

K. H. FASOL / P. VINGRON

Synthese industrieller Steuerungen

Kombinatorische Schaltungen,
Speicherschaltungen,
asynchrone sequentielle Schaltungen

Mit 174 Abbildungen
und 29 Tabellen

R. OLDENBOURG VERLAG MÜNCHEN WIEN



TP273
F1

7660999

Synthese industrieller Steuerungen

Kombinatorische Schaltungen,
Speicherschaltungen,
Asynchrone sequentielle Schaltungen

von

Karl Heinz Fasol und Peter Vingron

Mit 174 Abbildungen und 29 Tabellen



E7660999



R. OLDENBOURG VERLAG MÜNCHEN WIEN

1975

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

FASOL, KARL HEINZ

Synthese industrieller Steuerungen: kombinator.
Schaltungen, Speicherschaltungen, asynchrone
sequentielle Schaltungen / von Karl Heinz Fasol
u. Peter Vingron.

ISBN 3-486-34641-5

NE: Vingron, Peter:

© Copyright 1975 by R. Oldenbourg Verlag GmbH, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es auch nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“, 582 Bad Langensalza

Printed in GDR

ISBN: 3-486-34641-5

K. H. FASOL / P. VINGRON

SYNTHESE INDUSTRIELLER STEUERUNGEN

Vorwort

Die Schaltungen der industriellen Steuerungstechnik und jene der digitalen Signalverarbeitung werden in zwei Gruppen eingeteilt: in kombinatorische und sequentielle Schaltungen. Sequentielle Schaltungen bestehen ihrerseits sowohl aus kombinatorischen Systemen als auch aus Speicherschaltungen, wobei letztere wiederum weitgehend aus kombinatorischen Bauelementen aufgebaut werden können. Wegen dieser Bedeutung der Kombinatorik ist es verständlich, daß ihre mathematischen Grundlagen heute wohl fundiert und ausgereift sind und in vielen Büchern über Schaltalgebra den größten Raum einnehmen. Bis vor kurzem wurde die Schaltalgebra sehr oft sogar ausschließlich als Kombinatorik aufgefaßt. Sie sollte aber, und dies ist immer mehr der Fall, auch als die Algebra der sequentiellen Schaltungen verstanden werden.

Der Wissenszweig der Schaltalgebra ist erst in unserem Jahrhundert entstanden, wobei es bemerkenswert ist, daß frühe russische Arbeiten (z. B. ERENFEST, 1910, über die Algebra der Logik und KUTTI, 1928, über sequentielle Schaltungen und den Begriff der inneren Speicher) in Amerika und Westeuropa praktisch unbekannt und deshalb hier ohne Einfluß auf eigenständige Entwicklungen geblieben sind. Im wesentlichen löste hier erst die 1938 erschienene Arbeit von C. E. SHANNON [142] allgemeines Interesse aus und brachte weitgehende Anregungen. Gleich zu Beginn ihrer Entwicklung hat sich die Schaltalgebra in einen theoretischen und in einen ingenieurmäßigen Zweig aufgespalten. Ihr theoretischer Zweig wird heute vorwiegend als Automaten-theorie bezeichnet, die sich für den Ingenieur meist recht abstrakt darstellt. Der ingenieurmäßige Zweig der Schaltalgebra hingegen soll dem Anwender von elektromagnetischen, elektronischen oder fluidischen Schaltelementen helfen, die Vorrichtungen, Maschinen und Anlagen des Maschinenbaues und der Verfahrenstechnik sowie vieler anderer Gebiete sinnvoll zu automatisieren. Hier stehen zahlreiche Ingenieure verschiedenster Fachgebiete vor der Aufgabe, einzelne Schaltelemente zu komplizierten Schaltungen zu verknüpfen. Dazu werden außer gerätetechnischen Kenntnissen auch solche über Schaltalgebra benötigt. Dem rein intuitiven Schaltungsentwurf, obwohl in Einzelfällen immer noch mit großem Geschick gehandhabt, sind enge Grenzen gesetzt. Das vorliegende Buch versucht, eine vor allem dem Ingenieur verständliche Darstellung der Schaltalgebra zu geben, und will in erster Linie mit Methoden vertraut machen, die unmittelbar für den Entwurf von Schaltungen zur Verfügung stehen. Es wurde dabei keineswegs an eine enzyklo-

pädische Darstellung gedacht. Vielmehr sollte durch subjektive Auswahl der Methoden und des Stoffes leichte Lesbarkeit bei kurzem Umfang und einheitlicher Darstellung gewährleistet werden.

