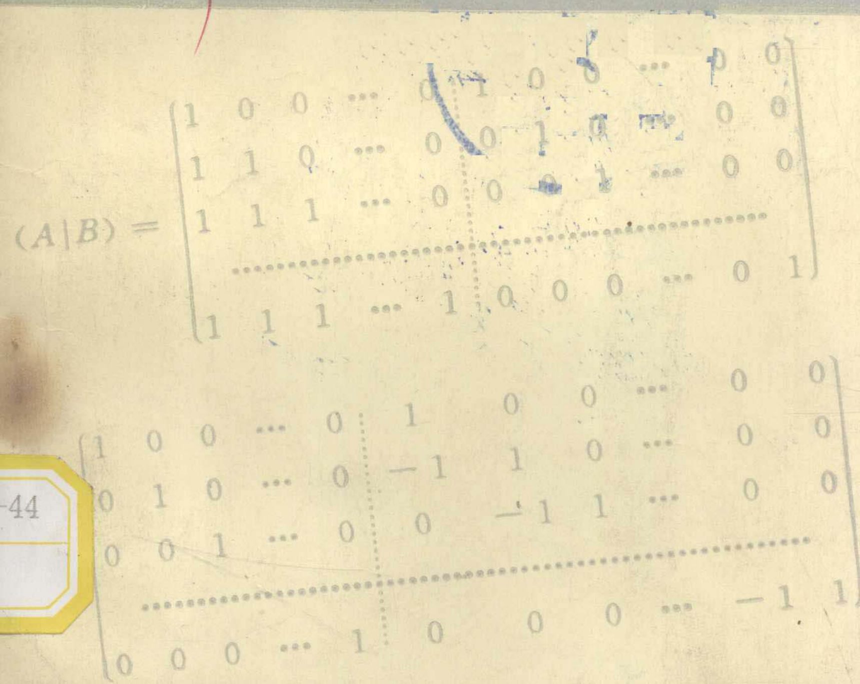
线性代数标准化试题

王守祯 编



中国标准出版社

线性代数标准化试题

王守祯 编著

中国标准出版社
1992

（京）新登字 023 号

线性代数标准化试题

王守祯　编著

责任编辑　冯强

*

中国标准出版社出版
（北京复外三里河）
中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32　印张 4.875　字数 124 千
1993 年 5 月第一版　1993 年 5 月第一次印刷

*

ISBN7-5066-0675-5/O・004
印数 1—6 000　定价 3.20 元

*

科目 287—37

前　　言

标准化命题考试是国外采用较早的一种考试方法，这种考试命题的特点是题目多，知识覆盖面广，还可以在很大程度上排除考试过程（命题、应试、阅卷）中的主观性、随机性，以提高考试的可信度。随着我国考试制度的改革，比较科学的标准化测试方法已经在各类考试中逐步开始使用。

编写本书的目的是：(1)使初学者加深对基本概念、基础知识的理解及熟悉基本运算；(2)供自学者自我测试学习水平；(3)供教师进行考试命题，布置思考题、复习题、课外作业时参考。本书是按照线性代数的教学内容顺序编写的，每章中包括填空题、是非判断题、单项选择题、多项选择题等四个方面的内容，每章题目都附有答案或提示，以供参考。由于题目构思巧妙、新颖、多变，内容充实，涉及面广且深入，因此，通过这些题目的练习，可以明确各类标准化试题的构造特点、解题思路和方法，正确理解、准确掌握和灵活运用基本概念和基本定理；纠正在运算方法和运算过程中常犯的错误；提高思维能力、逻辑推理能力和分析判断能力；提高解题技巧和应试能力。

本书可作为线性代数习题课教材，也可供财经类和工科类各专业在校本科、专科学生学习时参考以及电大、夜大、函大、职大学员和参加自学考试的学生的自学参考资料，又可供报考研究生的读者复习之用。

由于时间仓促以及水平所限，不妥之处在所难免，敬请同行及读者批评指正。

王守祯

1992年1月

符　号　说　明

符号	含义
$i_1i_2\cdots i_n$	由数 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 组成的一个 n 级排列
$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$	排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数
$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $=\|a_{ij}\|$	n 阶行列式
D'(或 D^T)	行列式 D 的转置行列式
M_{ij}	行列式中元素 a_{ij} 的余子式
A_{ij}	行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式

续表

符号	含义
$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $=(a_{ij})_{m\times n}$	$m\times n$ 矩阵
A'(或 A^T)	矩阵 A 的转置矩阵
$\|A\|$	方阵 A 的行列式
$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	单位矩阵
A^*	矩阵 A 的伴随矩阵
A^{-1}	矩阵 A 的逆矩阵
$I(i,j)$	第一种初等行(列)变换
$I(i(k))$	第二种初等行(列)变换
$I(i,j(l))$	第三种初等行(列)变换
$E(i,j)$	$I(i,j)$对应的初等矩阵
$E(i(k))$	$I(i(k))$对应的初等矩阵

