



思维 魔方

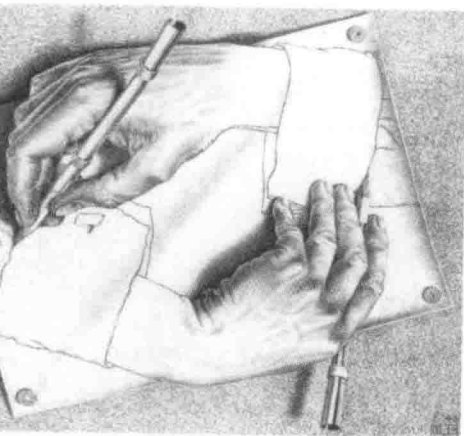
让哲学家和数学家
纠结的悖论

陈波 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

沙发图书馆



思维魔方

让哲学家和数学家
纠结的悖论

陈波 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

思维魔方：让哲学家和数学家纠结的悖论 / 陈波著. —北京：北京大学出版社，2014.6

(沙发图书馆)

ISBN 978-7-301-24190-5

I. ①思… II. ①陈… III. ①悖论—哲学—逻辑 IV. ①O144.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 086721 号



书 名：思维魔方——让哲学家和数学家纠结的悖论

著作责任者：陈 波 著

责任编辑：王立刚

标准书号：ISBN 978-7-301-24190-5/B · 1198

出版发行：北京大学出版社

地 址：北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址：<http://www.pup.cn> 新浪官方微博：@北京大学出版社

电子信箱：sofabook@163.com

电 话：邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62755217 出版部 62754962

印 刷 者：北京中科印刷有限公司

经 销 者：新华书店

730 毫米 × 1020 毫米 16 开本 21 印张 275 千字

2014 年 6 月第 1 版 2014 年 6 月第 1 次印刷

定 价：48.00 元

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究

举报电话：010-62752024 电子信箱：fd@pup.pku.edu.cn

理智的突围（序）

非技术地说，“悖论”意味着“理智的困境”，“消解悖论”则近似于“理智的突围”。从这个角度看，“悖论”对于人类理智来说，既具有“消极”意义，又具有“积极”意义。

人类理智与“悖论”的缠斗有悠久的历史。在古希腊早期，就发现了很多悖论，如“说谎者”、“秃头”、“谷堆”、“鳄鱼”等。其中，说谎者悖论的原初形式“所有的克里特岛人都说谎”还被载入《圣经·新约》的《提多书》中，在西方世俗社会和学术界都有很大的影响力。在古希腊时期，据说有个叫做“斐勒塔”的人潜心研究说谎者悖论，结果把身体也弄坏了，瘦骨嶙峋，为了防止被风刮跑，不得不在身上带上铁球和石块，但最后还是因积劳成疾而一命呜呼。为了提醒后人免蹈覆辙，他的墓碑上写道：“科斯的斐勒塔是我 / 使我致死的是说谎者 / 无数个不眠之夜造成了这个结果。”在欧洲中世纪和近现代，对悖论的研究绵延不绝，一度还占据中心位置，例如悖论与第二次和第三次数学危机。在中国古代，庄子提出“吊诡”一说，意指巨大且艰深的理智难题，与“悖论”庶几近之；墨家提出“悖”概念，并探讨了与说谎者悖论相近的东西：“以言为尽悖，悖，说在其言。”

悖论对于人类理智的“消极”意义在于，它们促使我们注意到：我们思维的最基本的概念出了问题，我们思维的最基本的原则隐藏着风险，我们得到广泛证实且被普遍应用的理论甚至能导出矛盾、荒谬和悖论！在此之前，我们通常认为，它们是如此明显正确，确定无疑，理所当然，几乎放之四海而皆准。这样的发现对于严肃的科学家来说是一种折磨——理智和情感方面的双重折磨。在物理学的“两朵乌云”所带来的新发现（量子力学和相对论）面前，有的科学家手足无措，甚至说“我恨自己没有



在几年前死去”；面对以罗素悖论为代表的各种集合论悖论，有的科学家以近乎悲凉的心情说出了这样的反讽式句子：“数学和集合论不再是无用的了，它们可以导出悖论！”但是，甚至悖论所带来的这种影响也不完全是消极的：它们提醒我们去限制人类理智的狂妄，倡导人类理智的谦卑，促使我们注意到：还有很多未知的理智陷阱隐藏在前进的途中，还有很多未解之谜摆在人类理智面前！