Für die Lektüre des Buches werden keinerlei Voraussetzungen gemacht. Die wenigen notwendigen Grundbegriffe der Aussagenlogik und der Mengenlehre sowie die Grundlagen der Schaltalgebra werden im zweiten und dritten Abschnitt zusammengestellt. Den kombinatorischen Schaltungen wird in den Abschnitten 4 und 5 eine kompakte, aber genügend ausführliche Darstellung gewidmet. Hier werden jene Begriffe angegeben bzw. zum Teil neu entwickelt, die später eine algebraische Behandlung der Speicherfunktionen und der sequentiellen Schaltungen ermöglichen. Vor allem wird auf die Ableitung des Fundamentalsatzes kombinatorischer Schaltungen großer Wert gelegt. Der Fundamentalsatz nämlich ist der Leitfaden für die im Abschnitt 10 vorgenommene Algebraisierung der Synthese sequentieller Schaltungen. Der kombinatorische Teil des Buches wird im Abschnitt 6 mit einer Besprechung der Schaltelemente abgeschlossen, wobei besonders auf deren algebraische Eigenschaften Wert gelegt wird. In Abschnitt 7 werden sodann die Speicherfunktionen ausführlich untersucht und zur Veranschaulichung dieser algebraischen Behandlung werden anschließend die technischen (Ein bit-) Speicher besprochen. Die beiden Abschnitte über die „hardware“ sollen lediglich im Überblick die gerätemäßigen Realisierungsmöglichkeiten veranschaulichen. Eine Besprechung betrieblicher Probleme oder Darstellungen ausgeführter Anlagen wären mit der thematischen Abgrenzung des Buches unvereinbar gewesen.

Der Begriff der sequentiellen Schaltung wird in Abschnitt 9 eingeführt. Von prinzipiellem Interesse ist dabei die Unterscheidung in synchrone und asynchrone Schaltungen. Gerade in der industriellen Steuerungstechnik kommen fast ausschließlich die mathematisch schwierig zu behandelnden asynchronen Schaltungen vor. Dem Ziel des Buches entsprechend sind dieser Schaltungsart die beiden letzten umfangreichen Abschnitte gewidmet. Hier ist es unser wesentliches Anliegen, den Leser mit dem neu vorgeschlagenen Transduktions-Verfahren zur Beschreibung und algebraischen Synthese asynchroner sequentieller Schaltungen bekannt zu machen. Die Beschreibung erfolgt mittels einer sogenannten T-Tabelle, die das Übertragungsverhalten der Schaltung wiedergibt. Die Werte dieser T-Tabelle werden in eine Formel, dem Theorem sequentieller Schaltungen, eingesetzt und liefern unmittelbar einen algebraischen Ausdruck der sequentiellen Schaltung. Durch dieses Theorem ist es möglich, sequentielle Schaltungen algebraisch ebenso geschlossen und vollständig zu beschreiben, wie es bisher nur für kombinatorische Schaltungen mittels des Fundamentalsatzes möglich war.

Dieses Buch entstand im Zusammenhang mit Arbeiten am Lehrstuhl für Meß- und Regelungstechnik der Ruhr-Universität Bochum, aus unseren Vorlesungen und verschiedenen Vorträgen und aus unserer langjährigen engen Zusammenarbeit sowie vor allem auch aus der Dissertation von P. VINGRON.

[184]. Wesentliche Teile des vierten Abschnittes stammen von dort und die Abschnitte 7, 9 und 10 stellen erweiterte und umgearbeitete Teile dieser Arbeit dar. Die Reihenfolge, in der unsere Namen angegeben sind, ist lediglich durch das Alphabet bedingt.

