集合论浅说

张锦文编著

科学出版社

1984

内 容 简 介

集合论是一门现代数学，它已在计算机科学、人工智能科学、逻辑学、经济学、语言学和心理学等方面有着重要的应用。

本书深入浅出地介绍了集合的基本概念、性质、关系、运算、无穷序数与无穷基数等。书中穿插了一些习题，逐一作出这些习题，可以帮助读者理解和掌握有关内容。

本书可作为中学数学教师进修用书，也可供高中学生、大专学生阅读和参考。

集 合 论 浅 说

张锦文 编 著

责任编辑 陈永锵 毕 颖

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984年9月第一版 开本：787×1092 1/32

1984年9月第一次印刷 印张：10

印数：0001—50,000 字数：193,000

统一书号：13031·2684

本社书号：3694·13—1

定价： 1.25 元

序

集合论是一门现代数学，它作为数学的语言和基础几乎涉及到一切数学分支(包括离散数学)，因而在数学中占据着极其重要的位置.

事实上，每个人都知道一些集合. 人们直观上或思维上的那些确定的能与其他事物区别的对象汇集在一起可形成一个整体，满足特定性质的对象的整体就是集合. 集合的概念在现实世界中有广泛的背景. 集合论不仅研究集合的性质、关系、运算、无穷序数与无穷基数，而且还研究它的公理系统和相应的逻辑性质. 这一领域有大量未解决的问题，而且还在不断地提出新的课题，这正是这门学科充满生命力的表现. 著名的连续统假设是一百年来尚未解决的重大数学难题，选择公理的研究进展也为几乎所有的数学家所关注.

集合论是上世纪七十年代德国数学家康托尔创立的. 他从“函数展开为三角级数的唯一性的证明开始”激起了对集合论的研究兴趣，集合论的出现引起了学术界的广泛注意. 它已在计算机科学、人工智能科学、逻辑学、经济学、语言学和心理学等方面有着重要的应用. 它不仅是大学数学系、计算机科学系等有关科系的必修课程，而且它的初等部分已列入中学数学课程. 因此，中学数学教师也应当具备必要的集合论

知识.

公理集合论也是数理逻辑的一个重要分支，虽然本书也是按公理方法的基本要求展开的，但本书仍是以初等集合论为中心．我们打算用它作为学习数理逻辑的一本入门书．它为命题逻辑和谓词逻辑提供了直观背景．读者在本书的基础上学习命题逻辑和谓词逻辑可能更易于理解和掌握.

一九八二年，作者曾在北京电视台为中学数学进修教师讲授集合论课程，本书就是由那时用的讲义修改而成的．而内容和叙述更为通俗易懂．第一，给出了较多的例题，通过若干例题去阐述基本概念；第二，把序数这一较难的概念后移了；第三，公理是逐步引进的．为了使读者有一个总的观念，我们在附录中给出了通常的集合论公理系统 ZFC.

限于作者水平，错误缺点在所难免，欢迎批评指正.

作者

目　　录

第一章　基本概念

从某种意义上来说，集合论是数学的基础．从集合论的角度分析和考察初等数学，可以对问题有更清晰更深刻的理解．这对于中学数学教育无疑是有益的．现代数学的各个分支其基础部分都与集合论有着密切的关系，并且它们又不断地向集合论提出新问题，反过来又推动集合论的发展．

§1　引　言

什么是集合呢？我们把它当作一个不加定义的基本概念，也是本书中唯一的不加定义的概念（有时也用到类的概念，但可以不作为基本概念，有的集合论系统，用类作为基本概念，把集合定义为满足一定限制条件的类）．在平面几何中，大家知道，点、线、面都是不加定义的基本概念，在那里是通过几何公理表现出点、线、面的关系的．在本书中，我们是从集合这一基本概念着手，逐步引伸出集合论的有关概念、公理和问题，并建立相应的定理和方法．

虽然集合是一个不加定义的概念，然而却是一个人们容易理解和把握的概念．事实上，每一个人都知道许多集合．三只羊可以组成一集合，五只鸡可以组成一集合，同样，二十

六个英文字母可以组成一集合，数 0，1，2，3 也可以组成一集合.

集合是把人们的直观的或思维中的某些确定的能够区分的对象汇合在一起，使之成为一个整体(或称为单体)，这一整体就是一个集合. 组成一集合的那些对象称为这一集合的元素(或简称为元). 任何类型的对象都可以作为一集合的元素，特别是集合也可以作为对象，亦即一集合可以是其它集合的元素. 当我们用字母 S 表示一集合，a 是集合 S 的一个元素时，就叫做 a 属于集合 S，这时就记做

$$a \in S,$$

其中符号 $\in$ 表示"属于"或"元素关系"或"属于关系". 当 b 不是 S 的一元素时，人们常常记做

$$a \notin S,$$

其中符号 $\notin$ 表示"不属于". "$b \notin S$" 读做 b 不属于 S.

