

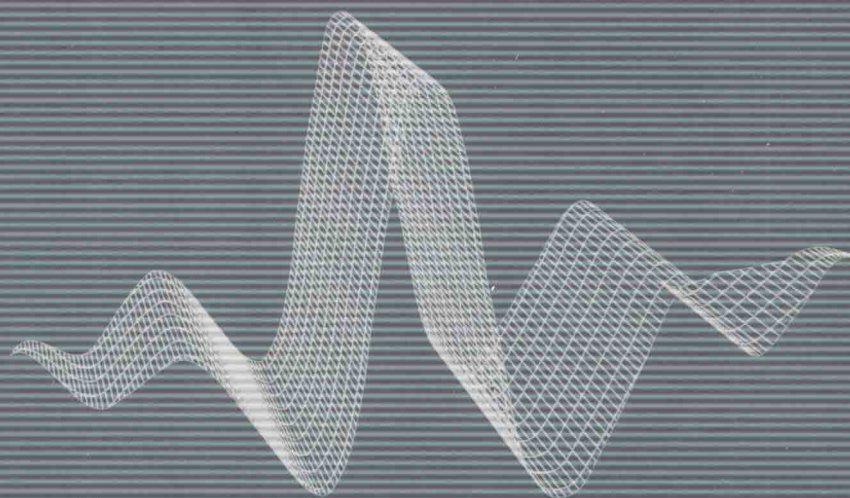
信息与通信技术



国防
科技
工业
委员会
十五
规划
教材

信号时频分析及应用

● 张 晔 编著



哈尔滨工业大学出版社

北京航空航天大学出版社 北京理工大学出版社

西北工业大学出版社 哈尔滨工程大学出版社



国防科工委“十五”规划教材·信息与通信技术

信号时频分析及应用

张 晔 编著

哈尔滨工业大学出版社

北京航空航天大学出版社 北京理工大学出版社

西北工业大学出版社 哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是作者多年从事小波变换、时频分布与分析、数字图像处理、数字信号处理等课程的教学以及从事有关信号及图像处理等科研工作的总结,旨在把小波变换和时频分析集成在统一理论框架下,力求为信号与信息处理、通信与电子系统等学科的研究生提供一部全面、完整、详细的关于小波变换和时频分析在信号/图像处理中应用的教材,同时又适合广大科技工作者在科研中自学和应用。

本书的突出特点是,在内容选取上注重反映当前的新理论和新技术,在结构安排上侧重于理论和应用的有效结合,在编排形式上注重图文表并茂、易于读者阅读理解,是小波理论、时频分析及应用研究者和工程技术人员有益的参考资料和教材。

图书在版编目(CIP)数据

信号时频分析及应用/张晔编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2006.3
ISBN 7-5603-2304-9

I.信… II.张… III.①信号-分析 ②时间-频谱分析 IV.TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 158175 号

信号时频分析及应用

编著者 张晔
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
地 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
印 刷 肇东粮食印刷厂
开 本 787×960 1/16 印张 13.75 字数 276 千字
版 次 2006 年 3 月第 1 版 2006 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 7-5603-2304-9/TN·79
印 数 1~3 000
定 价 25.00 元



国防科工委“十五”规划教材编委会

(按姓氏笔画排序)

主 任:张华祝

副主任:王泽山 陈懋章 屠森林

编 委:王 祁 王文生 王泽山 田 蔚 史仪凯
乔少杰 仲顺安 张华祝 张近乐 张耀春
杨志宏 肖锦清 苏秀华 辛玖林 陈光福
陈国平 陈懋章 庞思勤 武博祯 金鸿章
贺安之 夏人伟 徐德民 聂 宏 贾宝山
郭黎利 屠森林 崔锐捷 黄文良 葛小春



