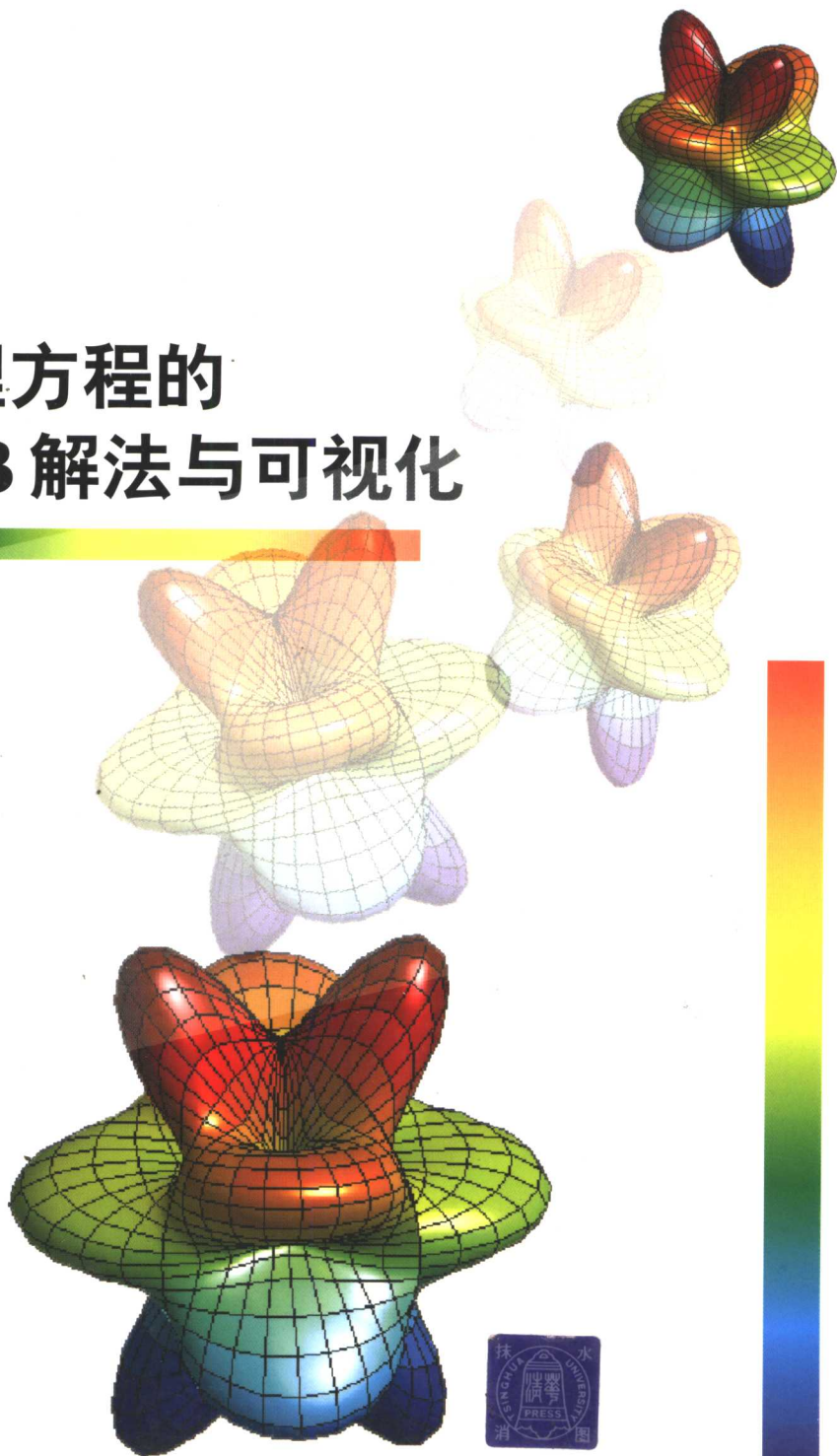


数学物理方程的 MATLAB 解法与可视化

彭芳麟 著

清华大学出版社



清华大学出版社

清华大学出版社

数学物理方程的 MATLAB 解法与可视化

王 明 著

清华大学出版社



数学物理方程的 MATLAB 解法与可视化

彭芳麟 著

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍如何用科学计算软件 MATLAB 数值求解数学物理方程并将结果可视化。书中展示了在教材中难得一见的复变函数图形、特殊函数图形和各类本征函数图形,还有拉普拉斯方程、热传导方程和波动方程的各种题型的数值求解与可视化的结果,内容新颖,方法独特,让枯燥的公式伴之以生动的图像,让深奥的内容有了鲜明的物理图像,是学习数学物理方法极有价值的参考书。本书也详细地介绍了 MATLAB 的偏微分方程工具箱与解偏微分方程和本征值方程的其他指令,还介绍了差分方法和有限元方法。对学习数值计算或计算物理课程而言,这也是一本很实用的参考教材。本书的程序来之于教学实践,有许多经验心得体现在编程的技巧中,例如特殊函数的计算、矢量场线的画法,这些技巧不仅实用,也很有特色。书中提供了全部例题的程序,可以将这些程序直接当作多媒体课件来使用。本书可供大学生、研究生和科技工作者使用。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13901104297 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