悖论对于人类理智的“积极”意义在于：它们以触目惊心的形式向我们揭示了问题，发出了挑战。人类理智不得不正面迎战：问题究竟出在哪里？矛盾和悖论是如何导出的？我们思维中的哪些基本概念、基本原则、常识、公理等等隐含问题？如何改善和修正它们？有多少种办法和途径去改善和修正？如何构造出更好的免除了矛盾和悖论的科学理论？如此等等。由此带来的结果是：科学理论的更新和发展，人类理智对外部世界认知的深化，以及人类理智对自身认知能力的自我认知的深化……

因此，“悖论”给我们打开了一个新的思维世界，提供了一个新的思维空间，里面有很多“暗道机关”，有许多“曲径通幽”，也有很多“死胡同”，有难以计数的“可能性”，智者、能者在这里可以找到腾挪滚打、尽情折腾、施展才华的舞台，他们有时会面临“山穷水尽疑无路”的困境，有时则会获得“柳暗花明又一村”的欣悦！在这方面，“悖论”是多么地像“魔方”啊：一个小小的魔方，置于你的手中把玩，它对你来说意味着：困难，诱惑，挑战，神奇，舞台，空间，思考，尝试，失败，成功，沮丧，喜悦，几乎是“一切的一切”！

这就是本书书名——《思维魔方》的由来。读者诸君，这本《思维魔方》已经摆在你的面前，准备迎接挑战吧！

是为序。

陈 波

2014年3月20日于日本东京

Are You Ready?

逻辑预备知识

一、逻辑逻辑符号说明

命题变项符号：

小写字母 p, q, r, s, t 等表示任一命题。如 p 可以代表“樱桃红了”。

命题联结词符号：

“ $\wedge$ ”，表示“并且”，如“樱桃红了并且芭蕉绿了”可以写成 $p \wedge q$ ；

“ $\vee$ ”表示“或者”，如“李冰能力很强或者李冰品德高尚”可以写成 $p \vee q$ ；

“ $\rightarrow$ ”，表示“如果，则”，如“如果王强身高1.8米，则王强是高个子”可以写成 $p \rightarrow q$ ；

“ $\leftrightarrow$ ”表示“当且仅当”，如“ $x+5=0$ 当且仅当 $x=5$ ”可以写成 $p \leftrightarrow q$ ；

“ $\neg$ ”表示“并非”，如“并非所有的花都是有香味的”可以写成 $\neg p$ 。

这几类命题分别称为：联言命题（ $p \wedge q$ ）、选言命题（ $p \vee q$ ）、假言命题（ $p \rightarrow q, p \leftrightarrow q$ ）和负命题（ $\neg p$ ）。

个体变项符号：

小写字母 x, y, z 等表示论域（论证中所涉及的对象范围）中不确定的个体。随论域的不同，它们的值也有所不同，如果论域是“人的集合”，个体变项 x 就表示某个人；如果论域是“自然数的集合”，个体变项 x 就表示某个自然数。

个体常项符号：

小写字母 a, b, c 等表示特定的对象。随论域的不同，这些对象可以是0, 1, 长江, 长城, 毛泽东等。

谓词符号：

大写字母 F, G, R, S 等，经过解释之后，它们表示论域中个体的性质和个体之间的关系。一个谓词符号后面跟有写在一对括号内的适当数目的个体词，就形成最基本的公式，例如 $F(x), R(x, y), S(x, a, y)$ 。

跟有一个个体常项或个体变项的谓词符号是一元谓词符号，经过解释之后，表示论域中个体的性质。如 F 表示红色的，则 $F(x)$ 表示，个体 x 是红色的；跟有两个个体词的谓词符号是二元谓



词符号，依此类推，跟有 n 个个体词的谓词符号是 n 元谓词符号。

二元以上的谓词符号，经过解释之后，表示论域中个体之间的关系。例如， R 表示“大于”， $R(x, y)$ 等于是说“ x 大于 y ”；若以自然数为论域，令 a 为自然数1， S 表示“ $\dots + \dots = \dots$ ”，于是， $S(x, a, y)$ 等于是说“ $x + 1 = y$ ”。

量词符号：

“ $\forall$ ”和“ $\exists$ ”分别表示全称量词和存在量词。“ $\forall x F(x)$ ”读作“对于所有 x 而言， x 是 F ”，“ $x R(x, y)$ ”读作“存在 x 使得 x 与 y 有 R 关系”。