总 序

国防科技工业是国家战略性产业,是国防现代化的重要工业和技术基础,也是国民经济发展和科学技术现代化的重要推动力量。半个多世纪以来,在党中央、国务院的正确领导和亲切关怀下,国防科技工业广大干部职工在知识的传承、科技的攀登与时代的洗礼中,取得了举世瞩目的辉煌成就。研制、生产了大量武器装备,满足了我军由单一陆军,发展成为包括空军、海军、第二炮兵和其他技术兵种在内的合成军队的需要,特别是在尖端技术方面,成功地掌握了原子弹、氢弹、洲际导弹、人造卫星和核潜艇技术,使我军拥有了一批克敌制胜的高技术武器装备,使我国成为世界上少数几个独立掌握核技术和外层空间技术的国家之一。国防科技工业沿着独立自主、自力更生的发展道路,建立了专业门类基本齐全,科研、试验、生产手段基本配套的国防科技工业体系,奠定了进行国防现代化建设最重要的物质基础;掌握了大量新技术、新工艺,研制了许多新设备、新材料,以“两弹一星”、“神舟”号载人航天为代表的国防尖端技术,大大提高了国家的科技水平和竞争力,使中国在世界高科技领域占有了一席之地。十一届三中全会以来,伴随着改革开放的伟大实践,国防科技工业适时地实行战略转移,大量军工技术转向民用,为发展国民经济作出了重要贡献。

国防科技工业是知识密集型产业,国防科技工业发展中的一切问题归根到底都是人才问题。50多年来,国防科技工业培养和造就了一支以“两弹一星”元勋为代表的优秀的科技人才队伍,他们具有强烈的爱国主义思想和艰苦奋斗、无私奉献的精神,勇挑重担,敢于攻关,为攀登国防科技高峰进行了创造性劳动,成为推动我国科技进步的重要力量。面向新世纪的机遇与挑战,高等院校在培养国防科技人才,生产和传播国防科技



新知识、新思想,攻克国防基础科研和高技术研究难题当中,具有不可替代的作用。国防科工委高度重视,积极探索,锐意改革,大力推进国防科技教育特别是高等教育事业的发展。

高等院校国防特色专业教材及专著是国防科技人才培养当中重要的知识载体和教学工具,但受种种客观因素的影响,现有的教材与专著整体上已落后于当今国防科技的发展水平,不适应国防现代化的形势要求,对国防科技高层次人才的培养造成了相当不利的影响。为尽快改变这种状况,建立起质量上乘、品种齐全、特点突出、适应当代国防科技发展的国防特色专业教材体系,国防科工委全额资助编写、出版 200 种国防特色专业重点教材和专著。为保证教材及专著的质量,在广泛动员全国相关专业领域的专家学者竞投编著工作的基础上,以陈懋章、王泽山、陈一坚院士为代表的 100 多位专家、学者,对经各单位精选的近 550 种教材和专著进行了严格的评审,评选出近 200 种教材和学术专著,覆盖航空宇航科学与技术、控制科学与工程、仪器科学与工程、信息与通信技术、电子科学与技术、力学、材料科学与工程、机械工程、电气工程、兵器科学与技术、船舶与海洋工程、动力机械及工程热物理、光学工程、化学工程与技术、核科学与技术等学科领域。一批长期从事国防特色学科教学和科研工作的两院院士、资深专家和一线教师成为编著者,他们分别来自清华大学、北京航空航天大学、北京理工大学、华北工学院、沈阳航空工业学院、哈尔滨工业大学、哈尔滨工程大学、上海交通大学、南京航空航天大学、南京理工大学、苏州大学、华东船舶工业学院、东华理工学院、电子科技大学、西南交通大学、西北工业大学、西安交通大学等,具有较为广泛的代表性。在全面振兴国防科技工业的伟大事业中,国防特色专业重点教材和专著的出版,将为国防科技创新人才的培养起到积极的促进作用。

党的十六大提出,进入二十一世纪,我国进入了全面建设小康社会、加快推进社会主义现代化的新的发展阶段。全面建设小康社会的宏伟目标,对国防科技工业发展提出了新的更高的要求。推动经济与社会发展,