本书防伪标签采用清华大学核研院专有核径迹膜防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程的 MATLAB 解法与可视化/彭芳麟著. 北京:清华大学出版社,2004.11

ISBN 7-302-09884-0

I. 数… II. 彭… III. 数学物理方程—数值计算:计算机辅助计算—软件包, MATLAB IV. O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 114657 号

出 版 者:清华大学出版社

地 址 北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn>

邮 编 100084

社 总 机 010 62770175

客户服务 010 62776969

责任编辑:宋成斌

印 装 者:北京嘉实印务有限公司

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:175×245 印 张 20 25 插 页 2 字 数 410 千字

版 次:2004 年 11 月第 1 版 2004 年 11 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-09884-0 O·421

印 数:1~3000

定 价:33.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770175 3103 或(010)62795704

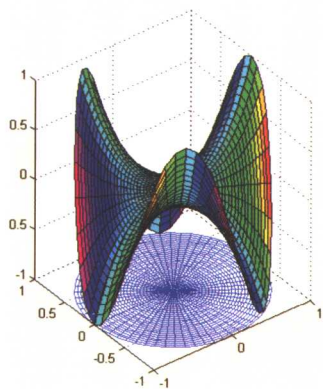


图 1.2 复变函数 z^3 的图形

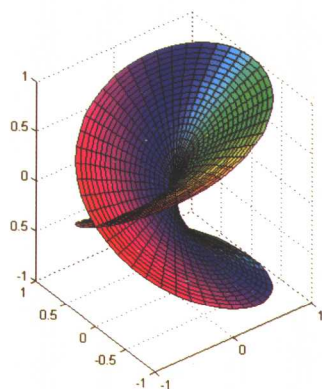
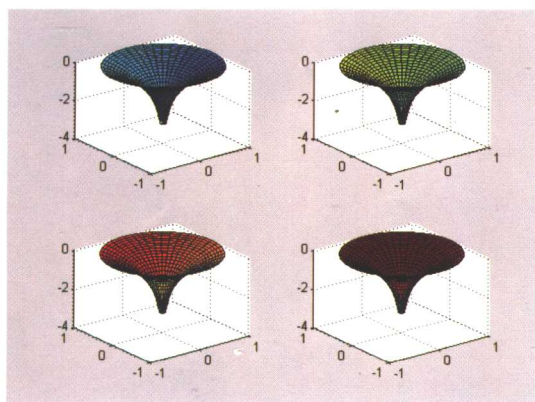
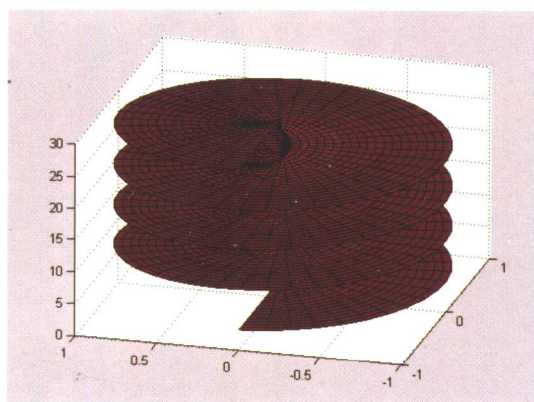


