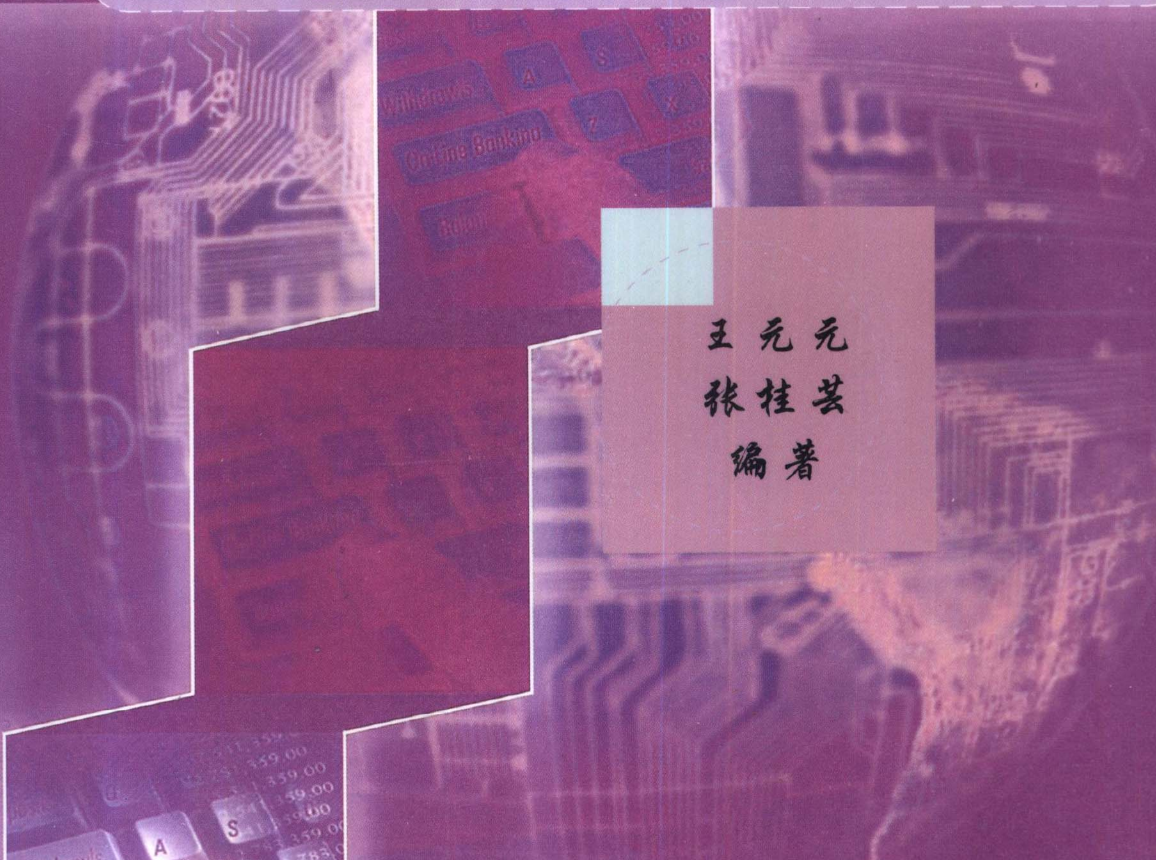
离散数学导论

王元元
张桂芸
编著



科学出版社

离 散 数 学 导 论

王元元　张桂芸 编著

科 学 出 版 社

2002

内 容 简 介

本书内容是按照国家教委离散数学教学大纲要求并参考 IEEE&ACM 的 CC2001 教程编排的，是作者在原著《离散数学》(1994 年，科学出版社)的基础上修改而成的。本书包括离散数学四大分支的基础理论：数理逻辑、图论、集合论、抽象代数学。它既注重离散数学内容本身的系统完善，同时又注重与计算机科学的密切联系，具有结构合理、内容系统、阐释新颖的特点。本书取材详略得当，叙述清楚流畅，论证科学严谨，释例、练习精选独到，力求科学性、应用性、工具性和可读性的完美统一。本书附教学用光盘一张，其内容包括课堂教学辅助软件和课外自学辅助软件。

