初等代数

北京市《初等数学》编写组编

人民教育出版社

初 等 代 数

北京市《初等数学》编写组编

人 民 教 育 出 版 社

1975 · 北京

内容提要

这套《初等数学》共分五册，即《初等代数》、《初等几何》、《三角函数》、《解析几何》及《公式和数表》，是一般科学技术读物.

各册内容努力选取三大革命运动中普遍需要的数学知识，并且注意突出基本规律及其辩证发展的线索. 为了便于自学，叙述力求详细，同时各章一般有小结，每册有总结，还配置了一定数量的练习题.

《初等代数》这一册共有以下九章：正和负，整式，一次方程，分式和根式，二次方程，不等式和线性规划初步，对数，数列和优选法简介，排列、组合与概率. 此外，还附有正交试验法简介.

这套《初等数学》可供广大工农兵、知识青年、中小学教师阅读参考.

初等代数
北京市《初等数学》编写组编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
1975年6月修订第1版　1976年12月第3次印刷
书号 13012·01　定价 0.94 元

毛主席语录

中国人民有志气，有能力，一定要在不远的将来，赶上和超过世界先进水平。

事物矛盾的法则，即对立统一的法则，是自然和社会的根本法则，因而也是思维的根本法则。

人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

读书是学习，使用也是学习，而且是更重要的学习。

目　　录

引　　言

毛主席教导我们："胸中有'数'。这是说，对情况和问题一定要注意到它们的数量方面，要有基本的数量的分析。任何质量都表现为一定的数量，没有数量也就没有质量。"和算术一样，初等代数也是研究数量的运算规律的，这些运算规律是现实世界数量关系的反映，但它与算术有一个明显的区别，就是将广泛地用 a、b、c、x、y、z 等字母来代表数．为什么用字母代表数？这是首先遇到的一个问题，学习初等代数就从这里开始．

用字母代表数，是简明地表达数量关系的一般规律的需要．举例来说：

丈量土地要计算面积，如一块长方形土地，量得长是 38.5 丈，宽是 22 丈，这块土地面积就是 $38.5\times22=847$ 平方丈．概括为一般规律就是："任何长方形，其面积都是长和宽相乘"．我们用字母 S 代表"长方形面积"，a 代表它的"长"，b 代表它的"宽"，就得到一般公式

$$S=ab^{*}.$$

这个公式简单明白地表示了长方形面积和边长之间的普

* 字母和数、字母和字母相乘时，通常把"×"号记作"·"，或者省略不写．如 $a\times b$ 写成 $a\cdot b$ 或 ab；$2\times a$ 写成 $2\cdot a$ 或 $2a$；$a\times2$ 也写成 $2a$（不写成 $a2$）．但数和数相乘时，一般仍写"×"号．

遍关系．这是由特殊到一般．对于某个长方形，只要把长和宽的具体数值代入到式子 ab 中去，就能算出其面积 S．这是由一般到特殊．如 $a=7$ 米，$b=12$ 米时，

$$S=7\times 12=84(\text{平方米}).$$

我们看到，字母 a、b 代表数，但又不仅是代表一个具体的数．

上面，我们把“长方形面积等于长乘宽”写成“$S=ab$”，就是把一句话“翻译”成了数学式子．这种“翻译”工作很重要，是学习初等代数的一个基本功．例如

“三角形面积等于底乘高的一半”$\xrightarrow{\text{“翻译”}} S=\frac{1}{2}ah.$

（a 代表底，h 代表高，S 代表面积）

“梯形面积等于上底与下底之和乘高的一半”

$$\xrightarrow{\text{“翻译”}} S=\frac{1}{2}(a+b)h.$$

（a、b 分别代表上、下底，h 代表高，S 代表面积）

“距离等于速度乘时间”$\xrightarrow{\text{“翻译”}} s=vt.$

（v 代表速度，t 代表时间，s 代表距离）

同样，还可以用字母代数的方法，简明地表达数的运算规律：

加法交换律：　$a+b=b+a$

加法结合律：　$(a+b)+c=a+(b+c)$

乘法交换律：　$ab=ba$

乘法结合律：　$(ab)c=a(bc)$

加、乘分配律：　$(a+b)c=ac+bc$

其中 a、b、c 代表任何数. 这五个运算规律，是初等代数中贯穿始终的基本规律，总称为基本运算定律.

运用这些简明的运算规律，可以为实践中一系列计算问题提供简捷的方法.

例如，某校办工厂生产一批零件，其形状相同，如图 1，但尺寸有几种规格，为了计算面积，就需要找出一般的计算公式.

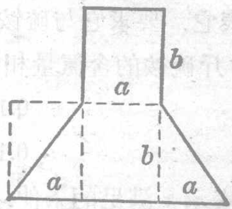

图 1

如图，零件面积 S 是一个长方形和一个梯形的面积之和，有

$$S=ab+\frac{1}{2}(a+3a)b. \tag{1}$$

由分配律，有 $a+3a=(1+3)a=4a$，

所以，
$$\begin{aligned} S&=ab+\frac{1}{2}\cdot 4ab \\ &=ab+2ab \\ &=(1+2)ab. \quad \text{(分配律)} \end{aligned}$$

最后得到

$$S=3ab. \tag{2}$$

公式(2)比公式(1)简单多了，很明显，采用公式(2)的形式进行计算，可以大大节省计算工作量.

初等代数的基本问题之一，就是把含有字母的式子化简，这对在实际工作中化简计算以及分析数量关系都有重要的意义.