例如，“有的投票人赞成所有候选人，所以，所有候选人都有人赞成”这个推理，若用“ $T(x)$ ”表示“ x 是投票人”，用“ $H(y)$ ”表示“ y 是候选人”，用“ $R(x, y)$ ”表示“ x 赞成 y ”，则可表示为：

$$x(T(x) \wedge \forall y(H(y) \rightarrow R(x, y))) \rightarrow \forall y(H(y) \rightarrow \exists x(T(x) \wedge R(x, y)))$$

模态词符号：

“ $\square$ ”和“ $\diamond$ ”分别表示“必然”和“可能”，例如“ $\square p$ ”表示“必然 p ”，“ $\diamond p$ ”表示“可能 p ”。还有，“ Op ”表示“应该 p ”，“ Bp ”表示“相信 p ”，“ Kp ”表示“知道 p ”。

二、逻辑基本规律

有关正确思维的根本假定，也是理性的交谈能够进行下去的必要条件。

同一律：在同一思维过程中，一切思想（包括概念和命题）都必须与自身保持同一。它的作用在于保证思维的确定性。违反同一律所犯的逻辑错误有“混淆概念”、“偷换概念”、“混淆论题”、“偷换论题”等。

矛盾律：两个互相矛盾或互相反对的命题不能同真，必有一假。它的作用在于保证思维的一致性。违反矛盾律所犯的逻辑错误是“自相矛盾”。

排中律：两个互相矛盾的命题不能同假，必有一真。它的作用在于保证思维的明确性。违反排中律所犯的逻辑错误有“模棱两可”和“两不可”。

三、复合命题推理

把单个的简单命题作为不再被分析的原子，用命题联结词“并非”、“并且”、“或者”、“如果，则”、“当且仅当”等把它们连接起来，形成复合命题。复合命题推理是以复合命题做前提或结论的推理。

联言推理的有效式包括：合成式，分解式和否定式。

合成式是由分别肯定两个联言支，推出肯定由这两个联言支组成的联言命题，其形式是： p ， q ，所以 $p \wedge q$ 。例如，“孔子是伟大的教育家，孔子是伟大的思想家，所以，孔子既是伟大的教育家又是伟大的思想家”。

分解式是由肯定一个联言命题，推出其中的任一个联言支，其形式是： $p \wedge q$ ，所以 p ； $p \wedge q$ ，所以 q 。例如，“胡适是五四新文化运动主将，并且曾任北京大学校长；所以，胡适曾任北京大学校长”。

否定式是由否定一个联言支，而推出对包含这个联言支的联言命题的否定，其形式是： $\neg p$ ，所以 $\neg (p \wedge q)$ 。例如从“并非李白是一位著名的小说家”，可以推出：“并非李白既是伟大的诗人又是著名的小说家”。

选言推理分为，相容选言推理和不相容选言推理。

相容选言推理的有效式有否定肯定式和添加式。否定肯定式是由肯定一个相容选言命题并且否定其中的一个选言支，则推出必须肯定其中的另一个选言支。其形式是： $p \vee q$ ， $\neg p$ ，所以 q 。例如：“或者张三去巴黎或者李四去纽约，李四没有去纽约，所以，张三去了巴黎”。

添加式是由肯定选言命题的任一选言支，推出对选言命题的肯定。其形式是： p ，所以 $p \vee q$ ； q ，所以 $p \vee q$ 。例如，“雪是白的，所以，或者雪是白的或者卷心菜是蔬菜”，也可以“卷心菜是蔬菜，所以，或者雪是白的或者卷心菜是蔬菜”。

不相容选言推理的有效式有否定肯定式和肯定否定式。否定肯定式是由否定不相容选言命题的一个选言支，推出对它的另一个选言支的肯定。其形式是： $p \vee q$ ， $\neg p$ ，所以 q 。例如：“对于前进道路上的困难，或者战而胜之，或者被困难所吓倒。我们不能被前进道路上的困难所吓倒，所以，我们要战而胜之”。

肯定否定式是由肯定一个不相容选言命题的一个选言支，推出对它的另一个选言支的否定。其形式是： $p \vee q$ ， p ，所以 $\neg q$ 。例如：“或为玉碎，或为瓦全。宁为玉碎，所以，不为瓦全。”