例 1 令 S_1 是由 0，1，2，3 这四个数组成的集合，并且记做

$$S_1 := \{0, 1, 2, 3\},$$

其中花括号内的对象(在这里是数 0，1，2，3)是这一集合的元素，确切地说，凡是这一集合的元素都写在花括号内，不是它的元素都不写在花括号内. 符号 ":=" 表示左边是由右边定义出来的. 这时，$0 \in S_1$，$1 \in S_1$，$2 \in S_1$，$3 \in S_1$，但是 $4 \notin S_1$，$5 \notin S_1$ 等等.

例 2 令 S_2 是由 26 个小写英文字母组成的集合，亦即:

$$S_2 := \{a, b, c, d, \cdots, w, x, y, z\},$$

这时，$a\in S_2$，$b\in S_2$，$c\in S_2$ 等等，并且也有 $1\notin S_2$，$2\notin S_2$ 等等.

例 3 令 S_3 是某中学初一甲班全体学生组成的集合. 当张三是该班的一个学生时，我们就说张三是集合 S_3 的一个元素，并记做“张三 $\in S_3$”. 当李四不是该班的一个学生时，我们就记做：“李四 $\notin S_3$”. 意思是指：“李四不是集合 S_3 的一个元素”.

我们为什么能够把某校初一甲班的学生汇集成一个集合 S_3 呢？因为一个学生是否在该班这是确定的，张三是甲班的学生，李四不是该班的学生，这些都已确定，毫不含糊. 同时甲班的若干个学生相互都是能区别的. 虽然，张三、王五都是甲班的学生，但他们是两个不同的学生，人们能够区别他们谁是王五、谁是张三. 这些都是从我们的常识所能知道的.

又如，在通常的情况下，甲班的男生可以组成一个集合 S_4，甲班的女生可以组成另一集合 S_5，因为，这些对象都是“确定的，能够区分的”. 但是，“甲班的所有高个子的学生”不能组成一集合，这是因为，什么是“高个子”？这是一个不确定的、不清晰的概念. 身高一米八的是高个子，身高一米七五、一米七三或一米七一、一米六九的是否是高个子呢？ 这里没有一个确定的清晰的界限. 同样，甲班所有小个子的学生也不能组成一个集合，它也没有一个确定的清晰的界限. 象这类不确定不清晰的对象都不是古典集合论的研究对象，不是本书所要讲的“集合”.

还有更复杂的集合，也可以把一些集合汇合成一个整体形成新的集合. 例如，令 S 是这样的一集合，它的元素恰好是

上述三个例子给出的集合 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. 亦即

$$S:=\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\},$$

这个集合有五个元素 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5，亦即我们有：$S_1\in S$，$S_2\in S$，$S_3\in S$，$S_4\in S$，$S_5\in S$. 虽然 $0\in S_1$ 且 $S_1\in S$，但是 $0\notin S$. 假如我们令 S_6 是由 1 与 S_1 组成的一集合，亦即

$$S_6:=\{1, S_1\},$$

这时，$1\in S_1$ 且 $S_1\in S_6$，而且还有 $1\in S_6$.

这样，任给一对象 a（它也可以是一集合）和一个集合 S，是否 $a\in S$ 成立呢？这要看它们是由什么决定的. 要看集合 S 含有哪些元素而决定. 一集合由它们的元素所决定，这正是我们在 §3 中将要讨论的外延原则的基本内容.

§2 集合的表示方法

在 § 1 的例 1 与例 2 中，为了给出一集合，我们是列举出该集合的元素，这种列举元素的方法好处是具有显明性. 比如 $S_1:=\{0, 1, 2, 3\}$，我们一眼就看出它只有四个元素，并且这些元素分别是 0, 1, 2, 3，但是，在有些情况下，这样做是很不方便的. 比如令集合 S_7 为:

$$\{5832, 6859, 8000, 9261, 10648, 12167, 13824\}. \quad (1.1)$$

(1.1) 式所确定的集合就有点烦琐了，如果比 13824 还大的数目再列出几个，几十个或几百个，那就更加复杂甚至无法写出，然而当我们分析一下 S_7 的元素的性质时，就会发现这些数是有规律的，它们是从 18 到 24 之间的这七个数的立方数，