图 1.3 复变函数 $z^{1/2}$ 的图形



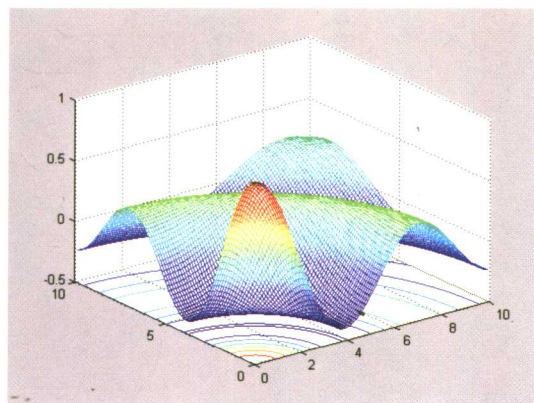
z 轴为 $\ln z$ 的实部

图 1.9 复变函数 $\ln z$ 的图形

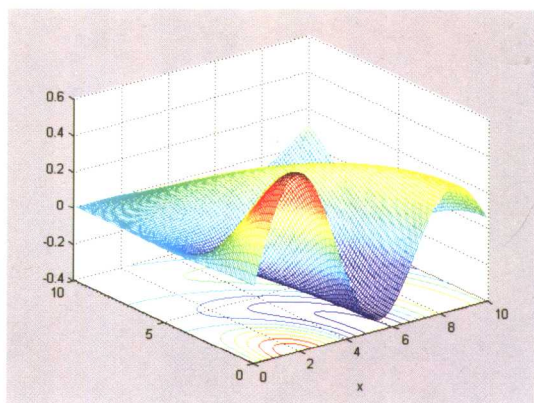


z 轴为 $\ln z$ 的虚部

图 1.10 复变函数 $\ln z$ 的图形

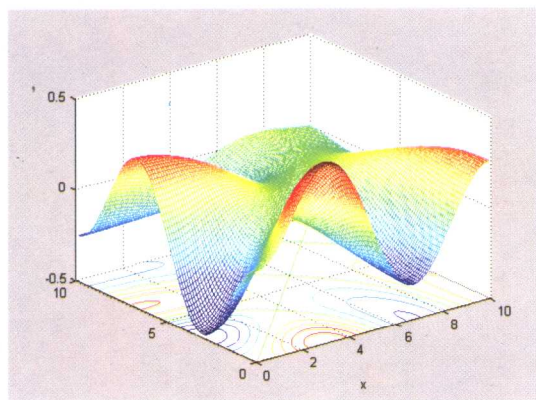


$m=0$

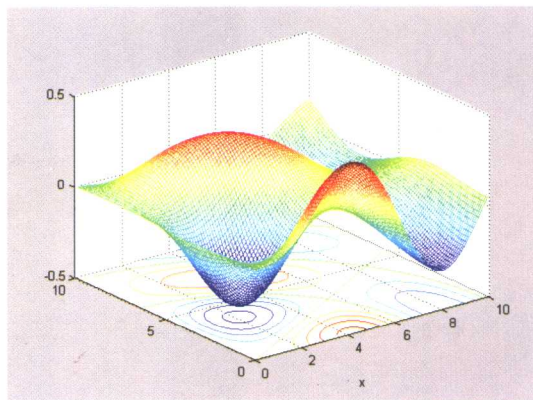


$m=1$

图 2.14 柱面波之一

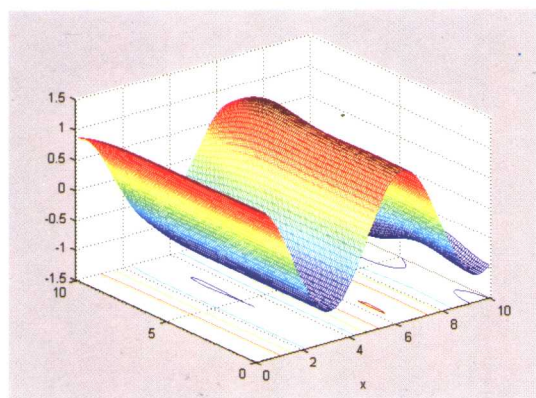


$m=2$

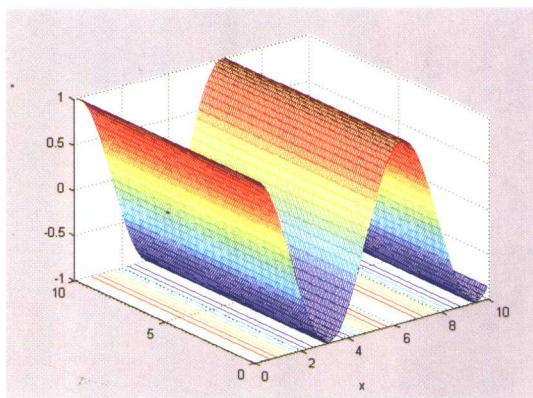


$m=3$

图 2.15 柱面波之二

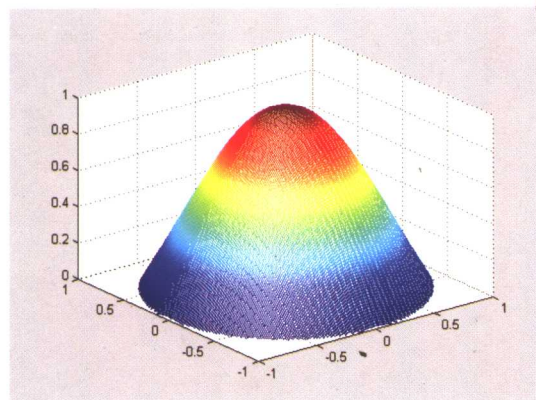


10 个柱面波的迭加效果

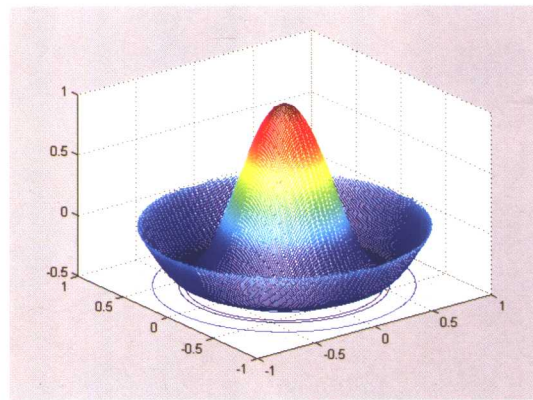


20 个柱面波的迭加效果

图 2.17 柱面波迭加效果

