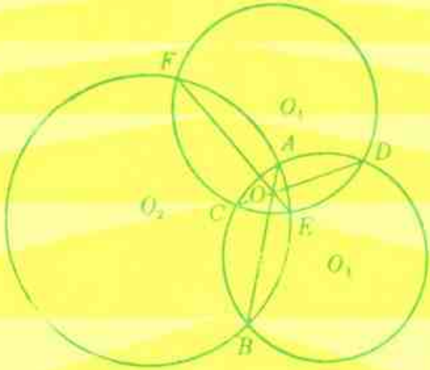
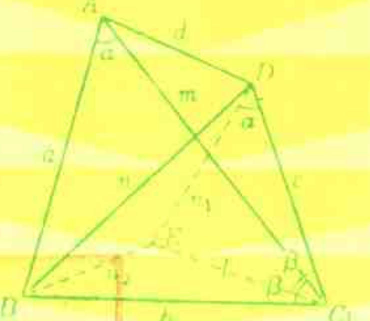
中学生文库



三角恒等式及应用



上海教育出版社

中 学 生 文 库

三角恒等式及应用

张 运 筹

上 海 教 育 出 版 社

内 容 提 要

本书深入地讨论了三角恒等式的证明方法以及在平面几何证题方面的应用．其中包括很多例题与练习题，并附有练习题的解法概要，全书内容丰富而具有启发性．可供中学生学习平面三角与平面几何时参考．

中学生文库　　三角恒等式及应用

张　运　筹　　上海教育出版社出版
（上海永福路123号）

上海崇明印刷厂印刷　　新华书店上海发行所发行

开本 787×1092　1/32　印张 5　字数 109,000

1982年3月第1版　1982年3月第1次印刷

印数 1—46,500 本

统一书号：7150·2561　定价：0.38元

前　　言

三角函数是基本初等函数之一，在科学技术的许多领域里都有它的踪迹．就中学数学的范围而言，由于三角函数体现了三角形中边和角的数量关系，因此比纯几何方法思路更为开阔．几何题目的困难常常在于那些被隐藏了的辅助图形(点、直线、圆弧、三角形)，在三角中由于用辅助变量代替辅助图形，问题的症结就更明显．因此，与几何相比，中学数学教学应当更重视三角教学．鉴于此，愿将多年积累的一些资料整理出来，希望能起到抛砖引玉的作用，并得到大家的指正．

作　者

1981.8.

目录 ZHONG XUE SHENG WENKU

一、三角恒等式

我们在中学数学中已经学过函数 $y=f(x)$ 的定义。如果 $f(x)$ 的表达式中含有三角运算，$y=f(x)$ 可称为三角式。例如

$$y=\sin^2 x,\quad y=\sin x+2\cos x,\quad y=\operatorname{ctg} x+3 \qquad ①$$

$$y=\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x+1} \qquad ②$$

等都是三角式。严格地讲，定义一个函数必须同时给出它的定义域，但习惯上都不明指，而认为能使 $f(x)$ 有意义的所有 x 的取值就组成了 $y=f(x)$ 的定义域 D。我们知道，$y=\sin x$、$y=\cos x$ 的定义域是 $(-\infty,\ +\infty)$；$y=\operatorname{tg} x$ 的定义域是$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$k$ 为整数；$y=\operatorname{ctg} x$ 的定义域是 $(k\pi,\ k\pi+\pi)$，k 为整数。因为三角式中还可能包含其他的运算，所以还必须考虑使这些运算也有意义。例如②式中的定义域就是

$$\left\{x \,\middle|\, x\neq k\pi+\frac{\pi}{4},\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}.$$

一般地，如果 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 有相同的定义域 D，且对任何 $x_0\in D$ 都有 $f_1(x_0)=f_2(x_0)$，我们称函数 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 相等，并称

$$f_1(x)=f_2(x),\quad x\in D \qquad ③$$

是恒等式，注意其中的“$x\in D$”往往略去不写。

如果 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 中有一个是三角式，就称③式是三角

恒等式。例如

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\qquad \frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x$$

都是三角恒等式。

如果③只在一定的条件下才成立，则称③是条件三角恒等式(相对于此，前面说的三角恒等式亦称为无条件三角恒等式)。例如

当 $x\geqslant 0$ 时， $\sin x=\sin\sqrt{x^2}$；

当 $\sin\alpha+\sin\gamma=2\sin\beta$ 时，

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}=2\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