提升国防实力,需要造就宏大的人才队伍,而教育是奠基的柱石。全面振兴国防科技工业必须始终把发展作为第一要务,落实科教兴国和人才强国战略,推动国防科技工业走新型工业化道路,加快国防科技工业科技创新步伐。国防科技工业为有志青年展示才华,实现志向,提供了缤纷的舞台,希望广大青年学子刻苦学习科学文化知识,树立正确的世界观、人生观、价值观,努力担当起振兴国防科技工业、振兴中华的历史重任,创造出无愧于祖国和人民的业绩。祖国的未来无限美好,国防科技工业的明天将再创辉煌。

张华祝



前 言

小波变换和时频分析作为信号/图像处理的强有力工具,是20世纪80年代发展起来的新技术。尽管二者在信号/图像处理手段上有所不同,但共同点较多、联系密切,特别是在非平稳信号分析中,小波变换和时频分析已广泛应用于雷达、图像、声纳、通信、自动化、航空航天、生物医学、语音等领域。本书旨在把小波变换和时频分析集成在统一理论框架下,力求为信号与信息处理、通信与电子系统等学科的研究生提供一部全面、完整、详细的关于小波变换和时频分析及其在信号/图像处理中应用的教材,同时又适合广大科技工作者在科研中自学和应用。

本书除第0章是对全书简单综述及对本书涉及的基础知识进行介绍外,共分三篇、十章。第一篇是小波变换篇,包括第一至四章,主要从工程应用角度,介绍从Fourier变换到短时Fourier变换(Gabor变换),再到小波变换,在此基础上重点介绍小波变换的基本理论、多分辨率分析与正交小波基、小波变换与正交镜像滤波器、信号/图像的多分辨率金字塔分解与重建、信号/图像的多分辨率小波分解与重建、小波包、多小波及第二代小波等。第二篇是时频分布与分析篇,包括第五至七章,主要介绍了时频分布的必要性、时频分布的基本概念和基本理论,并阐述了时频分布的一些基本性质,进一步详细介绍了Wigner-Ville分布,时频分布的统一形式——Cohen类分布、构造时频分布的一般方法、降低交叉项的设计方法、高阶时频分布以及基于时频分布的线性及非线性时变滤波方法、基于时频分布的信号合成方法等。第三篇是应用篇,包括第八至十章,主要根据时频分布及小波变换在信号/图像处理中所表现出的局部化特性、方向选择性、视觉误差分配特性及多分辨率分析特性,介绍小波变换技术用于图像数据压缩、JPEG2000、信号/图像边缘检测及噪声抑制、小波变换在遥



感数据处理中的应用等。

本书是作者多年从事小波变换、时频分布与分析、数字图像处理、数字信号处理等课程的教学以及从事有关信号及图像处理等科研工作的总结。其突出特点是,在内容选取上注重反映当前的新理论和新技术,在结构安排上侧重于理论和应用的有效结合,在编排形式上注重图、文、表并茂,易于读者阅读理解,是小波理论、时频分析及应用的研究者和工程技术人员有益的参考资料,也可供相关专业的学生作教材。

本书各篇之间在内容和形式上既是相互联系、又是彼此独立的。在教学过程中,可以根据教学的具体要求,进行不同取舍组合,既可以作为一门课程进行教学,也可以分开作为两门课程进行讲解。

本书由哈尔滨工业大学张晔编著,张钧萍、谷延锋、王立国、陈浩参加了部分编著工作。本书在撰写过程中,哈尔滨工业大学信息与通信工程学科博士研究生张晓峰、于珊珊、陈雨时、王爱丽、王晓飞等,硕士研究生张宝薇、贾友华、张莎莎、谈晓晔、栾宪锋、孔繁兴、薛莉等,以及李硕、唐辉、王磊、尹雪永、谢伟、颜靖华、蒋祥玉、张瞻靓、李一鹏、张坤、李娇、陈涛、和继兴等,都对作者的工作提供了有益的帮助,在此一并表示感谢。由于小波理论、时频分析及其应用发展较快,本书所应用的技术和方法不一定是最新手段,也难免有不合理及不足之处,敬请有关专家和学者批评指正,共同研究。