本书可作为高等院校计算机专业及相关专业本科生、专科生的离散数学教材和教学参考书，也可作为计算机软硬件研究开发者和应用人员的学习用书，以及大学毕业生考研复习用书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学导论/王元元等编著. —北京：科学出版社，2002
ISBN 7-03-003993-9

Ⅰ. 离… Ⅱ. 王… Ⅲ. 离散数学-高等学校-教材 Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 091112 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社总发行 各地新华书店经销
*
2002 年 2 月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2002 年 2 月第一次印刷 印张:18 1/4
印数:1—4 000 字数:456 000

定价:32.00 元(含光盘)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　　言

离散数学是研究离散数量关系和离散结构数学模型的数学分支的统称。

“离散”与“连续”是数量关系中一对极为深刻的矛盾，它们之间的对立与统一是数学发展的重要动力之一。“离散”是“连续”的否定，即“不连续”；“连续”则是指事物、数量的一种属性，这种属性使它们容易被分割或结合，并且不会因此而丧失它们原有的本性。例如，实数是连续的，整数则是离散的；马铃薯是离散的，而马铃薯羹则是连续的。

古代数学主要讨论整数、整数的比（有理数），它甚至（德莫克利特）把几何图形也看作是由很多孤立的“原子”组成的。因而，那时数学被看作是研究离散的或离散化了的数量关系的科学。

随着数学理论的不断发展（不可通约线段的发现，对无限概念的深入探讨），同时由于处理离散数量关系的数学工具在刻画物体运动方面无能为力，近代出现了连续的数量概念——实数，出现了处理连续数量关系的数学工具——微积分。因此，近代数学主要研究连续数量关系及其数学结构、数学模型，并且取得了极其辉煌的成果。近代数学的这一特征，一直延续至今，仍在现代数学中占据支配地位。

然而，近50年来，数字电子计算机的飞速发展与广泛应用，极大地冲击了现代数学。由于数字电子计算机是一个离散结构，它只能处理离散的或离散化了的数量关系，因此，无论计算机科学本身，还是与计算机科学及其应用密切相关的现代科学研究领域，都面临这样一些问题：如何高速、有效地处理离散的对象和离散的数量关系，如何对离散结构建立离散数学模型，又如何将已用连续数量关系建立起来的数学模型离散化，从而可由计算机加以处理。于是，人们开始重新认识离散数量关系的研究意义，重新重视讨论离散数量关系的数学分支，并取得新的发展。离散数学学科的出现和发展是上述事实的逻辑结果。

离散数学课程是介绍离散数学各分支的基本概念、基本理论和基本研究方法、研究工具的基础课程，业已成为计算机科学与技术专业的核心基础课程，IEEE&ACM 的 CC2001[1]教程更是以十分显著的方式强调了这一点。离散数学课程所涉及的概念、方法和理论，大量地应用在数字电路、编译原理、数据结构、操作系统、数据库系统、算法的分析与设计、软件工程、人工智能、多媒体技术、计算机网络等专业课程以及信息管理、信号处理、模式识别、数据加密等相关课程中；它所提供的训练十分有益于学生概括抽象能力、逻辑思维能力、归纳构造能力的提高，十分有益于学生严谨、完整、规范的科学态度的培养。这些能力与态度是一切软、硬件计算机科学工作者所不可缺少的。离散数学课程所传授的思想和方法广泛地体现在计算机科学技术及相关专业的诸领域，从科学计算到信息处理，从理论计算机科学到计算机应用技术，从计算机软件到计算机硬件，从人工智能到分布式系统，无不与离散数学密切相关。（例如：理论的和现实的可计算性研究，新的软件理论的发现和新的程序设计方法的提出，人工智能系统的研制与新一代计算机的探索等。）因此，就像20世纪30年代图灵机的提出为现代计算机奠定基础一样，未来计算机系统的创新也取决于人类对离散结构、计算（包括思维与推理）模型的研究取得新的突破。