都是条件三角恒等式。

一个常常遇到的条件是：ABC 是一个三角形。这时有关的三角恒等式称为是 $\triangle ABC$ 中的三角恒等式。

当 $y=f_1(x)$ 的定义域 D_1 与 $y=f_2(x)$ 的定义域 D_2 不相同时，我们往往是在 D_1、D_2 的公共部分即 $D_1\cap D_2$ 内来谈恒等式。即当 $x_0\in D_1\cap D_2$ 时，若有 $f_1(x_0)=f_2(x_0)$，则称

$$f_1(x)=f_2(x),\quad x\in D_1\cap D_2$$

是恒等式。例如

$$\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x=1,\qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x},$$

等式两边的定义域都不相同，因而都要作上述理解才行。

在本书中，在不会引起混淆时，常常把三角恒等式简称为恒等式。把恒等式的左边简写为“左”，等等。

1. 无条件三角恒等式

虽然恒等式 $f_1(x)=f_2(x)$ 的定义是说，对于定义域中任

何 x_0 都成立 $f_1(x_0)=f_2(x_0)$，但我们不可能也不必要用这种手段来证明一个式子是恒等式。我们总是用一些基本的三角公式，通过正确的运算来进行证明。

无条件恒等式表明了一个数量关系的两种形式，而无条件恒等式的证明，就是把一种数量关系有根据地从一种形式变到另一种需要的形式。这并不是一种无聊的游戏，而是数学科学中的有力杠杆之一，如果没有它，今天就没法去进行一个较为复杂的计算。

把一个式子等效地演变成需要形式，或是把一个命题等效地演变成需要形式，都需要学生相当的运算能力与逻辑推理能力，培养这种能力是数学教学的一个经常任务。

我们假定读者已经熟悉基本三角恒等式及简单的证明方法。在本节中结合着例题进一步介绍无条件恒等式的证明方法和应该注意的问题。

［例 1］ 求证 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

这是三角函数加法定理中的一个基本公式，教科书借助解析几何给以证明，这里给出一个只用三角公式的证明方法。

证明 可令

$$\alpha=m\cdot\frac{\pi}{2}+A,\quad \beta=n\cdot\frac{\pi}{2}+B,\quad 0\leqslant A,\ B<\frac{\pi}{2},$$

m、n 为整数。我们分两种情况证明。

(1) A、B 中至少有一为 0。不妨设 $A=0$，则

$$\alpha=m\cdot\frac{\pi}{2}.$$

当 $m=2k$ 时，$\alpha=k\pi$，$\sin\alpha=0$，$\cos\alpha=(-1)^k$。

$$左=\sin(k\pi+\beta)=(-1)^k\sin\beta=右。$$

当 $m=2k+1$ 时，$\alpha=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\alpha=0$，$\sin\alpha=(-1)^k$。

$$左=\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+\beta\right]=(-1)^k\cos\beta=右。$$

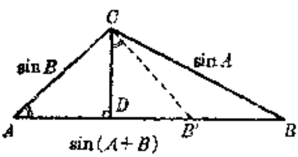
所以，当 A、B 中至少有一为 0，原式成立。

(2) 当 A、B 都不为 0。先证

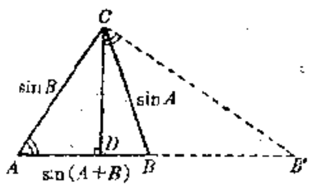
$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B, \qquad ①$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B. \qquad ②$$

事实上，因为 A、$B<\frac{\pi}{2}$，故可作 $\triangle ABC$ 且使其外接圆直径为 1。现再分 $A+B\leqslant\frac{\pi}{2}$ 与 $A+B>\frac{\pi}{2}$ 两种情况，如下图。在 AB（或延线上）取 B' 使 $B'C\perp AC$。用正弦定理可把各边如图标记。作 $CD\perp AB$ 于 D。



$A+B\leqslant\frac{\pi}{2}$



$A+B>\frac{\pi}{2}$

图 1.1

$\because$ A、B 是锐角， $\therefore$ D 在 A、B 间。

$\therefore$ $\sin(A+B)=AB=AD+DB$

$=\sin B\cos A+\sin A\cos B=(1)$式右边。

$$\cos^2(A+B)=\cos^2A+\sin^2A-\sin^2(A+B)$$

$$=\cos^2A+\sin^2A-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)^2$$

$$=\cos^2A-\cos^2A\sin^2B+\sin^2A-\sin^2A\cos^2B$$

$$-2\sin A\cos B\cos A\sin B$$

$$=\cos^2A\cos^2B+\sin^2A\sin^2B-2\sin A\sin B\cos A\cos B$$

$$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)^2.$$

如果能证明 $\cos(A+B)$ 与 $\cos A\cos B-\sin A\sin B$ 同号，则立刻有 ②. 事实上，当 $A+B\leqslant\frac{\pi}{2}$，有 $C\geqslant\frac{\pi}{2}$，B' 在 A、B 之间或与 B 重合.