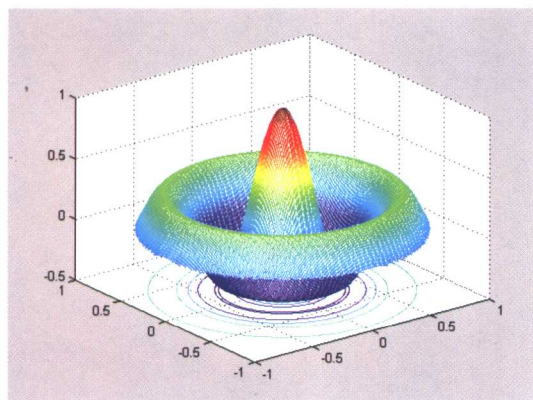


$m=0, n=0$

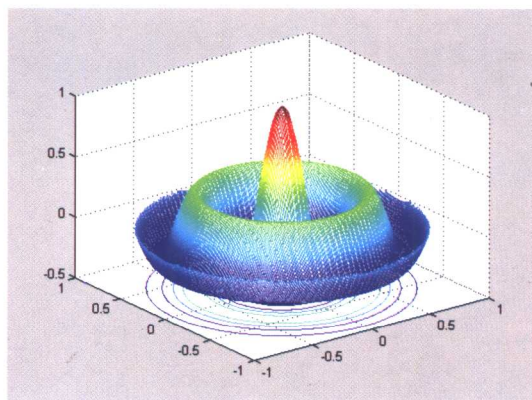


$m=0, n=1$

图 3.10 圆域本征函数之一

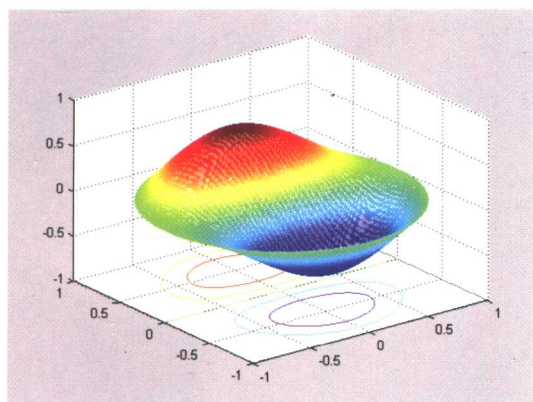


$m=0, n=2$

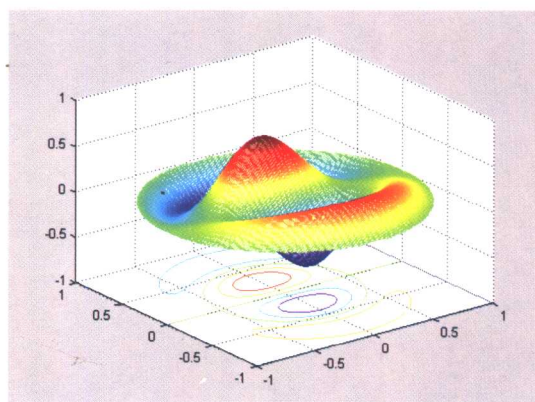


$m=0, n=3$

图 3.11 圆域本征函数之二

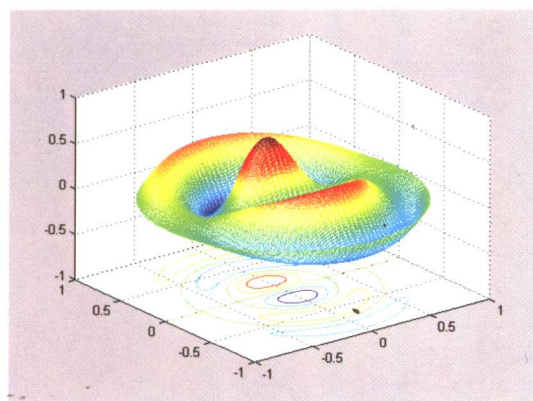


$m=1, n=0$

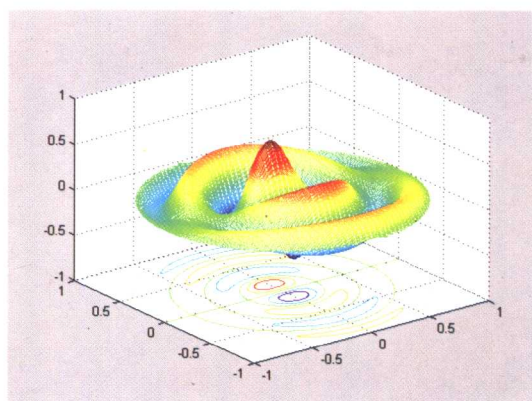


$m=1, n=1$

图 3.13 圆域本征函数之三

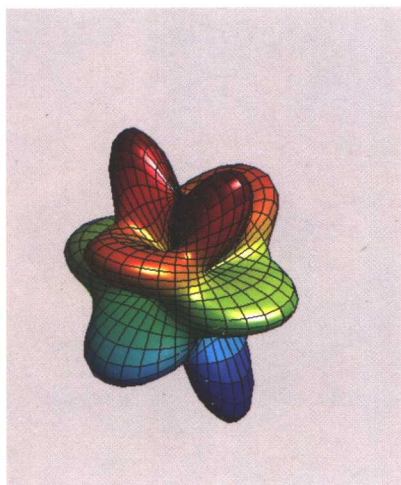


$m=1, n=2$

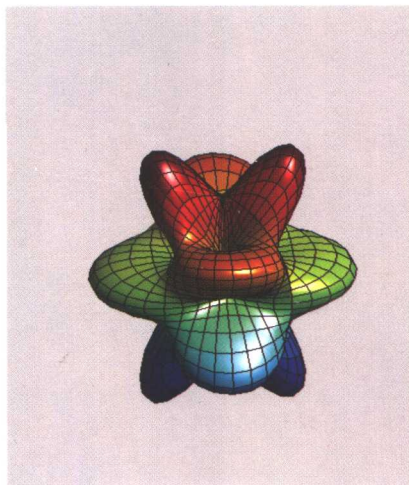


$m=1, n=3$

图 3.14 圆域本征函数



球谐函数($l=6, m=2$)的实部



球谐函数($l=6, m=2$)的虚部