张 晔

2005年7月

目 录

引论	(1)
0.1 信号的时域表示	(2)
0.2 信号的频域表示	(3)
0.3 信号的时频分析	(3)
0.4 信号分析的典型特性	(4)
0.5 本书涉及的基本概念	(7)
0.6 本书符号表示	(8)

第一篇 小波变换

第一章 小波变换理论	(13)
1.1 Fourier 变换	(13)
1.2 短时 Fourier 变换	(14)
1.3 时宽、频宽和分辨率	(16)
1.4 连续小波变换	(18)
1.5 小波级数	(21)
1.6 离散小波变换	(22)
第二章 多分辨率分析及正交小波基	(24)
2.1 多分辨率分析原理	(24)
2.2 多分辨率分析	(26)
2.3 尺度函数	(27)
2.4 正交小波基	(30)
2.5 双正交小波基	(31)
2.6 二维正交小波基	(32)
2.7 正交小波函数的构造	(34)
2.8 典型的小波函数	(37)
第三章 信号/图像的多分辨率分解与重建	(44)
3.1 滤波器组与小波变换	(44)
3.2 信号/图像的金字塔分解与重建	(54)
3.3 信号/图像的小波分解与重建	(64)
第四章 小波包、多小波及第二代小波	(77)
4.1 小波包	(77)
4.2 多小波	(81)
4.3 第二代小波及信号分解与重建	(86)



第二篇 时频分布与分析

第五章 时频分析的基本概念	(93)
5.1 时频分析引论	(93)
5.2 信号的时间和频率表示	(97)
5.3 时频分布的一般理论	(104)
5.4 模糊函数	(111)
5.5 能量域和相关域时频分布	(115)
第六章 Wigner - Ville 时频分布设计的一般方法	(117)
6.1 Wigner - Ville 分布及性质	(117)
6.2 时频分布设计的一般方法	(127)
6.3 高阶时频分布	(142)
第七章 时变滤波及信号合成	(146)
7.1 基于时频分布的非线性滤波方法	(146)
7.2 线性时变滤波方法	(148)
7.3 子空间约束信号合成	(151)
7.4 基于 Wigner - Ville 分布的信号合成	(152)

第三篇 应 用

第八章 小波变换在图像数据压缩中的应用	(157)
8.1 图像数据压缩概念	(157)
8.2 基于 Laplacian 金字塔的图像压缩	(159)
8.3 基于小波分解的图像压缩	(163)
8.4 基于小波变换的 JPEG2000 压缩	(165)
第九章 信号的多分辨率边缘检测及噪声抑制	(170)
9.1 边缘检测原理	(170)
9.2 多分辨率边缘检测原理	(174)
9.3 多分辨率边缘检测方法	(176)
9.4 边缘检测中的噪声抑制	(178)
第十章 小波变换在遥感超光谱数据处理中的应用	(182)
10.1 遥感超光谱数据	(182)
10.2 遥感超光谱图像子空间分解	(184)
10.3 超光谱图像的多分辨率特征融合	(186)
10.4 基于超光谱图像融合的分类	(190)
参考文献	(194)

引 论

人们习惯把用于描述和记录消息的任何物理状态随时间变化的过程称为信号。由于信号表现为以时间为自变量,通常又称为函数,一般用 $f(t)$ 表示。对于各种信号,可以有不同的分类方法,如确定性信号与随机信号、周期信号与非周期信号、连续信号与离散信号、平稳信号与非平稳信号等。

所谓信号分析就是在时(间)域或变换域对信号进行分析处理的过程。信号分析最直接的方法就是在时域内对信号进行分析,其突出特点是方法简单、物理概念明确。然而,对于某些在时域很难分析、或特征不明显的信号,需要进行某种变换,典型的方法是 Fourier 变换,即在变换域进行分析。在信号变换域分析中,变换的目的就是寻求对信号的另外一种表示,使得比较复杂、特征不明显的信号在变换域更加明显,利于分析。