计算机技术作为当今信息社会信息技术的核心，已经成为知识经济最强有力的技术支持，成为人们在工作、学习和生活中获取信息、处理信息、运用信息的重要工具。众所周知，

计算机求解的基本模式是：

实际问题 ⇒ 数学建模 ⇒ 算法设计 ⇒ 编程实现

那么，为数学建模打下知识基础、为算法设计提供具体指导的离散数学，理所当然地与我们发生越来越密切的关系。它还不断地走入物理、化学、生物等自然科学以及经济、教育等社会科学中，获得日益广泛的应用。有人预计，未来社会将有越来越多的人学习离散数学，就像当今人们学习微积分教程一样。

本书内容包括离散数学四大分支的基础理论，它们是数理逻辑、集合论、图论和抽象代数学。考虑到组合论、可计算性理论常被独立选作计算机科学与技术专业的专业基础课，本书没有涉及。本书对数理逻辑理论、函数概念及代数结构内容的强化和系统化，是区别于其它同类书籍的鲜明特点，从而在内容上具有新颖性。它既注重了离散数学内容本身的系统与完善，同时又注重与计算机专业的密切联系。它关注基础与能力的结合、理论与实践的结合、当前与未来的结合、专业与普及的结合。全书具有结构合理、内容系统、阐释新颖的特点。作者努力做到：取材详略得当，叙述清楚流畅，论证科学严谨，释例、练习精选独特。因此，本书具有较好的科学性、应用性、工具性和可读性。本书的学习不仅为计算机专业的学生学习专业后继课程打下扎实的理论基础，也为他们未来的专业发展提供必要的理论储备；同时，本书的学习也必将提升和丰富读者的数学基本素养和深刻的数学思维底蕴。

本书内容是按照国家教委离散数学教学大纲要求并参考 IEEE&ACM 的 CC2001 教程编排的，是作者在科学出版社出版的拙著《离散数学》（1994 年）教材及多年教学实践的基础上修改而成的。因此本书可作为高等院校计算机科学技术专业及相关专业本科生、专科生的离散数学教材和教学参考书，同时也可作为计算机软硬件研究开发者和应用人员学习用书，以及大学毕业生考研复习用书。使用时可根据不同需要，考虑删选带“＊”和“△”标记的章、节及习题。全书包含了大约可在 120 个学时内讲授的内容；如果删除标记“＊”的章、节，那么可以在 90～100 学时内完成教学计划；如果全部或部分地删除标记“＊”和“△”的章、节，那么可以在 60～80 学时内讲授完毕。每节末编排了丰富的习题，难度有一定的层次，并按其涉及的主题对应地标记了“＊”或“△”。这是为了适应目前高校普遍兼有多层次教学目标的状况，以及各校离散数学课程教学时数高低悬殊的现状。这是本书的又一个显著特点。

本书附教学用光盘一张，其内容包括：(1)课堂教学辅助软件，(2)课外自学辅助软件。另外还将配套出版辅导教材《离散数学解题指导》，旨在对本书的全部习题给予详尽的分析和解答，以及解题方法的指导。

限于作者水平，书中错误之处在所难免，敬请读者指正。

作　者

2001 年 11 月

目　　录

第一篇　数理逻辑

第二篇　集　合　论

第三篇 图 论

第四篇 抽象代数

第一篇　数理逻辑

第一章　命题演算及其形式系统

逻辑学(logic)在我国旧称“名学”,也称“论理学”,是研究人类推理过程的科学,而数理逻辑(mathematical logic)则是用数学的方法来进行这一研究的一个数学学科,其显著特征是符号化和形式化,即把逻辑所涉及的“概念、判断、推理”用符号来表示,用公理体系来刻画,并基于符号串形式的演算来描述推理过程的一般规律,因此数理逻辑又称符号逻辑、现代逻辑。