假言推理有充分条件假言推理，必要条件假言推理和充分必要条件假言推理。

充分条件假言推理的有效式包括肯定前件式和否定后件式。肯定前件式是如果肯定一个充分条件假言命题，并且肯定它的前件，那么，必须肯定它的后件。其形式是： $p \rightarrow q$ ， p ，所以 q 。例如，“如果官员甲拥有不受监控的权力，官员甲就很容易导致腐败；官员甲确实拥有不受监控的权力，所以，官员甲很容易腐败”。否定后件式是如果肯定一个充分条件假言命题，并且否定它的后件，则必须否定它的前件。其形式是： $p \rightarrow q$ ， $\neg q$ ，所以 $\neg p$ 。例如，“如果小王患肺炎的话，则



他的体温会不正常地升高；但经检查，小王现在体温正常，所以，小王目前没有患肺炎”。

必要条件假言推理的有效式包括否定前件式和肯定后件式。否定前件式是如果肯定一个必要条件假言命题，并且否定其前件，则要否定其后件。其形式是： $p \leftarrow q, \neg p, \text{所以 } \neg q$ 。例如，“只有王梦溪年满18岁，他才有选举权和被选举权；王梦溪年仅16岁；所以他没有选举权和被选举权”。肯定后件式是如果肯定一个必要条件假言命题，并且肯定其后件，则要肯定其前件。其形式是： $p \leftarrow q, q, \text{所以 } p$ 。例如，“只有王梦溪年满18岁，他才有选举权和被选举权；王梦溪有选举权和被选举权；所以，他年满18岁”

有效的充分必要条件假言推理为：“这个三角形全等，当且仅当，它的三条边相等。已经证明，这个三角形的三条边相等，所以，这个三角形全等。”

四 几种常用的复合命题推理

(1) 假言易位推理

其内容是：如果一个充分条件假言命题的前件成立则后件成立，那么，如果其后件不成立则其前件不成立。例如：“如果你珍惜生命，那么请别浪费时间。所以，如果你浪费时间，那么，你并不珍惜生命”。其形式是：

如果 p 则 q ，
 所以，如果非 q 则非 p 。

(2) 假言三段论

其内容是：如果一个前提推出一个结论，并且如果该结论又可推出新的结论，则原来的前提可以推出该新结论。例如，“如果 x 能被6整除，则 x 能3整除；如果 x 能被3整除，则 x 能被1整除。所以，如果 x 能被6整除，则 x 能被1整除”。其形式是：

如果 p 那么 q ，
 如果 q 那么 r ，
 所以，如果 p 那么 r 。

(3) 反三段论

其内容是：如果两个前提能够推出一个结论，那么，如果结论不成立且其中的一个前提成立，则另一个前提不成立。例如“如果所有的鸟都会飞并且鸵鸟是鸟，则鸵鸟会飞；所以，如果鸵鸟不会飞并且鸵鸟确实是鸟，则并非所有的鸟都会飞”。其形式是：

如果 p 且 q 则 r

所以, 如果非 r 且 q 则非 p

(4) 归谬式推理

其内容是: 如果从一个命题出发能够推出自相矛盾的结论, 则这个命题肯定不成立。例如, “如果理发师张三给且只给不给自己理发的人理发, 那么他应该给自己理发; 如果理发师张三给并且只给不给自己理发的人理发, 那么他应该不给自己理发; 所以, 理发师张三并非只给不给自己理发的人理发”。其形式是:

如果 p 则 q

如果 p 则非 q

所以, 非 p

(5) 反证式推理

其内容是: 如果否定一个命题能够推出自相矛盾的结论, 则这个命题肯定成立。其形式是:

如果非 p 则 q

如果非 p 则非 q

所以, p

(6) 二难推理

例如, “如果上帝能制造出一块连他自己也举不起来的石头, 那么他不是万能的, 因为有一块石头他举不起来; 如果上帝不能制造出一块连他自己也举不起来的石头, 那么, 他也不是万能的, 因为有一块石头他造不出来。上帝或者能或者不能造出这块石头, 总之, 上帝不是万能的”。其形式是:

如果 p 则 q

如果非 p 则 q

p 或者非 p

所以, q

原来没有学过逻辑学、又想对逻辑学有所了解的读者, 可以阅读本书作者的两本逻辑学普及读物: 《逻辑学是什么》, 北京大学出版社, 2002年; 《逻辑学十五讲》, 北京大学出版社, 2008年。