Fourier 变换及其反变换建立了时域信号和频域谱(变换域)的一对一关系,时域和频域构成了两种不同的信号分析方法。信号时域和频域分析可以截然分开是以信号的频率特性时不变或统计特性平稳为前提条件的。实际中的许多信号往往都表现出非平稳性,在这种情况下,时、频两域的分析便不能截然分开,而这种不完全可分性使得 Fourier 变换无能为力。另外 Fourier 变换在时域中没有任何分辨率,即 $F(\omega)$ 在任何有限频段上的信息均不足以刻画任意小范围内的 $f(t)$,也就是说经典的 Fourier 变换分析法在理论与实际应用中都受到一定的限制。

为了尽可能反映信号频域特性随时间的变化,工程中常采用两种方法:时窗法和频窗法。

(1) 时窗法:首先在时域把信号分成段,然后分别分析每一段的频率特性,例如短时 Fourier 变换及 Wigner - Ville 变换。

(2) 频窗法:首先对不同频带信号进行滤波,然后在时间上分解这些频带成为段,并分析它们的频率内容,例如小波变换。

在工程应用中,尽管这两种方法带来了许多便利,但仍然具有许多局限性。对于时窗法,若要求时间上分辨得越细致,则要求时窗越窄;而时窗越窄,其频域就变得越宽,则频域的分辨便越不细致。反之,对于频窗法,若要求频率上分辨得越细致,则要求带通滤波器的频带越窄。由于窄带滤波器的过滤过程的持续时间很长,故某一时刻下滤波器的输出不只是反映该时刻下输入的作用,而且也反映该时刻以前全部历史上所有作用的总效应,此时时域上的分辨更加模糊。这就是时间和频率测量上的测不准原理,因此在实际应用中要求在时间分辨率和频率分辨率之间进行折衷。

本书将要介绍的小波变换及时频分析的目的就是根据实际非平稳信号的特点,结合信号



的时、频特性,对其进行时频分析,以达到最佳的分析效果。

0.1 信号的时域表示

信号一般表示为时间变量的函数,它的最一般表示方法是借用于某个抽象的数学符号。然而,由于信号表示形式各不相同,不利于信号 $f(t)$ 之间的比较和分析,因此将信号表示为一组基本时间函数的线性组合,在数学上是比较方便的。这些基本时间函数简称为基函数,通过选择适当的基函数,可以使信号表示法得到统一的最一般的形式。

设所选择的基函数为 $\Phi_0(t), \Phi_1(t), \dots, \Phi_{N-1}(t)$, 其中 N 可以是无限大,任意信号 $f(t)$ 可以表示为这组基函数的线性组合

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \Phi_n(t) \quad (0.1)$$

这样要表示一个信号就变成如何选择最佳的基函数 $\{\Phi_n(t)\}$ 和确定相应的系数 a_n 。实际应用中的问题是,在什么条件下,式(0.1)更有意义。为此,设 $\hat{f}_N(t)$ 是用 N 项对 $f(t)$ 的一种近似,即

$$\hat{f}_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \Phi_n(t) \quad (0.2)$$

考虑近似误差的 L_2 范数

$$\|f(t) - \hat{f}_N(t)\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - \hat{f}_N(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (0.3)$$

一般定义在

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f(t) - \hat{f}_N(t)\|_2 = 0 \quad (0.4)$$