虽然在17世纪莱布尼兹(Leibniz)已经提出仿数学的方法发展逻辑的思想,但由于社会条件等原因,近半个多世纪数理逻辑才开始得以迅速发展。1930年,哥德尔(Gödel)完全性定理的证明完善了数理逻辑基础,建立了逻辑演算,并在此基础上发展出公理集合论、证明论、模型论和递归论四个分支,成为现代科学特别是计算机科学不可缺少的基础理论之一。数理逻辑为机器证明、人工智能、程序设计自动化等计算机科学的应用和研究,提供了必要的理论基础。

在传统的形式逻辑中,先讨论概念,后讨论判断(即命题),再讨论推理,这是因为概念组成判断,判断又组成推理。但是,这未必是一种好的次序安排。事实上,如果我们把推理作为研究的根本目标,先忽略判断的细节——概念,把判断看作不可分的整体——命题来讨论,也就是以命题演算入手,那么更便于对推理规律进行分析;而在此基础上,再引入概念的形式表示——谓词,讨论概念、关系的理论——谓词演算,把推理的研究引向更加深刻的层次,其内容编排就显得格外顺理成章。本章的阐述正是遵循这一次序,先讨论命题、命题演算及其形式系统。

1.1　命题与联结词

1.1.1　命题

我们把对确定的对象作出判断的陈述句称作**命题**(propositions 或 statements),当判断正确或符合客观实际时,称该命题**真**(true),否则称该命题**假**(false)。“真、假”常被称为命题的**真值**。古典逻辑认为,命题或真或假,但不兼而有之(我们也作此约定),这就是逻辑学的一个基本假设——排中律。非经典逻辑,如直觉主义逻辑、多值逻辑不接受排中律,本书不作讨论,我们确认排中律。

例1.1　考虑下列语句:

(1)雪是白的。

(2)$2+2=5$

(3)2是偶数且3也是偶数。

(4)陈胜、吴广起义那天杭州下雨。

(5)第 28 届奥林匹克运动会开幕时北京天晴。

(6)大于 2 的偶数均可分解为两个质数的和(哥德巴赫猜想)。

(7)真舒服啊!

(8)您去学校吗?

(9)$x+y<0$

(10)我说的这句话(例 1.1 之(10))假。

显然(1),(2),(3)都是命题,(1)为真命题,(2),(3)为假命题。事实上(4),(5),(6)也是命题,虽然它们的真值未必在现在或将来可以得知,但它们所作判断是否符合客观实际这一点是确定的。

(7),(8)不是陈述句,因此它们都不是命题。(9)也不是命题,因为通常 x,y 表示变元,它们不是确定的对象,从而(9)没有确定的真值。只有当 x,y 取得确定的值时,(9)才成为命题,才有相应的真值。

(10)不是命题,因为它是一个悖论,即一种病态的语句,我们不承认此类语句为陈述句。由于(10)对本身的真假作了否定的判断,从而使对(10)真值的判定变得没有意义了。当判定(10)真时,(10)对本身的判断成立,即(10)假;当判定(10)假时,(10)对本身的判断则不成立,即(10)真。

我们注意到,命题(1)~(6)中的(3)与其它命题不同,(3)实际上是由两个命题与一个联结词“且”所组成的。命题(3)的真值不仅依赖于这两个组成它的命题,而且还依赖于这个联结词的意义。像这样的联结词称为**逻辑联结词**(logical connectives)。通常把不含有逻辑联结词的命题称为**原子命题**或**原子**(atoms),而把由原子命题和逻辑联结词共同组成的命题称为**复合命题**(compositive propositions)。

例 1.2 下列命题都是复合命题,其中楷体字为逻辑联结词:

(1)雪*不是*白的(*并非*雪是白的)。

(2)今晚我看书*或者*去看电影。

(3)你去了学校,我去了工厂(省略了逻辑联结词“且”)。

(4)*如果*天气好,*那么*我去接你。

(5)偶数 a 是质数,*当且仅当* $a=2$(a 是常数)。

在形式化表示中,原子命题通常记为 p,q,r,s 等小写拉丁字母。f 表示恒假命题,t 表示恒真命题。

1.1.2 联结词

今后“联结词”一词均指逻辑联结词及其符号表示。重要的联结词有 5 个,它们已在例 1.2 中出现。

否定词(negation)“并非”(not),用符号$\neg$ 表示。设 p 表示一命题,那么$\neg p$ 表示命题 p 的否定。p 真时$\neg p$ 假,而 p 假时$\neg p$ 真。$\neg p$ 读作“并非 p”或“非 p”。今后我们用 1 表示真值“真”,用 0 表示真值“假”,用类似表 1.1 的所谓真值表来规定联结值的意义,描述复合命题的真值状况。表 1.1 规定了否定词$\neg$ 的意义,表示$\neg p$ 的真值状况。

表 1.1

p	$\neg p$
0	1
1	0

表 1.2

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.3 如果 p 表示命题“雪是白的”，那么“并非雪是白的”、“雪不是白的”应表示为 $\neg p$，此时 $\neg p$ 为假，因为 p 为真。

当用否定词“并非”代替自然语言中的“不”时（或者反过来），应注意保持原语句的意义。例如 p 表示“我们都是好学生”时，$\neg p$ 表示“并非我们都是好学生”或“我们不都是好学生”，而不是“我们都不是好学生”。

合取词(conjunction)“并且”(and)，用符号 $\wedge$ 表示。设 p,q 表示两命题，那么 $p \wedge q$ 表示合取 p 和 q 所得的命题，即 p 和 q 同时为真时 $p \wedge q$ 真，否则 $p \wedge q$ 为假。$p \wedge q$ 读作“p 并且 q”或“p 且 q”。

合取词 $\wedge$ 的意义和命题 $p \wedge q$ 的真值状况可由表 1.2 来刻画。

例 1.4 如果 p 表示命题“你去了学校”，q 表示命题“我去了工厂”，那么 $p \wedge q$ 表示命题“你去了学校并且我去了工厂”。$p \wedge q$ 为真，当且仅当你、我分别去了学校和工厂。

析取词(disjunction)“或”(or)用符号 $\vee$ 表示。设 p,q 表示两命题，那么 $p \vee q$ 表示 p 和 q 的析取，即当 p 和 q 有一为真时 $p \vee q$ 为真，只有当 p 和 q 均假时 $p \vee q$ 为假。$p \vee q$ 读作“p 或者 q”、“p 或 q”。

析取词 $\vee$ 的意义及复合命题 $p \vee q$ 的真值状况由表 1.3 描述。

表 1.3

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表 1.4

p	q	$p \overline{\vee} q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

例 1.5 如果 p,q 分别表示“今晚我看书”和“今晚我去看电影”，那么 $p \vee q$ 表示“今晚我看书或者去看电影”。当我于当晚看了书，或者看了电影，或者既看了书又看了电影时，$p \vee q$ 为真，只是在我既不看书也不看电影时 $p \vee q$ 为假。

值得注意的是，这里的“或”是所谓可兼的，即当 p 和 q 均真时，确认 $p \vee q$ 为真。在日常生活中，“或”在有的场合下不同于上述意义。例如“人固有一死，或重于泰山，或轻于鸿毛”。其中的“或”是不可兼的，即当发现有人的死既重于泰山又轻于鸿毛时，上述论断被认为假。看来这里的“或”用 $\vee$ 表示不合适，可用表 1.4 规定的新联结词“不可兼或” $\overline{\vee}$ 表示之。但是，像上述场合一样的许多场合下，两个析取命题事实上不可能同时为真，即表 1.4 的末行根本无需定义，这时用 $\vee$ 代替 $\overline{\vee}$ 就没有问题，并且能使语句的表示简化。例如“$a>0$

或 $a=0$ 或 $a<0$”可表示为“$a>0 \vee a=0 \vee a<0$”，而不必多此一举地表示为“$a>0 \overline{\vee} a=0 \overline{\vee} a<0$”。

蕴涵词(implication)“如果……，那么……”(if... then...)，用符号→表示。设 p,q 表示两命题，那么 $p \to q$ 表示命题“如果 p，那么 q”。当 p 真而 q 假时，命题 $p \to q$ 为假，否则均认为 $p \to q$ 为真。$p \to q$ 中的 p 称为**蕴涵前件**，q 称为**蕴涵后件**。$p \to q$ 的读法较多，可读作“如果 p 则 q”，“p 蕴涵 q”，“p 是 q 的充分条件”，“q 是 p 的必要条件”，“q 当 p”，“p 仅当 q”等等。数学中还常把 $q \to p$，$\neg p \to \neg q$，$\neg q \to \neg p$ 分别叫做 $p \to q$ 的**逆命题**、**否命题**、**逆否命题**。

蕴涵词→的意义及复合命题 $p \to q$ 的真值状况规定见表 1.5。

表 1.5

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

表 1.6

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.6 如果用 p 表示“天气好”，q 表示“我去接你”，那么 $p \to q$ 表示命题“如果天气好，那么我去接你”。当天气好时，我去接了你，这时诺言 $p \to q$ 真；我没去接你，则诺言 $p \to q$ 假。当天气不好时，我无论去或不去接你均未食言，此时认定 $p \to q$ 为真是适当的。

上述规定的蕴涵词称为**实质蕴涵**(substantive implication)，因为它不要求 $p \to q$ 中的 p,q 有什么关系，只要 p,q 为命题，$p \to q$ 就有意义。例如“如果 $2+2=5$，那么雪是黑的”，就是一个有意义的命题，且据定义其真值为“真”。蕴涵词的这种规定形式，在讨论数学问题和逻辑问题时是正确的、充分的，但在某些情况下显得有些不足，为此不少人对其它规定形式的蕴涵词有兴趣，对此本书不作介绍。

双向蕴涵词(two-way implication)“当且仅当”(if and only if)，用符号↔表示之。设 p,q 为两命题，那么 $p \leftrightarrow q$ 表示命题“p 当且仅当 q”，“p 与 q 等价”，即当 p 与 q 同真值时 $p \leftrightarrow q$ 为真，否则为假。$p \leftrightarrow q$ 读作“p 双向蕴涵 q”，“p 当且仅当 q”，“p 等价于 q”。由于“当且仅当”“等价”常在其它地方使用，因而用第一种读法更好些。

双向蕴涵词的意义及 $p \leftrightarrow q$ 的真值状况由表 1.6 给出。

例 1.7 如果 p 表示命题“$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$”，$q$ 表示命题“$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的三边对应相等”，那么 $p \leftrightarrow q$ 表示平面几何中的一个真命题，因为 p 真时 q 显然真，p 假时 q 亦必然假，故 p 与 q 同真值。若 q 表示命题“$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的三内角对应相等”，那么 $p \leftrightarrow q$ 不再是恒真的了，因 p 假时 q 未必为假。

以上介绍的是五个最常用、最重要的联结词，自然语言中还有其它联结词，有的可以直接用它们中的一个来表示，例如“也”等同于“且”，“除非……否则……”等同于“当且仅当”；有的则可以用它们中的若干个来表示，例如“不可兼或”可用 $\vee$，$\wedge$ 与 $\neg$ 来表示，关于这一点我们要在下一节中细谈。

1.1.3 命题公式及其真值表

我们把表示具体命题及表示常命题的 p,q,r,s 等与 f，t 统称为**命题常元**(proposition constants)。深入的讨论还需要引入**命题变元**(proposition variables)的概念,它们是以"真、假"或"1,0"为取值范围的变元,为简单计,命题变元仍用 p,q,r,s 等表示。相同符号的不同意义,容易从上下文来区别,在未指出符号所表示的具体命题时,它们常被看作变元。

命题常元、变元及联结词是形式描述命题及其推理的基本语言成分,用它们可以形式地描述更为复杂的命题。下面我们引入高一级的语言成分——命题公式。

定义 1.1 以下三条款规定了**命题公式**(proposition formula)的意义:

(1)命题常元和命题变元是命题公式,也称为原子公式或原子。

(2)如果 A,B 是命题公式,那么$(\neg A),(A\wedge B),(A\vee B),(A\rightarrow B),(A\leftrightarrow B)$也是命题公式。

(3)只有有限步引用条款(1),(2)所组成的符号串是命题公式。

命题公式简称公式,常用大写拉丁字母 A,B,C 等表示。公式的上述定义方式称为**归纳定义**,第四章将对此定义方式进行讨论。

例 1.8 $(\neg(p\rightarrow(q\wedge r)))$是命题公式,但$(qp)$,$p\rightarrow r$,$p_1\vee p_2\vee\cdots$均非公式。

为使公式的表示更为简练,我们作如下约定:

(1)公式最外层括号一律可省略。

(2)联结词的结合能力强弱依次为

$$\neg,(\wedge,\vee),\rightarrow,\leftrightarrow$$

$(\wedge,\vee)$表示$\wedge$与$\vee$平等。

(3)结合能力平等的联结词在没有括号表示其结合状况时,采用左结合约定。

例如,$\neg p\rightarrow q\vee(r\wedge q\vee s)$ 所表示的公式是

$$((\neg p)\rightarrow(q\vee((r\wedge q)\vee s)))$$

如果公式 A 含有命题变元$p_1,p_2,\cdots,p_n$,记为 $A(p_1,\cdots,p_n)$,并把联结词看作真值运算符,那么公式 A 可以看作是$p_1,\cdots,p_n$ 的真值函数。对任意给定的 $p_1,\cdots,p_n$ 的一种取值状况,称为**指派**或**赋值**(assignments),用希腊字母 α,β 等表示,A 均有一个确定的真值。当 A 对取值状况 α 为真时,称指派 **α 弄真 A**,或 α 是A 的成真赋值,记为 $\alpha(A)=1$;反之称指派 **α 弄假 A**,或 α 是A 的成假赋值,记为 $\alpha(A)=0$。对一切可能的指派,公式 A 的取值可用像表 1.7 那样的真值表来描述。当 $A(p_1,\cdots,p_n)$中有 k 个联结词时,公式 A 的真值表应为 2^n 行、$k+n$ 列(不计表头)。

例 1.9 作出公式$\neg(p\rightarrow(q\wedge r))$的真值表。

表 1.7

p	q	r	$q\wedge r$	$p\rightarrow(q\wedge r)$	$\neg(p\rightarrow(q\wedge r))$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0

表 1.7 即为所求。可见指派(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1)及(1,1,1)均弄假该公式,而指派(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0)都弄真这一公式。

1.1.4 语句的形式化

用我们已有的符号语言,可以将许多自然语言语句形式化。在这一小节里,我们用一些例子来说明,如何将语句形式化,以及如何理解形式化了的语句。

例 1.10 将下列语句形式化,并表示为命题公式:

(1)我和他既是兄弟又是同学。

可表示为 $p \wedge q$,其中

p:我和他是兄弟,q:我和他是同学。

(2)我和他之间至少有一个要去边疆。

可表示为 $p \vee q$,其中

p:我去边疆,q:他去边疆。

(3)狗急跳墙。

可表示为 $p \to q$,其中

p:狗急了,q:狗跳墙。

(4)除非他来,否则我不同他和解。

可表示为 $p \leftrightarrow q$,或$(p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$,其中

p:他来,q:我与他和解。

(说明:有的学者认为此句应表示为:$q \to p$,亦无不可。对自然语言“除非……否则……”的理解,仁者见仁,智者见智。)

(5)如果他不来,那么他或者是生病了,或者是不在本地。

可表示为$\neg p \to (q \vee \neg r)$,其中

p:他来,q:他生病,r:他在本地。

(6)如果你和他不都是傻子,那么你们俩都不会去自讨没趣。

可表示为$\neg (p \wedge q) \to (\neg r \wedge \neg s)$,其中

p:你是傻子,q:他是傻子,

r:你会去自讨没趣,s:他会去自讨没趣。

(7)风雨无阻,我去上学。

可表示为$(p \wedge q \to r) \wedge (p \wedge \neg q \to r) \wedge (\neg p \wedge q \to r) \wedge (\neg p \wedge \neg q \to r)$,其中

p:天刮风,q:天下雨,r:我去上学。

从上述例子可以看出,语句形式化要注意以下几个方面:

①要善于确定原子命题,不要把一个概念硬拆成几个概念,例如“弟兄”是一个概念,不要拆成“弟”和“兄”、“我和他是弟兄”是一个原子命题。

②要善于识别自然语言中的联结词(有时它们被省略)。例如“风雨无阻,我去上学”一句,可理解为“不管是否刮风、是否下雨我都去上学”。

③否定词的位置要放准确,例如例 1.10 之(6)。

④需要的括号不能省略,如例 1.10 之(7);而可以省略的括号,在需要提高公式可读性时亦可不省略,如例 1.10 之(5),(6)。

⑤另外要注意的是,语句的形式化未必是惟一的,如例 1.10 之(7),它还可以表示为

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$

意指“四种情况必居其一,而每种情况下我都去上学”。它甚至可以更简单地表示为 r,意指“我去上学,不受其它因素的影响”。读者不久便会明白这些表示的逻辑等价性,即它们实质的意义是一致的。

例 1.11 设 p 表示“α 是偶数”,q 表示“α 是奇数”,r 表示“α 是质数”,s 表示“$\alpha=2$”,那么,可如下理解各命题公式:

(1)$p \vee q$(α 是偶数或 α 是奇数)

(2)$p \wedge r \rightarrow s$(若 α 是偶质数,则 $\alpha=2$)

(3)$r \wedge \neg s \rightarrow q$(若 α 是不等于 2 的质数,则 α 为奇数)

(4)$\neg q \wedge \neg s \rightarrow \neg r$(若 α 不是奇数且 $\alpha \neq 2$,则 α 不是质数)

(5)$\neg(q \vee s) \rightarrow \neg r$(若“$\alpha$ 是奇数与 $\alpha=2$ 之一真”不能成立,则 α 非质数)

(6)$r \leftrightarrow q \vee s$($\alpha$ 是质数当且仅当 α 是奇数或 $\alpha=2$)

练习 1.1

1. 判断下列语句是否是命题,若是命题则请将其形式化:

(1)$a+b$

(2)$x>0$

(3)“请进!”

(4)所有的人都是要死的,但有人不怕死。

(5)我明天或后天去苏州。

(6)我明天或后天去苏州的说法是谣传。

(7)我明天或后天去北京或天津。

(8)如果买不到飞机票,我哪儿也不去。

(9)只要他出门,他必买书,不管他余款多不多。

(10)除非你陪伴我或代我雇辆车子,否则我不去。

(11)只要充分考虑一切论证,就可得到可靠见解;必须充分考虑一切论证,才能得到可靠见解。

(12)如果只有懂得希腊文才能了解柏拉图,那么我不了解柏拉图。

(13)不管你和他去不去,我去。

(14)侈而惰者贫,而力而俭者富。(韩非:《韩非子·显学》)

(15)骐骥一跃,不能十步;驽马十驾,功在不舍;锲而舍之,朽木不折;锲而不舍,金石可镂。(荀况:《荀子·劝学》)

2. 判定下列符号串是否为公式,若是,请给出它的真值表,并请注意这些真值表的特点(公式中省略了可以省略的括号):

(1)$\neg(p)$(p 为原子命题)

(2)$(p \vee qr) \rightarrow s$

(3)$(p \vee q) \rightarrow p$

(4)$p \rightarrow (p \vee q)$

(5)$\neg(p \vee \neg p)$

(6)$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$

(7)$p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$

(8)$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

(9)$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg q \wedge \neg p$

(10)$\neg p \vee q \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

(11)$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

(12)$(p \vee q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$