$$\therefore\quad \operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B=\frac{AD}{CD}\cdot\frac{BD}{CD}\geqslant\frac{AD\cdot B'D}{CD^2}$$

$$=\frac{CD\operatorname{ctg} A\cdot CD\operatorname{tg} A}{CD^2}=1.$$

$$\therefore\quad \cos A\cos B\geqslant\sin A\sin B,\quad \cos(A+B)\geqslant 0. \qquad ③$$

当 $A+B>\frac{\pi}{2}$，有 $C<\frac{\pi}{2}$，B 在 A、B' 之间.

$$\therefore\quad \operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B=\operatorname{ctg} A\ \frac{BD}{CD}<\operatorname{ctg} A\ \frac{B'D}{CD}$$

$$=\operatorname{ctg} A\operatorname{tg} A=1,$$

$$\therefore\quad \cos A\cos B<\sin A\sin B,\quad \cos(A+B)<0, \qquad ④$$

综合 ③、④ 式，$\cos A\cos B-\sin A\sin B$ 与 $\cos(A+B)$ 同号. 至此 ①、② 式都得证.

下面用 ①、② 式和诱导公式证明原式在 (2) 的条件下成立.

当 $m=2k$，$n=2l$ 时，

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha+\beta)=\sin[(k+l)\pi+A+B]\\
&=(-1)^{k+l}\sin(A+B)\\
&=(-1)^{k+l}(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\\
&=(-1)^k\sin A(-1)^l\cos B\\
&\quad+(-1)^k\cos A(-1)^l\sin B\\
&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

当 $m=2k+1$，$n=2l+1$ 时，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin[(k+l+1)\pi+A+B]$$
$$=(-1)^{k+l+1}\sin(A+B)$$
$$=(-1)^{k+1}\sin A(-1)^{l}\cos B$$
$$+(-1)^{k}\cos A(-1)^{l+1}\sin B$$
$$=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta.$$

当 $m=2k$, $n=2l+1$ 时,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\left\{[2(k+l)+1]\frac{\pi}{2}+A+B\right\}$$
$$=(-1)^{k+l}\cos(A+B)$$
$$=(-1)^{k+l}(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$$
$$=(-1)^{k}\cos A(-1)^{l}\cos B$$
$$+(-1)^{k}\sin A(-1)^{l+1}\sin B$$
$$=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta.$$

当 $m=2k+1$, $n=2l$ 时,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\left\{[2(k+l)+1]\frac{\pi}{2}+A+B\right\}$$
$$=(-1)^{k+l}\cos(A+B)$$
$$=(-1)^{k}\cos A(-1)^{l}\cos B$$
$$+(-1)^{k+1}\sin A(-1)^{l}\sin B$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

所以当 A、B 都不为 0 时原式成立。

综合(1)、(2)两款,对于一切 α, β 原式成立。

有些教科书实际上只证明了 α、β、$\alpha+\beta$ 都是锐角的情形，这对要求更完整证明的读者是不够的。这里采用了分情况讨论的办法，利用诱导公式、正弦定理、三角函数定义，对 α、β 是任意角的情形进行了证明。因为这个公式中有了 α、β 的任意性,所以就可以推出所有其他的和角公式。例如

$$\cos(\alpha+\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\beta+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\beta$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

[例 2] 求证

$$\cos^3\alpha+\cos^3\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^3\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}\cos 3\alpha.$$

证明 $4\times$左$=3\left[\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$$+\cos 3\alpha+\cos(3\alpha+2\pi)+\cos(3\alpha-2\pi)$$

$$=3\left(\cos\alpha+2\cos\alpha\cos\frac{2\pi}{3}\right)+3\cos 3\alpha$$

$$=3\cos 3\alpha,$$

$\therefore$ 左=右。

这一例左边是余弦的三次方，有三项，是和角形式，一般宜先降次，向右边的低次、单项、倍角形式化简。这是一种由繁向简变化的思路。

[例 3] 求证

$$\frac{\sin(x-\beta)\sin(x-\gamma)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\frac{\sin(x-\gamma)\sin(x-\alpha)}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)}+\frac{\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=1.$$