图 3.25 球谐函数图形

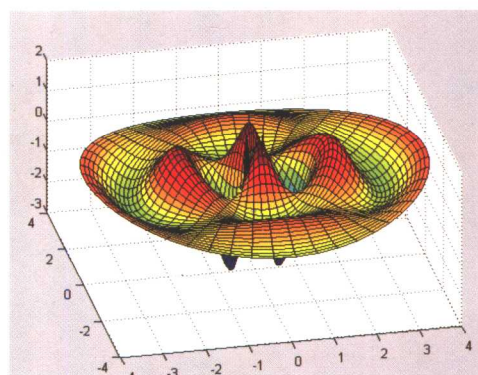
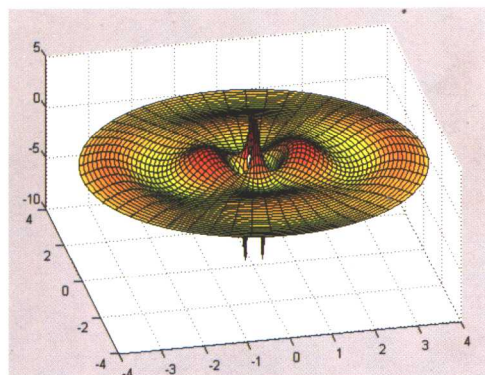
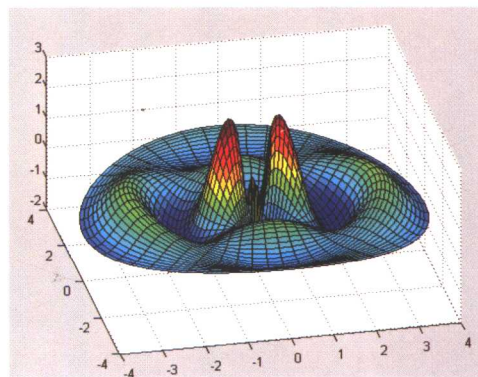
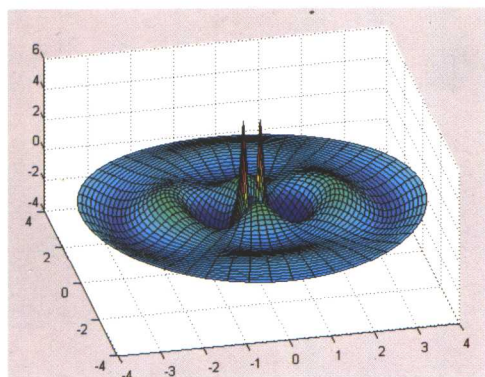


图 6.32 四极声源发射的声波

前 言

本书介绍如何用科学计算软件 MATLAB 数值求解数学物理方程及将结果可视化,这是我们在进行数学物理方法课程的数字化教学中做的一些工作。书中提供了全部程序,因而读者不仅可以从中学到解题的方法,还可以将这些程序直接当作多媒体课件来使用。

数学物理方程主要是偏微分方程,考虑到有的读者可能不熟悉 MATLAB 在这方面的应用,本书用附录的形式详细地介绍了 MATLAB 偏微分方程工具箱的使用方法,以及其他一些可用于解偏微分方程的指令和解常微分方程本征值问题的指令,此外还介绍了差分方法、有限元方法解偏微分方程。从这一点来看,本书也是一本介绍用 MATLAB 解偏微分方程的很实用的参考书。为了将结果可视化,书中涉及对多种特殊函数的计算以及物理场如矢量场线的画法,这些技巧不仅实用,也很有特色。