Es ist uns eine angenehme Verpflichtung, unseren Mitarbeitern und Kollegen Herrn Dipl.-Ing. W. HÜBL für seine Hilfe bei der Ausarbeitung des Abschnitts 8 sowie für zahlreiche wertvolle Gespräche und Anregungen und Herrn Dr.-Ing. D. TESMER für die Bearbeitung des Abschnittes 6.3 aufrichtig zu danken. Sehr herzlicher Dank gebührt auch den Damen: Frau G. FISCHER für das mühevoll und präzise Zeichnen der zahlreichen Bilder, Frau J. STAHLSCHMIDT für das zeitraubende Schreiben des Manuskriptes und Frl. U. SCHNEIDER für die dabei erwiesene Hilfe. Schließlich möchten wir auch noch dem Verlag für die Herausgabe des Buches, für die erwiesene Geduld und die angenehme Zusammenarbeit unseren besten Dank aussprechen.

Bochum und Wien,
im Frühjahr 1973

KARL HEINZ FASOL
und
PETER VINGRON

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	1
2. Einige mathematische Grundlagen	5
2.1. Einige Grundbegriffe der Aussagenlogik	5
2.1.1. Die logischen Grundverknüpfungen (Junktoren)	5
2.1.1.1. Negation (Verneinung)	6
2.1.1.2. Konjunktion	6
2.1.1.3. Disjunktion	7
2.1.1.4. Implikation	8
2.1.1.5. Faktische Äquivalenz	9
2.1.2. Tautologie und Kontradiktion	10
2.1.3. Logische Äquivalenz	11
2.1.4. Rechengesetze der Aussagenlogik	11
2.2. Einige Grundbegriffe der Mengenlehre	13
2.2.1. Graphische Darstellung von Mengen; VENN-Diagramm bzw. EULER-Diagramm	14
2.2.2. Untermenge, Gleichheit von Mengen, Potenzmenge	15
2.2.3. Komplementäre Mengen, Durchschnitt, Vereinigung	15
2.2.4. Gesetze der Mengenlehre	16
2.2.5. Partitionen	17
2.2.6. Geordnete Paare, Cartesisches Produkt, Relation	18
3. Boolesche Algebra, Schaltalgebra	21
3.1. Axiome	21
3.2. Theoreme und Rechenregeln	22
4. Kombinatorische Schaltungen	27
4.1. Eingangsbelegungen, Minterme und Maxterme	28
4.2. Der Fundamentalsatz kombinatorischer Schaltungen	32
4.2.1. Herleitung des Fundamentalsatzes aus dem Entwicklungssatz von SHANNON	32
4.2.2. Direkte Herleitung des Fundamentalsatzes	33
4.2.3. Mengentheoretische Darstellung des Fundamentalsatzes	35
4.3. Klassifizierung kombinatorischer Schaltungen	37
4.3.1. Funktionen von zwei Eingangsvariablen	39