初等代数的另一个基本问题，是根据未知数所满足的条件求出未知数.

例如，某中学“五七农场”的水稻试验田，原准备在缓苗期每亩施硫铵（含氮量为21%）15斤，现改用氨水（含氮量为14%），要达到同样效果，每亩应施用氨水多少斤呢？

在这个问题中，每亩施用氨水斤数是未知数，可以用字母 x 代表它．要求它与硫铵达到同样的效果，就是说：x斤氨水与15斤硫铵的含氮量相等，即有

$$0.14x=0.21\times15,$$

即

$$0.14x=3.15. \tag{3}$$

上式表示 x 满足的条件．这是已知两数的积和一个乘数，求另一个乘数的问题．用除法，得

$$x=\frac{3.15}{0.14}=22.5. \tag{4}$$

即每亩应施氨水22.5斤．

类似这样的问题在现实生活和生产中是很多的．

从三大革命运动中提出的上述两类问题，一是把含字母的式子由繁化简；一是根据含有代表未知数的字母的等式，将未知化为已知，繁和简、未知和已知都是矛盾着的双方，但在一定的条件下又互相转化．掌握初等代数的规律就是掌握数量的运算之间的转化规律．因此，必须用唯物辩证法作指导，来学习初等代数，在三大革命运动中不断培养分析和解决实际问题的能力，使数学成为社会主义革命和社会主义建设的有力工具．

第一章　正　和　负

我们已经知道，代数和算术的明显区别，是在代数里常用字母代表数，这是数学发展上的一大进步．

使用字母代数的方法，也带来了新的问题．例如：

我们要比较北京地区和外地的温度．如果北京现在是18度(本书中的温度单位都是摄氏)，天津是16度，这时北京的温度比天津高 $18-16=2$ (度)．一般把这个相差的温度叫做温差．可是北京和外地的温度都是变化的．我们很自然地希望有一个计算温差的一般公式，用"字母代数"的方法，这是可以做到的．用 a 表示北京的温度，b 表示外地的温度，T 表示温差，于是得出公式：

$$T=a-b.$$

如果北京是18度，长春是13度，代入公式，得：

$$T=18-13=5(\text{度}),$$

也就是北京比长春的温度高5度．这显然是对的．但是，如果要算北京对上海的温差，而上海是23度，于是代入公式，得：

$$T=18-23=?$$

用算术里学过的知识就没法计算．原因在哪里呢？

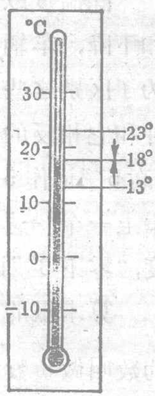

图　1-1

从实际情况来看，应该有

$$T=18-23=\text{低}\,5\,(\text{度}),$$

如图 1-1 所示. 可是我们已经用 5° 表示“高 5°”了，“低 5°”与“高 5°”的意义正相反，怎么表示呢？这个问题算术中没有解决，自然也就无法算了.

再说，温度这种量本身还有零上与零下之分，如果我们用 3° 表示零上 3°，那么零下 3° 怎么表示呢？

可见用算术里学过的数只能表示量的大小，不能同时表示量的方向. 因此，必须扩充数的概念，并且弄清楚它们的运算规律，这就是这一章要学习的主要内容.

第一节　正和负的意义

正数和负数

除温度以外，还有很多具有相反意义的量，如水位的上升和下降，车辆向东行驶和向西行驶，产量的增加和减少等等. 为了区别这些相反意义的量，把其中一种意义规定为正，另一种和它相反的意义规定为负. 正的量用算术里的数表示，如“高 5°”记作 5°，“零上 3°”记作 3°，负的量在这些数的前面添上一个“－”(负)号来表示，如“低 5°”记作 －5°，读作负五度，“零下 3°”记作 －3°，读作负三度.

算术里的数(除了零)都叫做正数，在它们前面添上“－”号的数叫做负数. 如，3, 5, $\frac{1}{3}$, 0.63 等都是正数，－3, －5, $-\frac{1}{3}$, －0.63 等都是负数.

0是个特殊的数，正如恩格斯所指出的，它是“既不是正又不是负的唯一真正的中性数”.

只差一个符号的两个数，如3和−3，我们说其中一个是另一个的相反数.

有时为了强调正数对于负数的相反性，在正数前面添上“+”(正)号，如4可以写成+4. 4和+4是一样的.

一般写正数时，都把“+”号省略.

正的整数和分数、负的整数和分数、零，统称为有理数.

数　轴

在日常生活中，用直尺上的刻度表示长度的大小，用温度计上的刻度表示温度的高低. 这实际上就是把有理数直观地用一条直线上的点表示出来.

画一条直线，在上面取一点O作为计算的起点，表示数0(图1-2)，叫做原点. 原点两边分别表示正和负，一般规定从左向右为正方向(用箭头表示)，从右向左为负. 再取一个度量单位. 这样规定了原点、方向和度量单位的直线，叫做数轴.

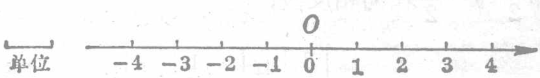

图 1-2

用这种方法，所有的有理数，都能用数轴上的点来表示.

例 把下列各数用数轴上的点表示出来:

$$2,\ -2,\ -3.5,\ 3.5,\ 7.$$

解: 先画数轴，然后在数轴上找出相应的点.