情况下,式(0.1)有意义。

如果我们有一组函数 $\{\Phi_n(t)\}$, 对函数空间 V 中的所有函数都可以像式(0.2)以任意精度近似,我们说这组函数在空间 V 中是完备的。进一步如果每个分量是线性独立的,那么 $\{\Phi_n(t)\}$ 是 V 的基。在所有可能的基中,正交基是特别希望的。此时,基函数都是相互正交的。归一化它们的范数为 1,即 $\|\Phi_n(t)\|_2 = 1, n \in I$, 正交基函数满足

$$\langle \Phi_i(t), \Phi_j(t) \rangle = \delta_{ij}(t) \quad (0.5)$$

对于正交基,式(0.1)变为

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f(t), \Phi_n^*(t) \rangle \Phi_n(t) \quad (0.6)$$

$$a_n = \langle f(t), \Phi_n^*(t) \rangle \quad (0.7)$$

这就是 $f(t)$ 在正交基 $\{\Phi_n(t)\}$ 上的分解展开表达式。

如果给定 $f(t)$ 在正交基 $\{\Phi_n(t)\}$ 上的表达式(0.7), 它到一个 N 维子空间



$\{\Phi_n(t)\}_{n=0,1,\dots,N-1}$ 上的正交投影定义表示为

$$\hat{f}_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \langle f(t), \Phi_n^*(t) \rangle \Phi_n(t) \quad (0.8)$$

式(0.8)就是在 N 维子空间上的投影来对 $f(t)$ 的线性近似。

对于基函数双正交情况,存在一个对偶基 $\{\tilde{\Phi}_n(t)\}$, 此时

$$\langle \tilde{\Phi}_i(t), \Phi_j(t) \rangle = \delta_{ij}(t) \quad (0.9)$$

式(0.1)变为

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f(t), \tilde{\Phi}_n^*(t) \rangle \Phi_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f(t), \Phi_n^*(t) \rangle \tilde{\Phi}_n(t) \quad (0.10)$$

0.2 信号的频域表示

在自然界中存在的信号并非纯单调信号,而是其“频率内容”随时间变化的信号。一般来讲,频率定义为一种现象,即一个信号的零交叉周期对所有时间具有固定宽度,而频率与周期密切相关。因此信号一般除了用时间作自变量表示外,通过 Fourier 变换,信号也可以表示为不同频率分量,即信号也可以使用频率作为自变量来表示,称之为频谱。这样,人们可以将信号的频率内容作为时间或信号宽度的函数变化来定义“瞬时频率”。例子之一就是语音信号,瞬时频率可以从 20 Hz 到 20 kHz 变化。

信号 $f(t)$ 的 Fourier 变换定义为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (0.11)$$

Fourier 变换的反变换定义为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (0.12)$$

虽然 Fourier 变换建立了时间和频率两个域之间的关系,但它并不能将二者结合。对于时间信号 $f(t)$,其频谱 $F(\omega)$ 只是反映信号 $f(t)$ 在某一频率分量 ω 的振幅和相位,而不能指示信号各频率分量随时间变化的规律。特别是,大多数时间信息在频域不容易理解。而频谱 $F(\omega)$ 表示任何频率 ω 在信号 $f(t)$ 中具有的整体强度,它一般不能提供关于频谱成分的时间局部化的信息解释。

纵观信号的时域和频域的分析方法,它们各有优点,但也存在着一定的问题,应用受到一定限制。因此其最佳方案是将时、频两域结合起来对信号加以描述和分析。

0.3 信号的时频分析

信号时频分析是把一维的时间信号映射成二维的时间和频率的函数。信号时频分析的基



本思想是设计时间和频率的联合函数,用它同时描述信号在不同时间和不同频率的能量密度或强度。时间和频率的这种联合函数也称为时频表示或时频分布。基于时频表示或时频分布的信号分析统称为时频(信号)分析,它是时域分析和频域分析的自然推广。

在时频分析中,最典型的方法就是短时 Fourier 变换(STFT, Short Time Fourier Transform)和小波变换。它们的能量在时域上非常集中,而它们的频谱主要集中在有限的频率范围内,即它们可以表示时频平面上某个区域的信息,而该区域的位置与宽度完全依赖于其基函数的选择。

由于信号的时频分析是本书以后各章要重点介绍的内容,这里就不再过多地论述。

0.4 信号分析的典型特性

为了以后各章分析方便,本节将对本书所涉及的信号分析的典型特性进行介绍。

0.4.1 卷积及卷积定理

卷积是一种数学运算方法。设信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 具有相同的自变量 t , 将 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 经如下的积分可以得到第三个相同自变量的函数 $f(t)$, 即