亦即当 x 满足条件 $18 \leqslant x \leqslant 24$ 时，S_7 的元素恰好为 x^3. 这样，就令

$$\{y \mid x \text{ 是一整数，且 } 18 \leqslant x \leqslant 24, y = x^3\}, \qquad (1.2)$$

其中竖线"|"的前边为所定义的集合的元素，它必须满足竖线后边所列举的条件，亦即"x 是一整数，且 $18 \leqslant x \leqslant 24$, $y = x^3$". 这一条件也叫做一性质. (1.2)式表明所定义的集合的元素都具有性质为"把这个元素开立方，立方根为 18 与 24 之间(包括 18 与 24 在内)的整数". 不难验证，它的元素恰好是在(1.1)中所列举的那些数. 因此，我们说，(1.1)与(1.2)定义了同样的集合，亦即上述集合 S_7.

当我们把(1.2)式中的条件改为"x 是一整数且$10 \leqslant x \leqslant 108$, $y = x^3$"时，所定义的集合为 S_7', 如果要用类似于(1.1)那样的显式去列举 S_7' 时，是很烦琐的事，为了方便，简洁地给出一个集合，就需要采用象(1.2)那样的定义方式，我们称这种方式为条件定义集合的方式[1]. 事实上，上节的例 3 中，集合 S_3, S_4, S_5 我们都是采用这样方式给出的. 比如 S_3 就是:

$$\{x \mid x \text{ 是某校初一甲班一学生}\},$$

请读者自行给出上述集合 S_4, S_5 的定义条件.

一集合是用某一条件定义的，这时就称这一条件为该集合的定义条件. 然而漫无限制地使用条件去定义集合，会引

1) 用条件定义集合的方式并不是一种能够普遍进行的方式，有些条件是不能定义集合的. 能够定义集合的条件是需要用公理来保证的，由公理保证能够定义集合的条件，我们称做合法条件，在本书中，我们将列出这些合法的条件.

起混乱，导致矛盾．因此必须对如何形成集合的原则一一明确提出，只能按照规定的原则形成集合，才可能避免已知的一些集合论诗论．这些原则称为集合论公理。

§3 外延原则

一个集合是由它的元素完全决定的，而不管它的其它性质如何，比如，上节已指出的，不管它的表示方法，也不考虑定义它的条件的含义，及其它可能附加的条件．所谓外延性就是不考虑条件的含义，性质和内涵，而是只考虑满足这一条件的那些对象，或具有这一性质的那些对象．由于这一基本点，我们就给出了二个集合相等的充分条件．也就是说，“任意给定的两个集合 S_1，S_2，当我们已知，对于任意的对象 a，若 $a \in S_1$，则有 $a \in S_2$，并且若 $a \in S_2$，则有 $a \in S_1$；这时，我们就断定有 $S_1 = S_2$”．这就是外延原则．

外延原则也叫外延公理．它是“一集合是由它的元素所完全决定的”一个具体的表达方式，也是判断两个已知集合是否相等的一个具体的方法

例 令

$$S_1 := \{x \mid (x-3)(x-5)(x-7)=0\},$$

$$S_2 := \{x \mid x \text{ 是一素数且 } 2 < x < 10\}.$$

上述定义 S_1 的条件 $(x-3)(x-5)(x-7)=0$ 是一个方程式，满足这一方程式的数亦即它的解集合就是 S_1，所以集合 S_1 就是 $\{3, 5, 7\}$，上述定义 S_2 的条件是“x 是一素数且它

既大于 2 又要小于 10”，不难验证，它也是集合$\{3,5,7\}$. 由外延公理，即得 $S_1=S_2$.

当我们已知两个集合 S_1 与 S_2 是相等时，即 $S_1=S_2$，并且对于任意的对象 a，我们已知 $a\in S_1$，这时是否 $a\in S_2$ 呢？ 我们的回答是肯定的，若 $a\in S_2$，则 $a\in S_1$. 这一肯定的答案是关于相等符号即等词或等号“$=$”的逻辑规则所规定的. 也就是说“对于任意的对象 a，若 $a\in S_1$，则 $a\in S_2$，且若 $a\in S_2$，则 $a\in S_1$”构成了 $S_1=S_2$ 的一个必要条件. 因此人们常常把**外延公理**陈述为：

对于任意的集合 S_1 和 S_2，$S_1=S_2$ 当且仅当对于任意的对象 a，都有若 $a\in S_1$，则 $a\in S_2$；若 $a\in S_2$，则 $a\in S_1$. 换句话说，$S_1=S_2$ 当且仅当 S_1 与 S_2 有相同的元素. 对此有兴趣的读者可参阅谓词演算的有关文献，例如本书后边列的文献[1、2].