4.4. Das KARNAUGH-Diagramm	43
4.4.1. Graphische Darstellung der Eingangsbelegungen	43
4.4.2. Graphische Darstellung des Fundamentalsatzes	47
5. Minimieren von Schaltfunktionen	49
5.1. Implikanten, Primimplikanten und Minimalformen	51
5.2. Minimieren im KARNAUGH-Diagramm	56
5.3. Methode von QUINE und McCLUSKEY („QMC-Verfahren“)	61
5.4. Das Phänomen der Hazards	65
6. Kombinatorische Schaltelemente	71
6.1. Gemeinsame Anforderungen an Schaltelemente	72
6.2. Statische und dynamische fluidische Schaltelemente (Fluidiks)	74
6.2.1. Statische und quasistatische Schaltelemente (Elemente mit bewegten Teilen)	75
6.2.1.1. Kolbenelemente	76
6.2.1.2. Kugelemente	77
6.2.1.3. Membranelemente	78
6.2.1.4. Quasistatische Elemente	86
6.2.2. Dynamische Schaltelemente (Elemente ohne bewegte Teile)	88
6.2.2.1. Impulselemente (Impulsverstärker)	89
6.2.2.2. Turbulenzelemente (Turbulenzverstärker)	91
6.2.2.3. Wandstrahlelemente (Wandstrahlverstärker)	93
6.3. Elektromagnetische und elektronische Schaltelemente	95
6.3.1. Relaistechnik	97
6.3.2. Diodentechnik	99
6.3.3. Transistortechniken	100
6.3.3.1. RTL-, RCTL- und DCTL-Systeme	102
6.3.3.2. DTL- und DTLZ-Systeme	104
6.3.3.3. TTL-Systeme	107
7. Speicherfunktionen	111
7.1. Grundlagen	111
7.2. Die allgemeine Speichergleichung	113
7.2.1. Direkte Ableitung der Speichergleichung	113
7.2.2. Ableitung der Speichergleichung aus dem Fundamentalsatz	115
7.2.3. Darstellung der Speicher im KARNAUGH-Diagramm; Frei wählbare Schaltwerte („Don't-care-Condition“)	116
7.3. Speicher als Selbsthaltekreise	119
7.3.1. Die gerätetechnische Realisierung eines Selbsthaltekreises mit Verzögerung in der Rückführung	120
7.3.2. Die gerätetechnische Realisierung eines Selbsthaltekreises ohne Verzögerung in der Rückführung	122
7.4. Teilweise und vollständige Hazardfreiheit von Selbsthaltekreisen	122
7.5. Das Negieren einer Speicherfunktion	123

7.6. Die Speicher-Grundgleichungen und ihre Negation	125
7.7. Eine einheitliche Bezeichnung von Speicherfunktionen	127
7.8. Das Set-Reset Flip-Flop (RS-Flip-Flop)	131
8. Gerätemäßige Realisierung von Speicherfunktionen	135
8.1. Speicher ohne Rückführung (Zustandsänderungsspeicher)	137
8.1.1. Fluidische Elemente als Zustandsänderungsspeicher	137
8.1.2. Der Thyristor als Zustandsänderungsspeicher	139
8.2. Speicher mit Rückführung (Selbsthaltekreise)	140
8.2.1. Selbsthaltekreise mit statischen und dynamischen fluidischen Schaltelementen	141
8.2.1.1. Selbsthaltekreise mit statischen Elementen	141
8.2.1.2. Selbsthaltekreise mit dynamischen Elementen	143
8.2.2. Selbsthaltekreise mit elektromagnetischen und elektronischen Schaltelementen	145
8.2.2.1. Selbsthaltekreise in Relais-technik	145
8.2.2.2. Selbsthaltekreise in Transistortechnik	146
9. Einführung in den Begriff der sequentiellen Schaltungen	153
9.1. Darstellung sequentieller Schaltungen	153
9.2. Allgemeine Struktur einer sequentiellen Schaltung	154
9.3. Grenzen der Schaltalgebra	156
9.4. Asynchrone und synchrone sequentielle Schaltungen	157
9.5. Dynamische und statische Schaltungen	159
10. Das Transduktions-Verfahren zur Synthese sequentieller Schaltungen	163
10.1. Die Transduktions-Tabelle	163
10.1.1. Das Konzept der T-Tabelle	163
10.1.2. Die Spalten und die Hauptdiagonalfelder der T-Tabelle	165
10.1.3. Ausfüllen der T-Tabelle	166
10.1.4. Darstellung von Eingangs- und Ausgangsketten in T-Tabellen	173
10.1.5. Die Nebendiagonalfelder der T-Tabelle; Benutzung nicht belegter Felder	174
10.1.6. Beispiele für die Darstellung von Schaltungen durch T-Tabellen	175
10.2. Die Theorie zweidimensionaler Schaltungen	178
10.2.1. Das Theorem für zweidimensionale Schaltungen	178
10.2.1.1. Die inneren Speicher	182
10.2.1.2. Reduzieren der Anzahl der inneren Speicher	184
10.2.1.3. Ausgangskombinatorik und Ausgangsspeicher	184
10.2.1.4. Hazardfreiheit zweidimensionaler Schaltungen	185
10.2.2. Der Matrixkalkül	185
10.2.3. Das Umformen der T-Matrix	187
10.2.4. Einige erläuternde Beispiele	188
10.2.5. Negieren zweidimensionaler Schaltungen und innerer Speicher	193
10.2.5.1. Das Negieren zweidimensionaler Schaltungen	193