目 录

逻辑预备知识 / 1

第一章 形形色色的悖论 / 3

- 一、悖论是什么？不是什么？ / 3
- 二、悖论有哪些类型？ / 16
- 三、如何合理地解决悖论？ / 18
- 四、悖论研究的意义 / 20



第二章 扰人的二难困境 / 25

- 一、苏格拉底的诘问法 / 25
- 二、师徒官司：半费之讼 / 32
- 三、鳄鱼悖论及其变体 / 35



第三章 有关上帝的悖论 / 45

- 一、伊壁鸠鲁悖论 / 47
- 二、全能悖论 / 49
- 三、全知悖论 / 52
- 四、恶和苦难问题 / 54
- 五、帕斯卡赌 / 55
- 六、克尔凯郭尔的神悖论 / 60





第四章 模糊性：连锁悖论 / 65

- 一、什么是模糊性？ / 65
- 二、一些典型的连锁悖论 / 67
- 三、模糊性理论概观 / 78



第五章 芝诺悖论和超级任务 / 83

- 一、芝诺悖论和归于不可能的证明 / 83
- 二、超级任务——芝诺悖论的现代变体 / 94

第六章 数学中的无穷和关于无穷的数学 / 109

- 一、数学中的无穷“悖论” / 109
- 二、关于无穷的数学：康托尔的贡献 / 116



第七章 语形悖论 / 127

- 一、一些典型的语形悖论 / 127
- 二、罗素的类型论 / 133



第八章 语义悖论 / 139

第九章 休谟问题和归纳悖论 / 153

一、休谟问题及其解决方案 / 153

二、归纳悖论和反归纳主义 / 163



第十章 概率统计悖论 / 181

一、蒙特·霍尔问题 / 181

二、睡美人疑难 / 184

三、小世界悖论 / 187

四、奇怪的遗嘱 / 188



第十一章 认知悖论 / 193



一、美诺悖论——古希腊时期的认知悖论 / 193

二、意外考试悖论及其变体 / 195

三、其他常见的认知悖论 / 205

四、普特南的“缸中之脑论证” / 220

五、一些认知逻辑的趣题 / 226

第十二章 决策和合理行动的悖论 / 231

一、囚徒困境及其分析 / 231

二、纽康姆悖论及其分析 / 238

三、其他决策与合理行动悖论 / 242





第十三章 一些道德悖论 / 261

一、关于道德原理的思考 / 261

二、一些典型的道德悖论 / 274

第十四章 中国文化中的怪论与悖论 / 391

一、邓析的“两可之说” / 291

二、惠施的“历物之意” / 294

三、“二十一事” / 296

四、公孙龙的“白马非马” / 301

五、庄子的“吊诡”之辞 / 303

六、韩非的“矛盾之说” / 310



结语 / 315

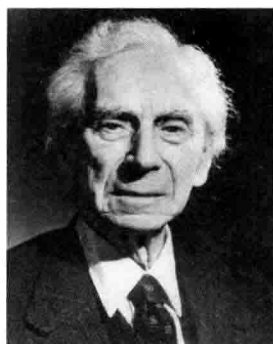
参考文献 / 320

美好的人生是为爱所唤起，并为知识所引导的。

我绝不会为了我的信仰而献身，因为我可能是错的。

对于自由而言，任何一种对他人不造成危害的快乐都值得珍视。

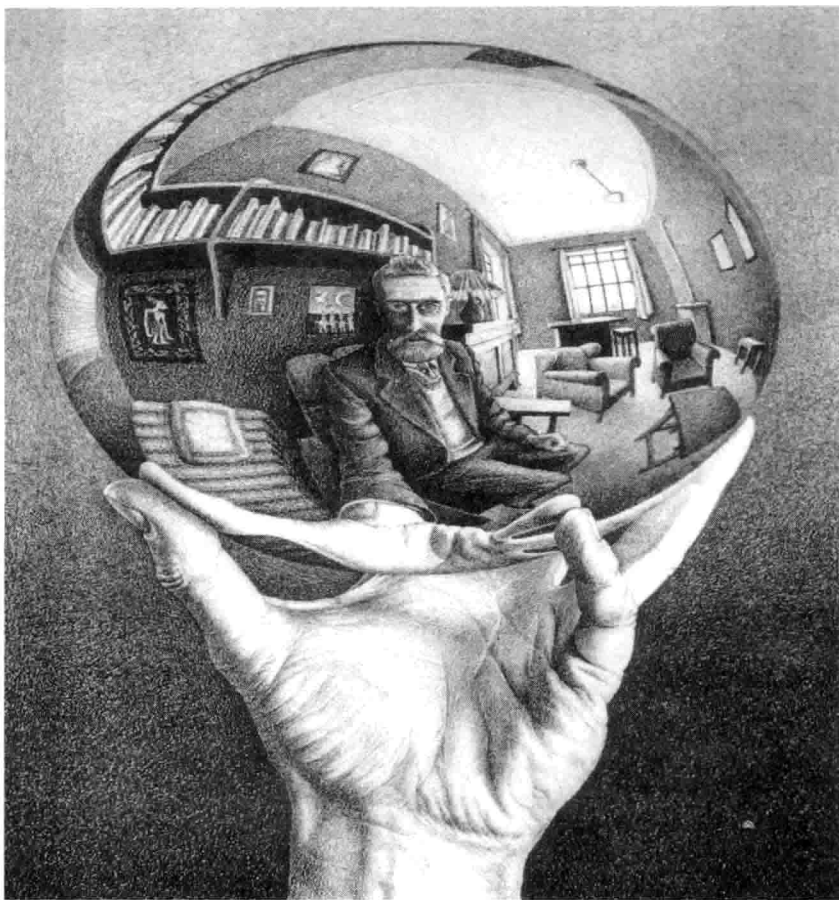