§4 空集合与无序对集合

定义 1.1 没有元素的集合叫做空集合.

空集合是否存在呢？如果它是存在的，那么由外延公理它是唯一的. 条件 $x\neq x$ 可以定义空集合，令

$$S:=\{x\mid x\neq x\},$$

这里 x 可以是任意的对象，由等号的逻辑规则，对于任意的对象 a 都有 $a=a$，因此，$a\neq a$ 的对象是不存在的，所以，上述 S 如果是一集合，则 S 没有任意元素. 当然，能够定义一集合

的条件是需要由公理来保证的.

空集合存在公理 存在一个集合，它没有任何元素. 换句话说，空集合是存在的.

空集合存在公理常常简称为空集合公理，由它和外延公理，空集合是存在唯一的，并且记做符号$\varnothing$. 由定义 1.1，对于任意的对象 a，都有 $a \notin \varnothing$.

推论 1.1 对于任意对象 a，都有 $a \notin \varnothing$.

定义 1.2 对于任意给定的两个对象 a 与 b，集合 $\{a, b\}$ 称做对象 a 与 b 的无序对集合，也就是说，这一集合有两个元素，一个是 a，一个是 b.

由于 a, b 是任意两个对象，它们可以相等，也可以不相等. 当 $a = b$ 时，$\{a, b\}$ 可以记做 $\{a\}$ 或 $\{b\}$，并且称之为单元集合. 换言之，单元集合是无序对集合的一种特殊情况，只有一个元素的集合叫做单元集合.

任给二个对象 a 与 b，无序对集合 $\{a, b\}$ 可以用条件“$x = a$ 或 $x = b$”来定义. 允许这样定义集合，即:

无序对集合存在公理 对于任意的二个对象 a 与 b，都存在一个集合 S，使得 S 恰有两个元素，一个是对象 a，一个是对象 b.

由外延公理，对于任意的对象 a 与 b，由它们组成的无序对集合是唯一的，并且记做 $\{a, b\}$.

我们已有空集合 $\varnothing$，现在从$\varnothing$开始，由上述公理我们有单元集合$\{\varnothing\}$. 这一集合只有一个元素$\varnothing$，$\{\varnothing\}$与$\varnothing$不同，前者有一个元素$\varnothing$，后者一无所有.

现在我们从$\varnothing$，$\{\varnothing\}$开始，我们可以构造集合$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，它有元素$\varnothing$与$\{\varnothing\}$，并且还可以构造集合$\{\{\varnothing\}\}$，它是$\{\varnothing\}$的单元集合，这一集合只有一个元素$\{\varnothing\}$. 由此，我们也可以构造集合$\{\{\{\varnothing\}\}\}$，$\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$，$\{\{\varnothing\},\{\phi,\{\varnothing\}\}\}$等等更为复杂的集合，但是，不管怎样，我们只能构造具有一个元素和二个元素的集合，而不能汇合更多的元素组成新的集合. 为了获得具有更多元素的集合，我们引入并集合公理.

§5 并 集 合

定义 1.3 对于任意的两个集合 S_1 与 S_2，我们把 S_1 的元素与 S_2 的元素汇合在一起组成一个新的集合 S. 并且称 S 为 S_1 与 S_2 的并集合，记做 $S_1\cup S_1$，亦称 S_1 并上 S_2（参见图 1）.

集合 $S_1\cup S_2$ 可以用条件"$x\in S_1$ 或 $x\in S_2$"来定义. 然而，这一条件是否能够定义一集合呢？ 换句话说，对于任意的集合 S_1 与 S_2，是否存在一并集合 $S_1\cup S_2$ 呢？ 当然，如果存在的

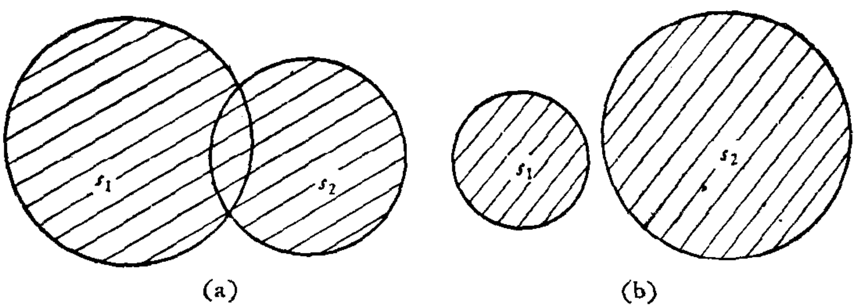

图 1 二集合的并的示意图