学习现代经济管理必读

经济数学

湖北财经学院
湖南财经学院 编译
周怀生 涂西畴 审校

学习现代经济管理必读

经济数学

湖北财经学院
湖南财经学院 编译
周怀生　涂西畴审校

湖南科学技术出版社

学习现代经济管理必读

经 济 数 学

湖北财经学院
湖南财经学院 编译

周怀生 涂西畴 审校

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1984年2月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：14.125 字数：321,000

印数：1——11,700

统一书号：13204·93 定价：1.95元

目　　录

序　言

现代经济学的数学色彩越来越浓厚，更多的人们对于在经济学中如何运用数学方法，给经济现象以定量的描述，兴趣日益增长。目前，将经济学和数学有机地结合起来，已成为经济学界和数学界共同关心的一个问题，并且，二者的结合逐步形成应用数学的一个重要分支——经济数学。日本小山昭雄、冈本哲治等教授编著的《经济数学》一书，是一部较新的专著，已多次再版发行，享有较高的声誉。本书现由湖北财经学院和湖南财经学院的几位同志协作编译，并由湖南科技出版社出版。

当前，我国正在大力推进经济建设，强调提高经济效益，在经济理论和实践中迫切需要数学这一有效的精确工具，而一些数学理论和方法又亟待转化为生产力，从这个意义上来看，本书将会发挥一定程度的作用。

这本书的目的是想把经济学和数学两者之间关系密切的部分融合一体，让读者一方面看到数学在经济学中的发展和开拓的新局面；另一方面，又看到经济学随着数学的进程不断精确化，并更新思想方法和技术。所以，本书的意图是想同时阐述数学和经济学，尤其是两者之间的边缘部分的知识。

由于数学和经济学都有自己独立的概念和理论体系，所以，常常不一定有完全相应的分支，而是互相穿

插渗透的。因此本书的章节安排，有的是以经济理论为纲，而用数学算式来刻划；有的是按数学系统性进行，而后应用于经济学的问题。它前后连贯，自成体系，简而不略，有条不紊，阐述完整而深入浅出。所举例题也很恰当。且多联系实际，每章末附有适量的习题，并有解答或提示。例如在《产业关联论》一章中，不仅讲到投入产出和基本方程，而且还从矩阵、特征根和微积分等理论，用静态和动态的观点对投入产出的基本理论进行了比较透彻的分析。又如在《对策论》中利用了对偶原理，这就使读者能较好地理解对偶性的经济意义和它对经济研究的普遍作用。再如，在常微分方程和差分方程中给出了经济动态模型。此外，还多处论述了价格理论、企业均衡、货币利率、多种商品市场的稳定条件以及CES生产函数等等。这不仅有利于从事经济研究的同志掌握数学方法，也有助于从事数学研究的同志了解数学在经济理论中的用处，比之无针对性地去啃几本经济学或数学专著，效果要好得多。

编译者结合近几年的教学、科研实践，编译了这本别具风格的《经济数学》。无论对于经济界或是数学界都算是一本使人读来饶有兴趣的好书。它用作财经院校教材或参考书都很适宜，且便于自学。因此，我们乐于向广大读者推荐。

周怀生、涂西畴、李宝光

1983.8.9.

编译说明

本书是根据日本学习院大学经济学部教授冈本哲治、小山昭雄和早稻田大学政治经济学部教授藏田久作等编著的《经济数学》一书编译而成，原书曾在日本多次再版，颇受欢迎。湖北财经学院崔国森、黎自任将全书译成中文，在国家经委举办的工业企业管理师资研究班试用过。同时，湖南财经学院万作新、周大庆、钟华玉译出原书的第一——七章，被财政部研究生班、干部进修班采用作为教学参考书。

为了介绍国外的经济数学方法，供我国广大经济工作者、数学工作者和财经院校师生参考、借鉴，在译稿的基础上进行了编写。考虑到内容的内在联系和便于教学、自学，对原书的顺序作了必要的调整。编译时，对原书中的错误和印刷中的问题，尽量作了改正。

本书的第一、二、三、四、十、十二章由湖南财经学院的米天林、万作新、袁桓编写，具体分工是：第一、二、三章由袁桓执笔，第四、十章由米天林执笔，第十二章由万作新执笔。本书的第五、六、七、八、九、十一章由湖北财经学院的崔国森、黎自任编写。成稿后，米天林对全书的一些术语和符号作了统一。最后，经湖南大学周怀生教授和湖南财经学院院长涂西畴仔细审阅定稿。中央财政金融学院李宝光教授对本书编译工作提出了宝贵意见。本书的部分附图由湖北财经学院刘建辉绘制。