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (0.13)$$

此积分称为卷积积分,用符号 $*$ 表示。因此式(0.13)可表示为

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \quad (0.14)$$

对于离散序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$, 其卷积 $y(n)$ 可以表示为

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) x_2(n - m) \quad (0.15)$$

若信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的频谱分别定义为 $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$, 即 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$, 则卷积定理定义为

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (0.16)$$

即两个信号在时域中的卷积,等效于在频域中两个信号 Fourier 变换的乘积。

0.4.2 平移和尺度

对于函数 $f(t)$, 若有平移因子 τ , 则平移操作定义为

$$f(t) \rightarrow f(t \pm \tau) \quad (0.17)$$

若 $a > 0$ 为尺度因子, 则尺度操作定义为

$$f(t) \rightarrow f(at) \quad (0.18)$$

如果 $a > 1$, 则 $f(t)$ 被压缩; 如果 $a < 1$, 则 $f(t)$ 被展宽。信号的平移和尺度的示意图如图 0.1 所示。

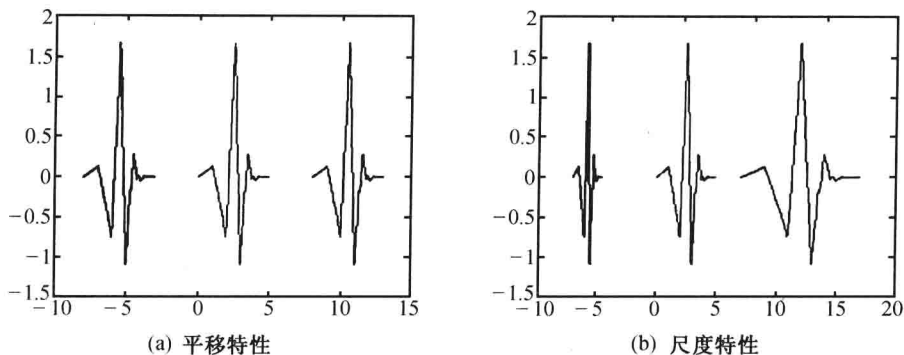


图 0.1 信号的平移和尺度

0.4.3 尺度特性

信号的尺度特性定义如下。

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad a \neq 0 \quad (0.19)$$

尺度特性表明: 信号在时域压缩 ($a > 1$) 等效于在频域中扩展; 反之, 信号在时域扩展 ($a < 1$) 等效于在频域中压缩, 如图 0.2 所示。

0.4.4 分辨率

与尺度概念相关但却不同的概念是分辨率。一个信号的分辨率与它的带宽有关, 可以认为是等效连续时间函数的带宽, 对于超取样的信号并不比严格按取样定理取样的信号有更高的分辨率。如果对一个信号低通滤波, 则其尺度保持不变, 但降低了分辨率。连续信号的尺度变化并不改变其分辨率, 因为尺度可以反变换。但是, 对于离散时间信号, 降低分析尺度将包括再取样, 这就自动减小分辨率; 但提高尺度, 包括超取样, 并不能改变其分辨率。我们以尺度为 2 的整数幂变化为例, 来看分辨率的变化情况, 具体为两种基本的尺度算子运算。