证明 本题相当于要证

$$\sin(\alpha-\beta)\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)$$
$$+\sin(\beta-\gamma)\sin(x-\beta)\sin(x-\gamma)$$
$$+\sin(\gamma-\alpha)\sin(x-\gamma)\sin(x-\alpha)$$
$$=\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma-\beta)\sin(\beta-\alpha). \quad ①$$

$$
\begin{aligned}
&4\times①式左边\\
=&2\sin(\alpha-\beta)[\cos(\alpha-\beta)-\cos(2x-\alpha-\beta)]\\
&+2\sin(\beta-\gamma)[\cos(\beta-\gamma)-\cos(2x-\beta-\gamma)]\\
&+2\sin(\gamma-\alpha)[\cos(\gamma-\alpha)-\cos(2x-\gamma-\alpha)]\\
=&\sin 2(\alpha-\beta)-[\sin 2(\alpha-x)+\sin 2(x-\beta)]\\
&+\sin 2(\beta-\gamma)-[\sin 2(\beta-x)+\sin 2(x-\gamma)]\\
&+\sin 2(\gamma-\alpha)-[\sin 2(\gamma-x)+\sin 2(x-\alpha)]\\
=&\sin 2(\alpha-\beta)+\sin 2(\beta-\gamma)+\sin 2(\gamma-\alpha)\\
=&2\sin(\alpha-\gamma)\cos(\alpha-2\beta+\gamma)+2\sin(\gamma-\alpha)\cos(\gamma-\alpha)\\
=&2\sin(\alpha-\gamma)[\cos(\alpha-2\beta+\gamma)-\cos(\gamma-\alpha)]\\
=&4\times①式右边。
\end{aligned}
$$

故得证。

注意，这里①式左边比①式右边多出一个变量 x，自然希望把 x 分离出来消掉。

把这个等式对比代数中恒等式

$$\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=1$$

（其中 α、β、γ 两两不等）

的证明，并注意它们的不同是有益的。

[例 4] 求证 $\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

证明 $左^2=1+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}=右^2$， $\therefore$ 左＝右。

因为左、右显然为正，所以得证。

注意，用 $A^2=B^2$ 判断正数 A、B 相等的思路是常用的。

[例 5] 求证 $\sin x+2\sin 2x+\cdots+n\sin nx$

$$=\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{2(1-\cos x)},$$

证明 $2\cos x\cdot$左

$$=\sin 2x+2(\sin 3x+\sin x)$$
$$+\cdots+n[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x]$$
$$=2\cdot\text{左}+n\sin(n+1)x-(n+1)\sin nx,$$

$\therefore\quad 2(1-\cos x)\cdot\text{左}=(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x,$

$$\therefore\quad \text{左}=\text{右}.$$

[例 6] 求证 $\cos x\cos 2x\cdots\cos 2^{n-1}x=\dfrac{\sin 2^n x}{2^n\sin x}$.

证明 $\text{左}=\dfrac{\sin 2x}{2\sin x}\cdot\dfrac{\sin 4x}{2\sin 2x}\cdot\cdots\cdot\dfrac{\sin 2^n x}{2\sin 2^{n-1}x}=\text{右}.$

思路是,

$\text{左}=x_1\dfrac{a_2}{a_1}x_2\dfrac{a_3}{a_2}\cdots x_{n-1}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=x_1x_2\cdots x_{n-1}\dfrac{a_n}{a_1}=\text{右}.$

[例 7] 求证 $\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{4\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\dfrac{2n\pi}{2n+1}$
$=-\dfrac{1}{2}$.

证明 令$\dfrac{\pi}{2n+1}=\alpha$, 则

$$2\sin\alpha\cdot\text{左}=\sin 3\alpha-\sin\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha$$
$$+\cdots+\sin(2n+1)\alpha-\sin(2n-1)\alpha=-\sin\alpha,$$

$$\therefore\quad \text{左}=-\frac{1}{2}.$$

思路是,

$x\cdot\text{左}=a_2-a_1+a_3-a_2+\cdots+a_n-a_{n-1}=a_n-a_1=x\cdot\text{右}.$

[例 8] 求证

$\sin^3\alpha\sin^3(\beta-\gamma)+\sin^3\beta\sin^3(\gamma-\alpha)+\sin^3\gamma\sin^3(\alpha-\beta)$
$=3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)$.

证明 令 $x=\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)$, $\quad y=\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)$,

$$z=\sin\gamma\sin(\alpha-\beta),$$

$$左-右=x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

$\because$ $2(x+y+z)=\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)$
$+\cos(\alpha+\beta-\gamma)-\cos(-\alpha+\beta+\gamma)$
$+\cos(-\alpha+\beta+\gamma)-\cos(\alpha-\beta+\gamma)=0$。

$\therefore$ 左$-$右$=0$， 即左$=$右.