对于本书中的错误和不妥之处，敬请读者批评指正。

编译者

1983年7月

第一章 向　量

§1 n 维向量

设实数集合为R。由两个实数组成的有序数组（a_1,a_2）的集合用$R\times R=R^2$来表示。一般地，由n个实数组成的有序数组（$a_1,a_2,\cdots,a_n$）的集合用R^n来表示。我们把

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

叫做R^n的一个**n维向量**，有时也叫做R^n的点。其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$叫做向量的**分量**或**坐标**，a_i叫做向量的第i个分量或坐标。

有时，n维向量也可以写成下面的形式

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

为了区别起见，我们把横的叫做**行向量**，竖的叫做**列向量**。以后通常把向量都写成行向量的形式，对于列向量的讨论，其道理与行向量相同。

一般用黑体小写字母来表示向量。

所谓两个向量相等，指的是对应的分量都相等。例如，两个n维向量

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

$$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

相等，即$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，就是意味着

$$a_i=b_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

下面，我们给出向量的加法和数与向量的数积的定义．设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是任意的n维向量，λ是任意实数，定义

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \cdots,\ a_n+b_n);$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n).$$

这就是说，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$是以$a_i+b_i$作为分量的向量，$\lambda\boldsymbol{a}$是以$\lambda a_i$作为分量的向量．

有了上面的定义，立即推得下面的关系式：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a};$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c});$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

这是因为，这些关系式中向量的分量有如下的关系式：

$$a_i+b_i=b_i+a_i;$$

$$(a_i+b_i)+c_i=a_i+(b_i+c_i);$$

$$\lambda(a_i+b_i)=\lambda a_i+\lambda b_i.$$

分量全为零的向量

$$(0,0,\cdots,0)$$

叫做零向量，记作$\mathbf{0}$；向量

$$(-a_1,\ -a_2,\ \cdots,\ -a_n)$$

叫做向量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的负向量，记作$-\boldsymbol{a}$.

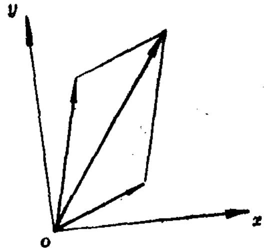

图1—1

利用负向量，可以定义向量的减法

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})\\&=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ \cdots,\ a_n-b_n).\end{aligned}$$

显然，对于任意向量$\boldsymbol{a}$，都有

$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a};$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0.$$

当$n=2$，$n=3$时，可用几何学中的图象来表示向量．例如在图1—1中，设A，B，C的坐标分别是$(2,1)$，$(1,3)$，$(3,4)$，则A，B，C是R^2上面的三个点，向量

$$\boldsymbol{a}=(2,1),\ \boldsymbol{b}=(1,3),\ \boldsymbol{c}=(3,4)$$

通常表示为以原点为起点，A，B，C为终点的有向线段$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(2,1)+(1,3)\\&=(2+1,\ 1+3)=(3,4)=\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

这里，四边形$OACB$是平行四边形．因此，向量的加法，可以用平行四边形法则．

在这个例子中，还有

$$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\text{或者}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}.$$

不过，$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$也可用以$A$为起点，$C$为终点的有向线段$\overrightarrow{AC}$来表示，于是得到$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$．一般地，我们认为长度相等，互相平行，方向也相同的两个有向线段是表示相同的向量，并把它们叫做**自由向量**．对于起点固定的向量叫做**固定向量**．以后，只要未加说明，我们讨论的向量都是起点在原点的固定向量．

在R^2，R^3中，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$是在同一直线上的向量．当$\lambda>0$时，则$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$为同向的向量；当$\lambda<0$时，则$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$为反向的向量；当$\lambda=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$为零向量．对于

$$\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

如果λ为任意实数，$\boldsymbol{a}$为起点在原点的固定向量，则$\boldsymbol{x}$就表示通过原点的一条直线上的任意点．

【例】 设$\boldsymbol{a}=(5,\ 4)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ 2)$．试由$\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$，求$\boldsymbol{c}$．

将$\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$两边同时加$-3\boldsymbol{b}$，得

$$\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{b}+(-3\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}+(-3\boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=2(5,4)-3(1,2)$$

$$=(10,8)-(3,6)=(7,2).$$

§2 向量空间

我们已经用n个实数组成的有序数组定义了R^n的向量。它具有下面的性质(1)—(8)，其中(1)—(5)在§1中已经见过。

假设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$是R^n中的任意元素，λ,μ是任意实数，则有

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(2) R^n中存在0元素，使$\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$成立；