数学物理方法是众多理工科学生的基础课程之一,也是科研人员常用的基本方法。但是,数学物理方法课程的内容多而难,题目繁而杂,是一门公认的较难的课程。教学基本是用公式推导,所得的结果往往是一个复杂的积分或级数,其中还免不了使用特殊函数。尽管数学物理方法的习题通常都有明确的物理意义,可是怎么能够使学生从让人眼花缭乱的数学表达式中看出其中所表达的物理图像,恐怕不仅学生会感觉困惑,教师也难免觉得棘手。由此不难理解,为什么许多学生都觉得数学物理方法太枯燥乏味了。如何让这些公式中的物理图像展现出来,让这些无言的公式“开口说话”,这正是本书所追求的目标。

显然,这个工作离不开数值计算及其可视化。原则上,可以用 FORTRAN 或 C 语言来完成这个任务,但并没有人实际去这样做,原因是成本太高。幸运的是,高性能数学软件与有强大计算能力的个人计算机让这件事变得容易起来,本书就是一个明证。书中,我们选择了数学物理方法教材各章节中的各种题型作为求解实例,并将结果用图形甚至动画表现出来,以此来展现问题的物理图像。

例如,书中有个例子是研究环形电流的磁场。该题可以用三种不同方法计算,所得结果分别用连带勒让德函数的广义傅里叶级数表示,用椭圆函数的积分表示或者直接用数值积分表示,那么这些形式各异的结果是一致的吗?它跟实验的结果相同吗?谁都会对这个问题感到好奇,可是又觉得难以定论。但是,当我们画出它们的电力线以后,就会看到什么叫殊途同归。虽在意料之中,还是不得不惊叹数学的神奇。尤其对初学本课程的学生来说,留给他们的影响是极其深刻的,甚至也许是终生难忘的。

书中还有许多这类例子,比如平面波展开为球面波,平面波展开为柱面波,达朗贝尔行波公式与有界弦振动之间的联系,当我们用图形和动画模拟出这种结论时,学生对广义傅里叶级数的公式无疑会有更深的理解,而且对不同章节,不

同领域的内容之间的联系也有了切身的体会。所以这些都会给人以面貌一新的感觉,它改变了只能用公式符号教学的模式,对教学效果肯定会有提高。

编写本书的动机起源于教学。早在 2001 年,我们在教改中为了帮助学生学习数值计算,给本科生尝试开设了选修课——理论力学计算机模拟。这是首次在物理系的教学引进数学软件。试验十分成功,这届学生不仅成为我系第一批会用数值求解常微分方程的学生,而且表现出巨大的学习热情,做出了许多出色的、有创造性的工作。我们将这些成果总结成为《理论力学计算机模拟》一书,在书中介绍了用计算机软件 MATLAB 解常微分方程的方法,并且用它求解了理论力学中一些典型的线性与非线性问题,还将结果做成模拟系统运动的动画,随光盘与书一起发行。这个工作在探索理论力学教学改革、计算物理教学和多媒体教学结合方面,获得了一些有益的经验。该书受到高校教师的广泛好评,该书的工作曾获首届全国大学物理教学优秀论文一等奖,以及中国物理学会举办的第三届全国多媒体与网络物理教学成果评比一等奖。

随着教改的深入、经验的积累以及学生能力的提高,原来安排的只学习数值求解常微分方程的内容已经不能满足学生的需求。于是我们在课程中又增加了数值求解偏微分方程的内容,同样受到学生的热烈欢迎。而这些内容正好是数学物理方法课程多媒体教学所需要的。所以我们因势利导,开展了数学物理方法多媒体教学的一些工作。本书中的程序就是这些新的教学内容的总结与系统化。这个工作获得北京市教改立项项目“理论物理数字化教学的探索”的资助。书中部分内容曾经在 2002 年兰州的全国数学物理方法教学会议和 2003 年南宁的全国理论力学教学会议上作过介绍,引起了同行们的广泛兴趣。另外,这方面最初的工作曾在 2002 年在澳门举办的第四届全国多媒体与网络物理教学成果评比中获一等奖。

本书内容安排的顺序与常规教材有所不同,主要是按主题内容或方程分类,这是因为我们考虑的是数字化教学的需要,侧重介绍数值解法或者将解析结果可视化。它区别于教材中以方法分类的知识体系,是以问题分类的知识体系,这对学生学过的知识能起到复习巩固提高的作用。六章的内容分别是函数图形,傅里叶变换,本征函数,拉普拉斯方程,热传导方程和波动方程。为了节约篇幅,在讨论方程的各章中,没有按照解法分类,也没有详细讨论求解过程,而是直接引用一些常见的教材如梁昆淼的教材中习题的题解。读者在使用时,需要参考有关的教材。在选题时,我们也注意尽量找有物理内容、可视化效果明显的习题。书中不仅给出了各题的计算结果,还公布了源程序,直接运行这些程序就能让教师和学生亲自领略将数理方程可视化的乐趣。这些程序曾经花费了我们不少的时间与精力,在教学中经过师生们的反复讨论和比较,有许多经验心得体现在编程的技巧与语句的运用中。这种做法与国外许多同类的书籍做法是一致的,目的是让读者