思想自由的最基本条件是不因观点的表达而受到法律的制裁。



——罗素

罗素 (B. Russell, 1872—1970)，英国哲学家，逻辑学家，社会活动家。他在自传中写道：“三种简单而又无比强烈的激情支配了我的一生：对于爱的渴望，对于知识的追求，以及对于人类苦难的难以遏制的同情心。”在这三方面，他都达到常人难以企及的高度。他执著地追求爱，要求过一种有意义的生活，先后爱过至少7位女性，结过4次婚。他同情人类苦难，广泛地参与或干预世界性政治事件，曾两度入狱；1955年，他与爱因斯坦共同发起并争取到众多著名科学家的支持，联名签署了著名的《和平宣言》。他对知识的追求近乎冠绝群伦，先后出版过71本书，论及哲学、逻辑学、数学、教育学、伦理学、社会学、政治学、经济学等众多领域。1950年，诺贝尔文学奖表彰其“多样且重要的作品，持续不断地追求人道主义理想和思想自由”。1921年，曾应邀来中国讲学，对中国学术界产生过很大的影响。

举着反射球的手
埃舍尔 1935



埃舍尔（M. C. Escher, 1898—1972），荷兰画家。他用他的绘画这个魔镜，给我们映现了一个神奇、错乱的空间，一个不可能的世界。

这是画家自己的一幅自画像，他聚精会神地注视着左手举着的反射球，右手正在细致地描绘自己见到的一切。毫无疑问，右手正在勾勒的线条，正是我们现在看到的这幅图的样子。在理想状态下，如果把球面反射出来的桌上的画完美地放大并旋转变形后，又能得到一幅和我们看到的这幅图一模一样的画——而这幅画里也有一个反射球，球里的埃舍尔也正在画着这幅图。画家并非由于疏忽，而是出于故意，设下了这么一个无限循环的世界。

第一章 形形色色的悖论

一、悖论是什么？不是什么？

“悖论”是英语词“paradox”的中译，后者源自于希腊词“παράδοξα”以及拉丁词“*paradoxa*”，其中前缀“para-”表示“超过，超越，与……相反等”，后缀“-doxa”表示“信念、意见、看法等”。从字面上说，悖论是指与公认的信念或看法相反的命题，或自相矛盾的命题，或荒谬的理论等。常与“paradox”在近似意义上使用的英文词还有：“antinomy”（二律背反，如康德的时空二律背反）、“riddle”（谜题，如古德曼的新归纳之谜）、“dilemma”（二难，如关于结婚的二难推理）、“predicament”（困境，如囚徒困境），“puzzle”（谜题，如弗雷格之谜、信念之谜），等等。所提到的这些概念和内容在本书后面都将予以介绍和讨论。



最早的悖论可追溯到公元前6世纪古希腊克里特岛人埃匹门尼德（Epimenides），他提出了说谎者悖论：“所有的克里特岛人都说谎”。若他的话为真，由于他也是克里特岛人之一，则他也说谎，故他的话为假。若他的话为假，则有的克里特岛人不说谎，他可能是这些不说谎的克里特岛人之一，故他说的可能是真话。这被载入《圣经·新约》的《提多书》中，因而在西方世俗社会和学术界都很有影响。此后，对悖论的研究一直绵延不绝，至少经历了两个高峰期，一是欧洲中世纪经院哲学家对悖论的研究，二是从19世纪末叶延续到今天的悖论研究。

在中国先秦时期，庄子提出的“吊诡”一说，仍被某些中国学者用