(3) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$；

(4) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(5) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；

(6) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(7) $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$；

(8) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$。

以上性质（1）—（8）是对R^n的向量而言的，但具备这些性质的除R^n以外还有其它的集合。因此，我们来说明比R^n更一般的向量空间的概念。

设V是一个集合，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是它的任意元素，λ是任意实数。如果$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$和$\lambda\boldsymbol{a}$也被定义为$V$的元素，并且它们满足前面的性质（1）—（8）时，那么，我们就把V叫做一个向量空间。它的元素就叫做向量。在有必要把R^n的向量与一般的向量区别开来时，便把R^n的向量叫做数向量。

被定义在某个区间上的所有函数的集合也是一个向量空间。事实上，把函数$f(x)$，$g(x)$，简记为f，g，作为这个集合

中的任意两个元素。并且把和$f+g$与实数倍λf分别定义为函数$f(x)+g(x)$与$\lambda f(x)$。显然，它们还是该区间上的函数，且适合性质（1）—（8）。0是在这个区间的各点均为0的函数，每个函数都可看成为一个向量。

设V是向量空间，W是V的子集合且具有下列三条性质

(i) $\boldsymbol{a}\in W$，$\boldsymbol{b}\in W$时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in W$；

(ii) $\boldsymbol{a}\in W$时，$\lambda\boldsymbol{a}\in W$（$\lambda$为实数）；

(iii) $\mathbf{0}\in W$。

这里，$\boldsymbol{a}\in W$表示$\boldsymbol{a}$是集合W的元素。

这时，W也是一个向量空间。因为，由(i)，(ii)，在W里定义了向量的加法和数积，又由于$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$是W的元素，故也是V的元素，所以，(1)—(8)的性质中除了(2)，(3)以外都成立。再由(iii)，$\mathbf{0}\in W$，故(2)，(3)也成立。这样的W叫做**V的子空间**。注意，仅是子集合还不能说是子空间。

例如，在R^3中不通过原点的任一平面。它显然是R^3的子集合，但由于不包含0元素，(iii)不成立，故不是子空间。

又如，在R^n中，设第n个分量是0的向量$(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 0)$的集合为$W$，则$W$是$R^n$的子集合，并且具有(i)，(ii)，(iii)的性质，因此W是R^n的子空间。

【例题】 试证明$0\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$。

解 这在R^n中是显然的，对于一般的向量空间，我们只要作如下的考虑：

$$0\boldsymbol{a}+1\boldsymbol{a}=(0+1)\boldsymbol{a}=1\boldsymbol{a}.$$

由此得到$0\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$。

§3 线性组合

设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是R^3中的两个向量，那么如下形式的向量

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}\ (\lambda,\ \mu\text{为实数})$$

叫做$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的**线性组合**．因为$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$共线，$\mu\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}$共线，所以$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$是在这两条直线所决定的平面内．若把$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$固定，给$\lambda$，$\mu$以所有的实数值，就得到$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的线性组合的集合$W$，则$W$是$R^3$的一个子空间．事实上，$W$是满足§2的子空间的条件，设

$$\boldsymbol{c}_1=\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b}\in W,$$

$$\boldsymbol{c}_2=\lambda_2\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}\in W.$$

则
$$\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2=(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{a}+(\mu_1+\mu_2)\boldsymbol{b}.$$

因为该式右端是$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的线性组合，所以

$$\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2\in W.$$

又假设
$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}\in W,$$

则
$$\xi\boldsymbol{c}=(\xi\lambda)\boldsymbol{a}+(\xi\mu)\boldsymbol{b}\in W,\ \xi\text{为实数}.$$

因此，W满足子空间条件(i)，(ii)．关于(iii)，有

$$\boldsymbol{0}=(0,0,0)=0\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{b}\in W.$$

在R^3中，通过原点的任意平面是子空间．因为，假设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是这个平面上不在同一直线上的两个向量，那么，这个平面内的任意一个向量均可表示为$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的线性组合．

下面，考虑一般的向量空间V．假设$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$是V的n个元素，λ_1，λ_2，…，λ_n是n个实数，则形如

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n$$

的式子叫做$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$的线性组合．若λ_i取所有的实数时，得到线性组合的全体为W，和R^3的情形完全一样，可知W