- 10.2.5.2. Der Matrixkalkül und das Negieren zweidimensionaler Schaltungen 194
- 10.2.5.3. Das Negieren einzelner innerer Speicher 195
- 10.2.6. Kürzungsregeln für zweidimensionale Schaltungen 197
- 10.2.7. Weitere erläuternde Beispiele 203
- 11. Das Verfahren nach HUFFMAN zur Analyse und Synthese sequentieller Schaltungen 211**
 - 11.1. Modellvorstellung und Analyse 211
 - 11.2. Analyse von Schaltungen 216
 - 11.2.1. Allgemeine Darstellung von Schaltungen 216
 - 11.2.1.1. Die Überführungs- und Ausgabetabellen 217
 - 11.2.1.2. Gerichtete Graphen 219
 - 11.2.1.3. Teilgraphen 220
 - 11.2.2. Das autonome Verhalten einer Schaltung 222
 - 11.2.2.1. Stabile und instabile Schaltungszustände 222
 - 11.2.2.2. Schwingungszustände der inneren Speicher 224
 - 11.2.2.3. Wettlauferscheinungen 225
 - 11.2.3. Das Verhalten der inneren Speicher bei Änderung der Eingangsbelegung 227
 - 11.2.3.1. Wesentliche Hazards 228
 - 11.3. Synthese von Schaltungen 233
 - 11.3.1. Die einfache Flußtafel 233
 - 11.3.2. Reduzieren der Anzahl der inneren Speicher 236
 - 11.3.3. Kodieren der verschmolzenen vorläufigen Überführungstabellen 239
 - 11.3.4. Aufstellen der Ausgabetabelle 244
 - 11.3.5. Abschließende Bemerkungen 247
- Literaturverzeichnis 249
- Namen- und Sachverzeichnis 257

1. Einführung

Steuerungen arbeiten entweder mit Druckluft oder mit einer elektrischen Spannung als sog. „Hilfsenergie“. Die physikalischen Größen Luftdruck bzw. Spannung sind dann die Träger der Signale für den signalverarbeitenden Teil der Steuerung („Signalträger“). Als Signale werden in diesem Fall die zeitlichen Verläufe der Parameter Druck bzw. Spannung bezeichnet und der jeweilige Wert dieser Parameter stellt die zu übertragende Information dar. Es ist daher naheliegend, die Bezeichnung „Informationsparameter“ zu verwenden. Ist der Informationsparameter diskret veränderbar und kann er nur Werte annehmen, die den Worten eines vereinbarten Alphabets entsprechen, dann handelt es sich um ein digitales Signal. Die möglichen Werte des Informationsparameters bilden eine Menge, die als Wertevorrat oder als Wertebereich bezeichnet wird. Enthält im besonderen Fall der Wertevorrat nur zwei Werte, dann stellt der Informationsparameter eine zweiwertige, oder binäre, oder eine Boole'sche Variable dar. Im technischen Sprachgebrauch wird dann von einem binären Signal oder im mathematischen Sinne von einer binären Variablen gesprochen.

Die durch ein binäres Signal übermittelte Information kann sich nur auf zwei Zustände bzw. zwei verschiedene Werte beziehen. Im Falle z. B. der Algebra der Aussagen sind diese beiden Werte die Aussagen „wahr“ und „falsch“. Im Falle der technischen Schaltalgebra repräsentieren diese beiden möglichen Werte des Informationsparameters die für die betreffende Schaltung oder für einen Teil dieser Schaltung wesentlichen Werte von physikalischen oder technischen Größen. In diesem Fall wird die binäre (Boolesche) Variable als Schaltvariable bezeichnet. Meist für den niedrigen Wert des Informationsparameters wird das Symbol $\sigma = 0$ festgelegt, das dann z. B. eine der Informationen „drucklos, spannungslos, bzw. Druck oder Spannung unter einem bestimmten Schwellwert, Schalter aus (Leitwert null), Stellschalter eingefahren, usw.“ übermittelt. Für den höheren Wert des Informationsparameters wird das Symbol $\sigma = 1$ (manchmal auch $\sigma = L$) vereinbart, was dann z. B. „unter Druck, unter Spannung, Schalter ein, usw.“ bedeutet. Der Index σ wird als „Belegungsindex“ oder als „Wert“ oder als „Belegung“ der betreffenden Schaltvariablen bezeichnet.