思路是，把原题变为求证(左$-$右)$=0$。其中用到了代数恒等式

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

[例 9] 求证 $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

证明 利用

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)=x^{2n-2}+x^{2n-4}+\cdots+x^2+1, \quad ①$$

令 $x=1$ 得

$$n=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)=2^{2(n-1)}\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{2n}$$
$$=2^{2(n-1)}\cdot 左^2.$$

$\therefore$ $\sqrt{n}=2^{n-1}\cdot$左， $\therefore$ 左$=$右.

注意，恒等式①的成立是因为 $x^{2n}-1=0$ 的根是

$$\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n-1).$$

所以

$$x^{2n}-1=\prod_{k=0}^{2n-1}\left(x-\cos\frac{k\pi}{n}-i\sin\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$=(x-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-\cos\frac{k\pi}{n}-i\sin\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$\times(x+1)\prod_{k=n+1}^{2n-1}\left(x-\cos\frac{k}{n}\pi-i\sin\frac{k}{n}\pi\right)$$

$$=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-\cos\frac{k\pi}{n}-i\sin\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\times\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2\cos\frac{k\pi}{n}x+1\right).$$

又因为

$$x^{2n}-1=(x^2-1)(x^{2n-2}+x^{2n-4}+\cdots+x^2+1),$$

于是①式得证。

［例 10］ 求证 (1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$；

(2) $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{7}+\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{7}+\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{7}=21$。

证明 令 $\theta=\frac{k\pi}{7}$，则有

$$\operatorname{tg}3\theta+\operatorname{tg}4\theta=0,$$

$$\frac{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}2\theta}{1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}2\theta}+\frac{2\operatorname{tg}2\theta}{1-\operatorname{tg}^2 2\theta}=0,$$

$$\operatorname{tg}\theta+3\operatorname{tg}2\theta-3\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}^2 2\theta-\operatorname{tg}^3 2\theta=0,$$

令 $\operatorname{tg}\theta=x$，则

$$x+\frac{6x}{1-x^2}-\frac{12x^3}{(1-x^2)^2}-\frac{8x^3}{(1-x^2)^3}=0,$$

$$(1-x^2)^3+6(1-x^2)^2-12x^2(1-x^2)-8x^2=0,$$

$$x^6-21x^4+35x^2-7=0.$$

∴ 因为据原设 $\operatorname{tg}\frac{k\pi}{7}(k=1, 2, 3)$ 满足上式，所以 $\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{7}$ $(k=1, 2, 3)$是

$$y^3-21y^2+35y-7=0$$

的根，由代数中多项式的根与系数关系即得证。

［例 11］ 求证

$$\sin\varphi\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{n}\right)\cdots\sin\left(\varphi+\frac{n-1}{n}\pi\right)=\frac{\sin n\varphi}{2^{n-1}}.$$

证明 令

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1.$$

$$z=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi,$$

则

$$1-\cos 2n\varphi-i\sin 2n\varphi=1-z^n=z^n\left(\frac{1}{z^n}-1\right)=z^n(x^n-1)$$

$$=z^n(x-\varepsilon_0)(x-\varepsilon_1)\cdots(x-\varepsilon_{n-1})$$

$$=(1-\varepsilon_0 z)(1-\varepsilon_1 z)\cdots(1-\varepsilon_{n-1}z)$$

$$=\prod_{k=0}^{n-1}(1-\varepsilon_k z)$$

$$=\prod_{k=0}^{n-1}\left[1-\cos\left(2\varphi+\frac{2k\pi}{n}\right)-i\sin\left(2\varphi+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$=\prod_{k=0}^{n-1}2\sin\left(\varphi+\frac{k\pi}{n}\right)\left[\cos\left(\varphi+\frac{k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\varphi+\frac{k\pi}{n}\right)\right](-i)$$

$$=2^n(-i)^n\cdot 左\cdot\left[\cos\left(n\varphi+\frac{n-1}{2}\pi\right)+i\sin\left(n\varphi+\frac{n-1}{2}\pi\right)\right]$$

$$=2^n\left(\cos\frac{-n\pi}{2}+i\sin\frac{-n\pi}{2}\right)\cdot 左$$

$$\cdot\left[\cos\left(n\varphi+\frac{n-1}{2}\pi\right)+i\sin\left(n\varphi+\frac{n-1}{2}\pi\right)\right]$$

$$=2^n\cdot 左\cdot\left[\cos\left(n\varphi-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(n\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=2^n\cdot 左\cdot(\sin n\varphi-i\cos n\varphi).$$

由代数知，两复数相等时实部、虚部分别相等．取上式中两边的虚部，即得

$$2^n\, 左\cos n\varphi=\sin 2n\varphi=2\sin n\varphi\cos n\varphi,$$