-6

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1. \tag{6}$$

反之,在三角形 ABC 三边(或其延长线)上取三点 D、E、F. 如果(6)式成立,则点 D、E、F 在一直线上.

证明 令 $\frac{AF}{FB}=\frac{a}{b}$, $\frac{BD}{DC}=\frac{h}{k}$, 则有

$$(a+b)F=bA+aB, \quad (h+k)D=hC+kB,$$

故

$$k(a+b)F-a(h+k)D=kbA-ahC=(kb-ah)E'.$$

故 E' 既在 DF 上又在 AC 上,即为题设的 E. 显然 $\frac{AE}{EC}=\frac{-ah}{bk}$. 从而

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{a}{b}\,\frac{h}{k}\,\frac{-bk}{ah}=-1.$$

于是定理前半得证.

仿 Ceva 定理后半的证法,亦可利用质点加法的唯一性而证明定理 3 的后半. □

利用结合律,可得出很多新定理,如不用质点几何的方法,是很难证明的.

[例 2] 试把$(A+2B)+(3B+4C)=(A+3C)+(5B+C)$写成通常几何定理.

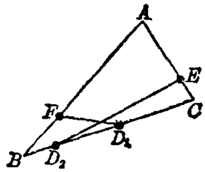

图 1-7

解 在 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC、CA 上分别取 F, D_1、D_2, E (如图 1-7),设 FD_1 与 ED_2 交于 G, 且

$$\frac{AF}{FB}=\frac{2}{1}, \quad \frac{BD_1}{D_1C}=\frac{4}{3},$$

$$\frac{BD_2}{D_2C}=\frac{1}{5},\quad \frac{AE}{EC}=\frac{3}{1},$$

则必有 $\frac{FG}{GD_1}=\frac{7}{3}$ 和 $\frac{EG}{GD_2}=\frac{6}{4}$. 这便是所求的相应几何定理. 因为,为要得出所作的分比,应该有 $1A$, $(2+3)B$, $4C$, 从而必须 $3F$, $7D_1$, $4E$, $6D_2$. 于是便得所述的相应定理.

(三) 平 行

定义 2 设在一平面上有 A、B、C、D 四通常点,又有两实数 a、b, 使得 $aA+bB=aC+bD(=(a+b)G)$, 则说直线 $AC \parallel DB$.

如图 1-8, 如果有 G, 使得

$$\frac{AG}{GB}=\frac{b}{a}=\frac{CG}{GD},$$

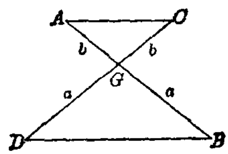

图 1-8

我们便说 $AC \parallel DB$. 显然,当 A、B、C、D 不共线时,这个定义和通常所说的平行完全相同. 但我们的定义包括较广,当 A、B、C、D 同线时,我们有:

定理 4 如果 A、B、C、D 同线,则 $AC \parallel BD$.

证明 可设我们的 A、B 等均具质量 1. 因为 A、C 均在 BD 线上,故有(两边的质量和应为 1)

$$A=aC+(1-a)D,\quad B=bC+(1-b)D.$$

今选取 p、q, 使 $pA+qB=pC+qD$, 因

$$pA+qB=(pa+qb)C+(p(1-a)+q(1-b))D,$$

故应有

$$p=pa+qb \quad 及 \quad q=p(1-a)+q(1-b).$$

易见,如取 $p=b$ 及 $q=1-a$, 即可满足两方程. p、q 既可求出,故知 $AC \parallel DB$. 定理 4 得证. □

这个推广了的平行概念,比通常几何学的平行概念(其中

两平行线不能重合)更觉方便.

定义 3 如果 $aA+bB=aC+bD$，则说 $AC:DB=\frac{b}{a}$.

这样，两线段之比的概念可以推广到平行线段去，而不限于同线. 但是，在非平行线上的线段的比现在还未作定义.

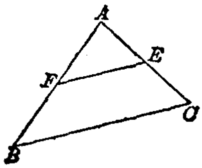

图 1-9

利用平行线及平行线段之比的概念，可以证明下述各定理.

定理 5 三角形两边中点的连线段，必平行于第三边，且为第三边之半.

证明 设三角形 ABC 中，AB, AC 的中点分别为 F, E，则有

$$2E=A+C,\quad 2F=A+B.$$

故

$$2E+B=2F+C(=A+B+C).$$

故 $EF\parallel CB$ 且 $\frac{EF}{CB}=\frac{1}{2}$. 从而定理 5 得证. □

定义 4 设 A、B、C、D 四点不同线，如果 $AB\parallel DC$, $AD\parallel BC$，则称 $ABCD$ 为平行四边形.

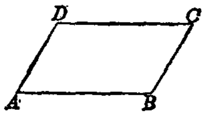

图 1-10

定理 6 在平行四边形 $ABCD$ 中，对边平行且相等，对角线互相平分. 反之，如果四边形有一对对边平行且相等，或者它的对角线互相平分，则必为平行四边形.

证明 平行四边形既然两双对边平行，应有

$$pA+qC=pB+qD,\quad 以及\quad hA+kC=hD+kB.$$

用加减消去法消去 A，得

$$(hq-pk)C=(hq-ph)D+(ph-pk)B.$$

但由平行四边形定义，B、C、D 显然不同线，故只能 $hq-pk=0$, $q=p$, $h=k$. 消去 p、q 等系数后，得

$$A+C=B+D, \quad A+C=D+B,$$

这便表明 $\frac{AB}{DC}=1$, $\frac{AD}{BC}=1$, 即对边相等. $\frac{1}{2}(A+C)$为 AC 的中点，$\frac{1}{2}(B+D)$为 BD 的中点，两者相同，故知对角线互相平分.

定理的后半部分读者自证. □

读者还可自行证明下述定理：

定理7 任意四边形对边中点的连线、对角线中点的连线必交于一点，且交点平分各线段.

定理8(Desargue) 如果线 AA', BB', CC' 共点，而 BC, $B'C'$ 交于 A'', CA, $C'A'$ 交于 B'', AB, $A'B'$ 交于 C'', 则 A'', B'', C'' 三点共线.

定理9(Pappus) 如果 ABC 共线，$A'B'C'$ 也共线，BC', $B'C$ 交于 A'', CA', $C'A$ 交于 B'', AB', $A'B$ 交于 C'', 则 A'', B'', C'' 也共线.

(四) 矢　量

上面在进行质点的相加时，必须要求两质点的质量之和非零. 这个限制是很必要的，因为其和为零或否所得结果是根本不同的.

如果两质点不但质量之和为零而且同位置，即进行 $aP-aP$ 时，其结果是零点 O. 对于零点 O, 它位置不定，而且服从规律 $O+P=P+O=P$, $aO=O$, $0P=O$.

而如果两质点质量之和为零，但处在不同的位置，例如 $P-Q$ 或 $aP-aQ$(这里 $a\neq0$)，其结果便很值得研究了.