Zur Veranschaulichung des binären Signals bzw. des Schaltwertes soll hier auf ein Beispiel, nämlich auf den im Bild 1.1 dargestellten pneumatischen Schwellwertschalter hingewiesen werden. Dieser Schalter formt ein analoges in ein binäres Drucksignal um. Durch die Wirkung des Eingangsdruckes p_e auf die Stellmembran entsteht eine Kraft, die der Wirkung des Sollwert-

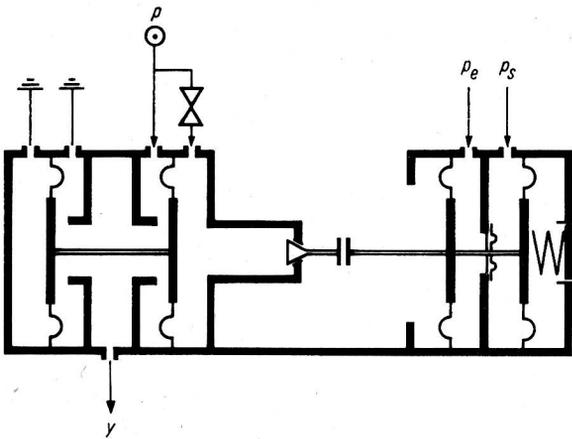


Bild 1.1: Prinzip des pneumatischen Schwellwertschalters von DRELOBA/ELLIOTT

druckes p_s entgegengerichtet ist. Wird der Eingangsdruck größer als der jeweilige Sollwertdruck, dann drückt der Betätigungsstößel gegen das Kegelsitzventil. Dadurch bricht wegen der vorgeschalteten Drossel der Druck in der rechten Relaiskammer zusammen und das pneumatische Relais schaltet schlagartig den bis dahin drucklosen Ausgang y auf den Versorgungsdruck p um. Ordnet man diesem Druck p den Belegungsindex $\sigma = 1$ zu, dann wird durch die Belegung $\sigma = 1$ des Ausgangssignals y die Information $p_e > p_s$ und durch $\sigma = 0$ die Information $p_e < p_s$ übertragen (Bild 1.2).

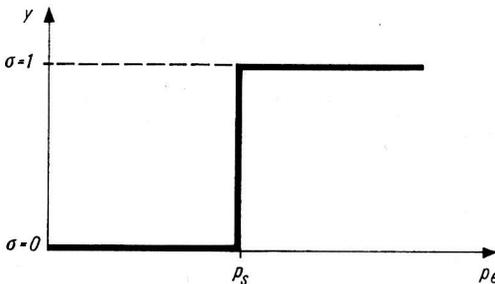


Bild 1.2: Kennlinie eines Schwellwertschalters

Die Verarbeitung der binären Signale bzw. der Schaltvariablen erfolgt in Schaltsystemen, kurz „Schaltungen“ genannt. Eine binäre Schaltung ist ein Übertragungssystem mit mehreren binären Eingangssignalen und mehreren binären Ausgangssignalen, bei dem sich die Ausgangssignale nur infolge einer Änderung der Eingangssignale ändern können. Ein solches System ist zeitunabhängig und bedarf daher zu seiner mathematischen Beschreibung nicht der Zeit als Parameter.