续表

符号	含义
$E(i,j(l))$	$I(i,j(l))$对应的初等矩阵
α(或 β,γ)$=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$	n 维(列)向量
R^n	n 维向量空间
$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$	n 维单位向量组
$(\mathrm{I})\simeq(\mathrm{II})$	表示(Ⅰ)、(Ⅱ)两个向量组等价
$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$	向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的秩
$R(A)$	矩阵 A 的秩
$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$	一般的线性方程组
$AX=B$	一般线性方程组的矩阵形式
$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=\beta$	一般线性方程组的向量形式
A	线性方程组的系数矩阵

续表

符号	含义
$A\|B$	线性方程组的增广矩阵
$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$	齐次线性方程组
$AX=0$	齐次线性方程组的矩阵形式
$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0$	齐次线性方程组的向量形式
$V_1,V_2\cdots,V_r$	齐次线性方程组的基础解系
$A\sim B$	A 与 B 相似
$A\simeq B$	A 与 B 合同
$f=X'AX$	二次型的矩阵形式

目　录

第一章　行　列　式

一、填空题

1．排列 2431 的逆序数是________，是________排列，通过________次对换可调成自然排列 1234．

2．排列 35782146 的逆序数是________，是________排列．

3．当 $i=$________，$j=$________时，排列 $1i25j4897$ 为奇排列．

4．$2n$ 级排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 的逆序数为______．

5．$2n$ 级排列 $13\cdots(2n-1)2n(2n-2)\cdots 2$ 的逆序数为________．

6．若排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为 k，则排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的逆序数为________．

7．在所有的 n 级排列中，奇排列的个数为________．

8．n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 一般项的表达式为________．

9．四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 中，含有 $a_{11}a_{23}$ 的项为

________和________.

10. 若将行列式 D 的两行(或两列)互换 n 次,那么,当 n 为_______时,D 的值变号;当 n 为_______时,D 的值不变.

11. 如果 n 阶行列式中零元素的个数大于 n^2-n 个,那么此行列式的值为________.

12. 设 D 是 n 阶行列式,当 D 中的元素满足________时,称 D 为上三角行列式.

13. 若行列式每行元素之和都为零,则此行列式的值为________.

14. n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中,A_{ij}是对应元素 a_{ij}的代数余子式,那么乘积 $a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}$ $=$________.

15. M_{ij}和 A_{ij}分别是 n 阶行列式 D 中元素 a_{ij}的余子式和代数余子式,M_{ij}是由 D 中划去第________行,第________列,并将剩下的元素按________排列的一个________阶行列式,且 $A_{ij}=$________M_{ij}.

16. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$________.

17. 设 $D_1=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$,那么,$D=\begin{vmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{vmatrix}=$________.

18. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} =$ ________.

19. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$ ________.

20. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n-1n} & a_{nn} \\ a_{1n-1} & a_{2n-1} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ __.

21. 若 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$，则 D_1

$$= \begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}。$$

22. 当 n 为奇数时，行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

23. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}=0$ 的根为________.

24. 使方程 $\begin{vmatrix} 2 & x-1 \\ x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix}$ 成立的 x 是________或________.

25. 一个含有 n 个方程、n 个未知量的齐次线性方程组，若其系数行列式 D ________,则该方程组只有零解.

26. 若方程组 $\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+kx_2-x_3=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则 $k=$________或________.

27. 当 λ 满足________且________时,线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ -x_1+\lambda x_2+x_3-x_4=0 \\ -x_1+x_2+\lambda x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2-x_3+\lambda x_4=0 \end{cases}$$ 仅有零解.

28. 用克莱姆法则可求得线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2 \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2 \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0 \end{cases}$$ 的根为 $x_1=$ ________,

$x_2=$________, $x_3=$________, $x_4=$________.

二、是非判断题

1. 排列 14325 是偶排列.

2. 任一个 n 级排列都可经过若干次对换变成自然排列.

3. 当 n 为奇数时，排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的奇偶性相反.

4. 四阶行列式中含有因子 $a_{12}a_{23}$ 的项是 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ 和 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$.

5. 若行列式 D 中，有两行对应元素是互为相反数，则 $D=0$.

6. 若行列式中的每一个元素都大于零，则 $D>0$.

7. n 阶行列式 D 中元素均为非零元素，则 $D\neq 0$.

8. n 阶行列式 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 和

$D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$，若对 $i,j=1,2,$

$\cdots n$，有 $a_{ij}>b_{ij}$，则 $D_1>D_2$.

9. 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

则 $\begin{vmatrix} a_{11}-a_{21} & a_{12}-a_{22} & \cdots & a_{1n}-a_{2n} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & \cdots & a_{2n}-a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{22} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}=0$.

10. 如果 n 阶行列式在 k 个行和 h 个列的交点处的元素都为零，且 $k+h>n$，则此行列式等于零.

11. 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

则 $D_1=\begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1n-1} & \cdots & a_{11} \\ a_{2n} & a_{2n-1} & \cdots & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nn} & a_{nn-1} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}=-D$.

12. 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，