插值算子 E_j (超尺度): 离散时间等效于扩展

$$x(n) \rightarrow x(n/2) \quad (0.20)$$

选抽算子 A_j (降尺度): 离散时间等效于压缩

$$x(n) \rightarrow x(2n) \quad (0.21)$$

应用式(0.20)和式(0.21)到信号 $x(n)$, 有

$$y(n) = E_j[x(n)] = \sum_k x(k)h(n-2k) \quad (0.22)$$

$$y(n) = A_j[x(n)] = \sum_k x(k)h(2n-k) \quad (0.23)$$

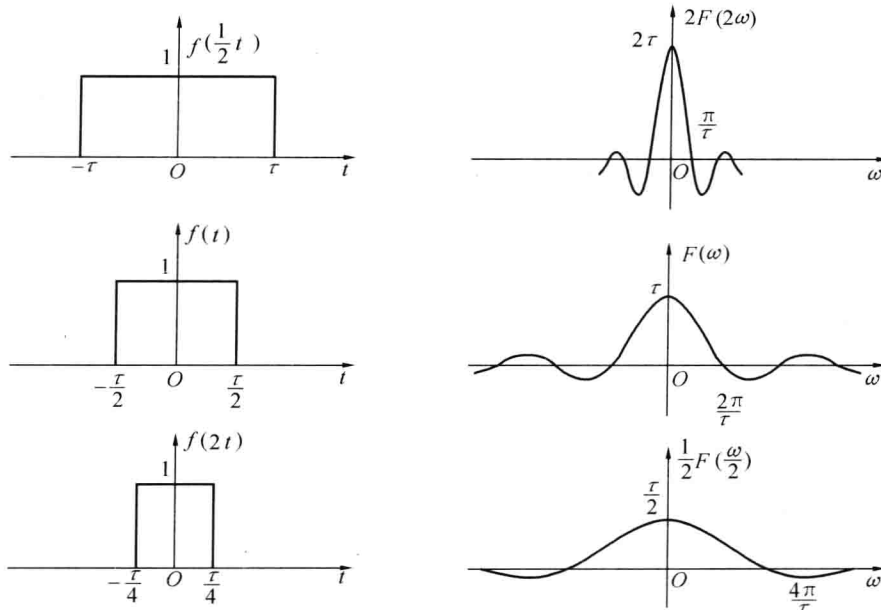


图 0.2 信号的尺度特性

其中 $h(n)$ 为半带低通滤波器的冲激响应。

由式(0.22)和式(0.23),我们可以在二进网格 $s = 2^{-j} (j \in \mathbf{Z})$ 上计算原信号 $x(n)$ 的各种尺度。但总的原则是,超尺度算子 E_j 加倍尺度,而降尺度算子 A_j 则二分尺度。由于滤波器 $h(n)$ 在每个尺度上相同,所以所有尺度变换都是相同的。但在某一尺度 s 下,对一个信号的尺度运算并不是惟一的。

为了表征在相同尺度下的不同信号,可利用分辨率的概念。直观上,在一定的尺度下信号包含的信息越多,其分辨率就越高,对于不同的尺度 $s = 2^{-j}$,分辨率 r 可理解是 $x(n)$ 以 2^j 周期取样的信号,其分辨率为 $r = 2^{-j} (j \geq 0)$ 。例如,若 $x(n)$ 本身的尺度为 1,其降尺度 $A_1[x(n)]$ 的尺度为 $1/2$,分辨率也为 $1/2$ 。一般信号的分辨率不能超过它的尺度,即

$$r \leq s \quad (0.24)$$

离散时间信号中的尺度和分辨率的关系如图 0.3 所示。当对信号 $x(n)$ 降尺度时,尺度和分辨率都减半;当对一个信号 $x(n)$ 超尺度时,分辨率并不增加,也就是说,简单地放大一个信号,并不

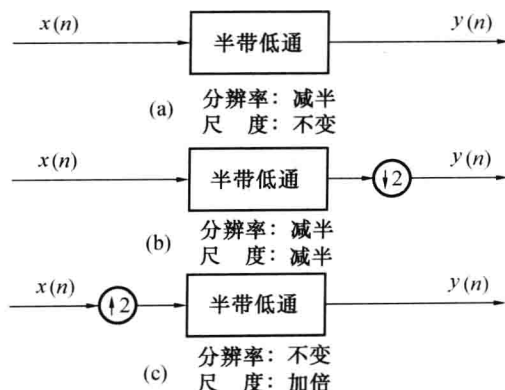


图 0.3 离散情况的分辨率和尺度的变化