不仅能知道结果，而且能学会方法，同时也避免在类似的工作中因从头探索而走一些不必要的弯路。

作者水平有限，而所完成的又是一项探索性的工作，所以书中错漏之处，必然存在，敬请专家与读者指正。

最后，作者十分感谢清华大学出版社对本书出版所给予的大力支持，尤其是责任编辑宋成斌的热情支持与帮助。

本书所列出的源程序之电子文件版权为笔者所有，如有需要者，请用电子邮件联系。 Email:penf1@bnu.edu.cn 。

作 者

2004 年 10 月

目 录

第1章 函数图形	1
1.1 复变函数图形	1
1.2 特殊函数图形	16
1.2.1 Γ 函数	18
1.2.2 勒让德函数	19
1.2.3 贝塞尔函数	23
1.3 用 MAPLE 指令计算特殊函数	34
第2章 傅里叶级数与傅里叶变换	42
2.1 傅里叶级数、傅里叶积分与离散傅里叶变换	42
2.2 傅里叶变换的例题	48
2.3 广义傅里叶级数	53
2.3.1 勒让德函数的母函数	53
2.3.2 贝塞尔函数的母函数	55
2.3.3 平面波展开为球面波的叠加	56
2.3.4 平面波展开为柱面波的叠加	59
第3章 本征值函数系与本征振动	62
3.1 一维本征值问题	62
3.1.1 四种常见的本征函数系	62
3.1.2 本征函数系的图像及其运动图像	64
3.2 二维本征值问题	69
3.2.1 矩形区域的本征模与本征振动	69
3.2.2 圆形区域的本征模与本征振动	73
3.2.3 球函数的图形	80
第4章 拉普拉斯方程与泊松方程	85
4.1 二维拉普拉斯方程	85
4.1.1 矩形区域的拉普拉斯方程	85
4.1.2 阳光照射的圆柱	90
4.1.3 云与大地之间的电缆	92
4.2 三维拉普拉斯方程	93
4.2.1 静电场中的介质球	93

4.2.2	带有电荷的细圆环的电场	94
4.2.3	均匀圆盘的引力势	99
4.2.4	环形电流的磁感应强度	103
4.2.5	柱体内温度场分布之一 (J_ν 的应用)	115
4.2.6	柱体内温度场分布之二 (J_ν 的应用)	117
4.2.7	柱体内温度场分布之三 (I_0 的应用)	119
4.2.8	圆柱内的温度场 (I_0 的应用)	122
4.2.9	电子透镜 (J_0, I_0 的应用)	124
4.2.10	柱体外的电势 (K_0 的应用)	128
4.3	泊松方程与格林函数	130
4.3.1	矩形区泊松方程	130
4.3.2	球域的格林函数	132
4.3.3	圆域的格林函数	135
第 5 章	热传导方程	139
5.1	一维热传导问题	139
5.1.1	无限长细杆的热传导	139
5.1.2	有限长细杆的热传导	141
5.1.3	输运问题 (非齐次方程)	143
5.1.4	第三类边界条件下的细杆导热问题	146
5.2	二维热传导问题	147
5.3	三维热传导问题	149
5.3.1	球体内的热传导问题之一 (j_0 的应用)	149
5.3.2	柱体内的热传导	152
5.3.3	球体内的热传导问题之二 (j_1 的应用)	153
第 6 章	波动方程	156
6.1	一维波动问题	156
6.1.1	无限长的弦的自由振动	156
6.1.2	两端固定的弦振动问题之一 (初位移不为零初速为零)	160
6.1.3	两端固定的弦振动问题之二 (初位移为零初速不为零)	167
6.1.4	两端固定的弦振动问题之三 (有阻尼)	170
6.1.5	两端固定的弦振动问题之四 (有驱动力)	172
6.1.6	两端固定的弦振动问题之五 (质量不均匀的弦)	175
6.1.7	非齐次边界条件下弦的振动	177
6.1.8	杆的纵振动	180

6.2	二维波动问题	183
6.2.1	矩形膜的振动	183
6.2.2	圆膜的振动	186
6.3	三维振动问题	187
6.3.1	柱体内的振动	187
6.3.2	柱体外的振动问题之一	188
6.3.3	柱体外的振动问题之二	189
6.3.4	偶极声源	190
6.3.5	四极声源	196
第7章	MATLAB 的偏微分方程工具箱	200
7.1	偏微分方程工具箱的功能演示	200
7.1.1	泊松方程	201
7.1.2	亥姆霍兹方程	202
7.1.3	最小表面问题	203
7.1.4	区域分解方法	203
7.1.5	热传导方程	204
7.1.6	波动方程	205
7.1.7	椭圆型方程自适应解法	205
7.1.8	泊松方程快速解法	206
7.2	偏微分方程工具箱的功能	207
7.2.1	可解方程的类型	207
7.2.2	边界条件	208
7.3	工具箱的用户界面窗口	208
7.4	用工具箱解偏微分方程的步骤	210
7.4.1	设置定解问题	210
7.4.2	解方程	210
7.4.3	将结果可视化	211
7.4.4	有特定解法的问题类型	211
7.4.5	如何解三维问题	212
7.5	用图形用户界面窗口的工具栏解方程	212
7.5.1	解方程的步骤	212
7.5.2	一个简单的例子	217
7.6	图形用户界面窗口的菜单	223
7.7	工具箱的指令	243
7.8	例 题	248