Die unabhängigen Eingangsvariablen einer binären Schaltung werden durch die Symbole x_i bezeichnet und sie bilden die Menge

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}.$$

Für die Belegung aller einzelnen Eingangsvariablen x_i jeweils entweder mit 0 oder 1 ($\sigma_i = 0, 1$), wollen wir den Begriff der Belegung der Eingangsvariablen oder kurz „Eingangsbelegung“ verwenden und dafür das Symbol j einführen. Dieser Begriff wird später im Abschnitt 4.1 noch sehr ausführlich besprochen werden. Es sei diesem Abschnitt vorweggenommen, daß bei n verschiedenen Eingangsvariablen insgesamt 2^n verschiedene Eingangsbelegungen möglich sind. Im weiteren Verlauf werden wir eine binäre oder Boolesche Variable bzw. eine Schaltvariable stets kurz als „Variable“ bezeichnen. Soweit es sich um Eingangsvariable handelt, werden wir diese entweder so oder noch kürzer „Eingänge“ nennen. Die Ausgangsvariablen werden wir kurz als „Ausgänge“ bezeichnen.

In diesem Buch wird vorwiegend der wichtigste und zugleich einfachste Fall einer binären Schaltung behandelt, der zwar n Eingänge (x_1, \dots, x_n), jedoch nur einen einzigen mit dem Symbol y bezeichneten Ausgang besitzt. Es wird, abgesehen von den Abschnitten 6 und 8 über die „hardware“, der wesentliche Zweck des Buches sein, eine Auswahl jener mathematischen Methoden vorzuführen, die zur systematischen rechnerischen Behandlung derartiger Schaltungen notwendig sind. Die Grundlage dieser Methoden ist die Schaltalgebra. Unter Anwendung dieser Algebra kann ein viel tieferes Verständnis der Schaltungen erreicht werden als es bei rein phänomenologischer Betrachtungsweise möglich wäre. Die Schaltalgebra ist ein Spezialfall der Booleschen Algebra, die ihrerseits Bestandteil der Mengenlehre ist. Daher spielen mengentheoretische Bezeichnungen und Veranschaulichungen in der Schaltalgebra eine wichtige Rolle. Der Booleschen Algebra kann aber auch die Aussagenlogik als Modell dienen, wobei Aussagenlogik und Mengenlehre eng zusammenhängen. Es soll daher aus Gründen der Systematik, wohl aber auch zur Erzielung eines besseren Verständnisses zunächst auf nur wenigen Seiten eine kurze Zusammenstellung der wichtigsten Grundlagen von Aussagenlogik und Mengenlehre erfolgen.



2. Einige mathematische Grundlagen

2.1. Einige Grundbegriffe der Aussagenlogik

Die Aussagenlogik versucht die Gesetze unseres Denkens in mathematischer Form nachzubilden, und ist in diesem Sinne ein Teil der sogenannten mathematischen oder theoretischen Logik [u. a. 5, 37, 64, 158]. Der zentrale Begriff der Aussagenlogik ist die Aussage. Unter einer Aussage ist jeder Satz zu verstehen, von dem die Behauptung sinnvoll ist, daß sein Inhalt richtig oder falsch sei. Beispiele für Aussagen sind etwa „Die Donau ist länger als der Rhein“, oder „George Boole war der Begründer der modernen Aussagenlogik“. Für die Aussagenlogik ist nun nicht der eigentliche Inhalt einer Aussage wesentlich, sondern vielmehr die Frage, ob eine Aussage tatsächlich richtig oder falsch ist. Durch die Verknüpfung verschiedener Aussagen entsteht eine neue Aussage, von der wiederum nur interessiert, ob sie richtig (wahr) oder falsch ist. Die Aufgabe der Aussagenlogik besteht darin, Regeln anzugeben, die eine Entscheidung darüber ermöglichen, wann diese neue Aussage wahr bzw. falsch ist. Vorerst müssen nun die verschiedenen Möglichkeiten der Aussagen-Verknüpfung besprochen werden.

2.1.1. Die logischen Grundverknüpfungen (Junktoren)

Für die Mathematisierung der Aussagen-Verknüpfung ist es notwendig, jede Aussage etwa durch einen Großbuchstaben zu ersetzen, was im folgenden auch geschehen soll. In der Umgangssprache werden nun zwei verschiedene Aussagen A , B durch die Worte „und“, „oder“, „nicht“, „wenn — dann“, „genau dann — wenn“ miteinander verknüpft. Allerdings ist die Bedeutung dieser Worte nicht in jedem Fall gleich, wie am Beispiel des Wortes „oder“ gezeigt werden soll: Auf Grund der Aussage „Vom Standpunkt der Axiomatik können Aussagenlogik *oder* Mengenlehre als Modelle der Booleschen Algebra aufgefaßt werden“ können sowohl Aussagenlogik bzw. Mengenlehre für sich allein, als auch beide zusammen als Modelle der Booleschen Algebra angeführt werden. Das Wort „oder“ wird aber nicht immer in dieser (einschließenden) Bedeutung verwendet, wo beide Möglichkeiten gleichzeitig zutreffen bzw. wahr sind. In der Aussage „Ich komme, oder ich komme nicht“ hat das Wort „oder“ eine ausschließende Bedeutung. Im Zuge einer Mathematisierung der Gesetze unseres Denkens ist es aber nicht zulässig, daß die Verknüpfung zweier Aussagen je nach dem jeweiligen Inhalt dieser Aussagen verschiedene neue Aussagen (Aussagenverknüpfungen) liefern sollen. Die Bedeutung der Verknüpfungen muß also präzisiert werden. Dies

soll im folgenden geschehen. Wir beginnen damit, daß jede der eingangs erwähnten (sprachlichen) Verknüpfungen („nicht“, „und“, ...) durch ein (Verknüpfungs-) Symbol, einen sogenannten Junktoren, ersetzt wird:

nicht	$\neg, -$
und	\wedge
oder	\vee
wenn — dann	\rightarrow
genau dann — wenn	\leftrightarrow

Um sprachliche Unklarheiten zu vermeiden, muß die Bedeutung der Junktoren einzeln erklärt werden.

2.1.1.1. Negation (Verneinung).

Die einfachste Verknüpfung ist die Verneinung. So lautet die mit A bezeichnete Aussage „2 ist kleiner als 3“ in ihrer verneinten Form: „2 ist *nicht* kleiner als 3“. Wir schreiben für die zu A negierte (verneinte) Aussage: \bar{A} ¹). Wir wollen die sprachliche Selbstverständlichkeit, daß die Verneinung einer wahren Aussage eine falsche Aussage ergibt und umgekehrt, zur Erklärung des Junktors — verwenden und ihn durch Tab. 2.1a definieren. Wird als

Tabelle 2.1
Definition der Negation

A	\bar{A}	A	\bar{A}
falsch	wahr	0	1
wahr	falsch	1	0
a)		b)	

willkürliche Abkürzung für die Bezeichnung „falsch“ das Symbol 0 und für „wahr“ (ebenso willkürlich) das Symbol 1 verwendet, dann läßt sich Tab. 2.1a durch Tab. 2.1b ersetzen. Derartige Tabellen werden Wahrheitstabellen genannt. Für einen gegebenen Wahrheitswert (entweder Null oder Eins) einer Aussage A , läßt sich aus Tab. 2.1 der zugehörige Wahrheitswert der negierten Aussage \bar{A} ablesen. Da der Junktoren „Negation“ sich auf nur eine einzige Aussage A bezieht, spricht man auch von einem einstelligen Junktoren, bzw. von einer einstelligen Verknüpfung. Die Negation ist der einzige einstellige Junktoren. Die von nun an zu behandelnden Junktoren sind im Gegensatz dazu zweistellig, d. h. sie verknüpfen zwei Aussagen A, B miteinander, wodurch eine neue Aussage C entsteht.

2.1.1.2. Konjunktion

In erfreulicher Übereinstimmung mit der sprachlichen Bedeutung des Wortes „und“ soll die Verknüpfung $A \wedge B$ (gelesen: A und B) dann und nur dann

¹) In den meisten Büchern der mathematischen Logik wird $\neg A$ statt \bar{A} geschrieben. Die Schreibweise \bar{A} wurde hier aber in Anlehnung an die in der Mengenlehre und in der Schaltalgebra übliche Schreibweise gewählt.