7.8.1	散射问题	248
7.8.2	放射性杆中的热传导问题	253
7.8.3	薄膜振动问题	254
7.8.4	本征值问题	256
7.8.5	导电介质中的直流电流	258
7.8.6	热传导问题	259
第 8 章	解微分方程的其他方法	262
8.1	指令 bvp4c 解本征值问题	262
8.1.1	用指令 bvp4c 解一维本征值问题	262
8.1.2	有两个解的边值问题	266
8.1.3	Mathieu 方程的本征值	268
8.1.4	艾登 (emden) 方程	270
8.1.5	Falkner-Skan 边值问题	272
8.1.6	在 $x = 0$ 处有突变的问题	274
8.2	用 pdepe 解一维初值边值问题	276
8.2.1	指令 pdepe 的用法	276
8.2.2	例题	279
8.3	差分法	292
8.4	有限元法	295
8.4.1	变分原理	295
8.4.2	计算格式	296
8.4.3	强加边界条件处理	301
8.4.4	有限元方法的例子	302
参考文献		312

第1章 函数图形

在学习初等函数时，我们总是先画出它们的图形，因为图形能帮助我们了解函数的性质。复变函数和特殊函数是数学物理方法课程中常用的基本函数，原则上也应该了解这些函数图形的画法。可是画出它们的图形并不容易。因为复变函数的自变数是复数，函数值也是复数，如果要画复变函数的图像，就有四个量需要表示，显然三维图形是不能完整地表现复变函数的图像。因此一般很少看到复变函数的图形。另外画特殊函数的图形涉及到特殊函数的函数值的计算，所以作图也不容易。尤其特殊函数值的计算在数值计算中也是一个很重要的内容。所以本章我们介绍如何用 MATLAB 计算复变函数和特殊函数并画出它们的图形。

1.1 复变函数图形

复变函数与实变函数的计算在 MATLAB 中是相同的，因为 MATLAB 可以作复数运算。所以不管自变量是实数还是复数，都是将自变量的值直接代入函数表达式中去进行计算。要强调的是，对于多值函数，MATLAB 仅仅是对主值进行计算。

下面是几个计算例子：

- (1) $3+5i/(1+i)$
- (2) $(2+3i)^(1+2i)$
- (3) $\sin(4+5i)$
- (4) $\ln(3+2i)$
- (5) $\log(3+2i)$
- (6) $\sinh(3+2i)$
- (7) $e(4+3i)$

在指令窗中，按下面的格式输入有关的指令，就可以看到结果。在这里，>> 是指令提示符，ans 后面是计算机输出的结果，在它的前面就不会出现指令提示符 >>。注意自然对数的计算指令是 log，而以 10 为底的对数的计算指令是 log10。双曲函数的计算指令是 sinh 而不是 sh。计算以 e 为底的指数的指令是 exp。

```
>> 3+5i/1+i
ans = 3.0000 + 6.0000i
>>(2+3i)^(1+2i)
ans = -0.4640 - 0.1995i
>> sin(4+5i)
ans = -56.1623 -48.5025i
```

```
>> log(3+2i)
ans = 1.2825 + 0.5880i
>> log10(3+2i)
ans = 0.5570 + 0.2554i
>> sinh(3+2i)
ans = -4.1689 + 9.1545i
>> exp(4+3i)
ans = -54.0518 + 7.7049i
```

为了能形象地表示复变函数的特性,可以像研究实变函数一样,画出它的图像。MATLAB 表现四维数据的方法是用三个空间坐标再加上颜色,类似于地球仪用颜色表示海洋与高山一样。用这个方法可以画出复变函数的图形,从图形上很容易看出复变函数的某些基本性质,例如单值函数是单叶的,而多值函数则是多叶的;复三角函数的绝对值可以大于 1 等。MATLAB 称这个方法为复变函数的映射。具体的画法是以 xy 平面表示自变量所在的复平面,以 z 轴表示复变函数值的实部,而用颜色来表示复变函数值的虚部。为了能明确地表示颜色与数值的对应关系,通常还要使用指令 `colorbar` 来标明各种颜色所代表的数值。

1. MATLAB 画复变函数图形的指令

MATLAB 画复变函数的图形的指令有以下 3 个:

1) **CPLXGRID** 构建一个极坐标的复数数据网格
指令的使用格式是

Z = CPLXGRID(m)

这是一个 $(m+1) \times (2*m+1)$ 的复数的极坐标下的数据网格。

在指令窗输入 `edit cplxgrid`, 屏幕将显示它的源程序如下, 可以参考它来编写自己专用的程序。

```
function z = cplxgrid(m)
r = (0:m)'/m;
theta = pi*(-m:m)/m;
z = r * exp(i*theta);
```

2) **CPLXMAP** 对复变函数作图

指令的使用格式如下: