刘坤林 总策划
W&W Education 水木艾迪 组编

考研数学应试导引与进阶

线性代数

◆清华大学考研辅导班指定教材◆

2005

全国硕士研究生入学统一考试
应试导引与进阶丛书（2005版）

俞正光 主编

清华大学出版社

全国硕士研究生入学统一考试应试导引与进阶丛书(2005版)

考研数学应试导引与进阶
——线性代数

俞正光　主编

内容简介

本书是作者根据2005年最新考试大纲，结合多年的教学经验和考研辅导经验精心编写而成。主要内容包括行列式、矩阵代数、矩阵的初等变换与矩阵的秩、向量组的线性相关性、线性方程组、向量空间、特征值与特征向量及二次型等。每部分内容均按照"知识综述与导引"、"问题集粹"、"模拟与自测题"进行编排。

本书主要针对参加研究生入学考试的理工类与经济类考生，同时可作为大学本科和专科学生的教学编导用书。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学应试导引与进阶——线性代数/俞正光主编．—北京：清华大学出版社，2004．7
(全国硕士研究生入学统一考试应试导引与进阶丛书：2005版)
ISBN 7-302-08889-6

Ⅰ.考…　Ⅱ.俞…　Ⅲ.线性代数－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第059207号

出 版 者：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　客户服务：010-62776969
组稿编辑：杜春杰
文稿编辑：吕春龙
封面设计：秦　铭
版式设计：郑轶文
印 刷 者：北京季蜂印刷有限公司
装 订 者：三河市化甲屯小学装订二厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×260　印张：15.75　字数：340千字
版　　次：2004年7月第1版　2004年7月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-302-08889-6/O・370
印　　数：1～5000
定　　价：23.00元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770175-3103或(010)62795704

丛书编委会

总策划　刘坤林

编　委　谭泽光　俞正光　刘坤林　葛余博　张慎德

胡天赐　舒　文　孔祥云　许建平

编委会成员简介

刘坤林

清华大学数学科学系教授，清华大学考研辅导班领军人物，全国考研数学辅导资深专家.清华大学考研辅导班主讲，清华大学 MPA 辅导班主讲.先后七次获国家及省市部级科学技术进步奖.把握教学方向非常准确，教学用题代表性极强，屡屡命中考研真题.主编《大学数学——概念、方法与技巧》、《高等数学典型题题典——考研数学应试能力进阶》等教材.讲课特点：富有启发性，对概念的阐述生动形象，精辟准确，得到同学们的高度评价.

谭泽光

清华大学数学科学系教授，多次获国家及省市级科技进步奖.专注考研数学辅导 10 多年，考研数学辅导资深专家，多次任北京地区考研数学阅卷质量检查专家组组长.任《高校应用数学学报》编委，1997 年开始担任国家工科基础课基地负责人.全国高校一类课程负责人，讲课风格热情幽默，重点突出，技巧性强，生动精辟.主编《微积分》(清华大学 21 世纪换代公共基础平台课教材)，并著有《大学数学——概念、方法与技巧》.学员评价听谭老师的课“是一种享受，收获很大.”

俞正光

清华大学数学科学系教授，北京市一类课程负责人，长期担任清华大学考研辅导班线性代数主讲.对全国硕士研究生入学考试大纲与辅导教学要求有专门的深入研究，考研数学辅导资深专家，主编《线性代数与解析几何》、《理工科代数基础》、《全国工程硕士研究生入学考试大纲及考前辅导教材》等各类考研数学辅导教材.讲课风格深入浅出，条理规范，重点突出准确.

葛余博

清华大学数学科学系教授.在随机过程及其应用方面的科研工作多次获奖，长期担任概率与数理统计、随机过程等课程的主讲教学工作，在教学研究和实践中积累了大量可贵经验.清华大学考研辅导班概率统计主讲，对全国硕士研究生入学考试大纲与教学要求有专门的深入研究，讲课风格：擅长抓住概念实质、融会贯通，启发式教学，利于熟练掌握并灵活运用知识，条理规范，重点突出准确，多次命中考研真题，受到同学一致欢迎.

张慎德

清华大学人文学院教授，长期从事马克思主义哲学的教学与研究，多次参加研究生入学政治考试的命题和阅卷工作.对全国硕士研究生入学考试大纲与考查要求有专门的深入研究.授课思路清晰、概念明确、条理性强，善于启发和指导学员结合各种类型问题理解基本原理，提高分析和解决实际问题的能力，受到学员一致好评.

舒　文

清华大学人文学院副教授，硕士生导师.异军突起的考研辅导专家，长期从事毛泽东思想教学与研究，脱俗于乏味政治教学的典范，多次参加政治课辅导教材的编写.辅导中贯彻少而精的原则，针对大纲的要求，着重培养考生应用基本原理分析解决问题的能力.讲课幽默风趣，深入浅出，概念准确，重点突出，对考点把握率高，深受同学们的欢迎.

胡天赐

清华大学人文学院教授，长期从事政治经济学的教学与研究，北京地区考研政治阅卷组成员.多次参加政治课辅导教材的编写，连续主讲研究生入学政治课考试中的政治经济学辅导.授课深入浅出，条理清晰，概念准确，重点突出，深受同学欢迎.

孔祥云

清华大学人文学院教授，长期从事政治经济学和邓小平理论的教学与研究，多次参加政治课辅导教材的编写，长期进行各类研究生入学政治课考试中的邓小平理论辅导，北京地区考研政治阅卷组成员.讲课热情投入，富有感召性，重点突出，针对性强，条理清晰，深受同学欢迎.

许建平

清华大学外语系教授，硕士生导师，英语考试命题、阅卷专家，长期从事研究生英语教学，对全国硕士研究生入学考试大纲与辅导教学要求有专门的深入研究，北京地区考研阅卷组质量检查专家组成员.长期担任清华大学考研辅导班主讲，主编有《清华考研英语应试教程》等教材.讲课特点：条理清楚，信息量大而准确，重点突出，阐述清晰，普遍受到同学欢迎.

编者的话

全国硕士研究生入学统一考试是一种选拔考试，不同于等级考试(如英语四级、六级考试).命题工作人员的任务是结合基本知识点的理解与不同知识点的交叉运用能力，在试题中设置不同深度的陷阱，以求把庞大的考试队伍从能力水平上区分出档次，进而实现国家选拔人才的目的.作为一名考生的任务则是：在全面准确理解知识系统的前提下，努力掌握识破陷阱的能力，力争在考场上以居高临下的知识洞察力与良好的应试状态一举成功.

学习数学需要培养悟性，应试考研数学，需要一定的数学知识洞察力，就像一个练习气功的学员，需要一个师父带他进入套路.所谓悟性或洞察力，是指对数学基本概念的深入理解与准确把握，而这种理解与把握，首先要求对基本概念与基本知识点的理解要做到准确性与完整性，进一步才是掌握知识的系统性、交叉性与灵活性.没有对基本概念与基本知识点理解的准确性与完整性，就谈不上掌握知识的系统性与交叉灵活运用的能力，当然更谈不上解题的思路与技巧.

本套《全国硕士研究生入学统一考试应试导引与进阶丛书》(以下简称《导引与进阶丛书》)的宗旨是："为考生面对考试造就一种居高临下的知识洞察力和感觉良好的临场状态."这也是清华大学考研辅导班一直遵循的数学宗旨.

我们一贯强调，首先注重知识的基础性、系统性与完整性.在考试中，完全基础性题目一般占 60 分以上(满分 150 分)，并且，基本知识点在综合题目中也占有重要的份量，基础性知识点的失误往往导致对一个综合题目的切入点错误，最后造成的是全局性错误.以一种加权的估计来分析，基本知识点在全部试卷中所占的比重可高达 120 分，以数学为例子，微积分中的所谓基本知识点，包括初等函数的初等性质.极限存在的命题形式及命题属性(充分的？必要的？还是充要的?)，极限的保序性及运算法则，函数在一点连续的定义，闭区间上连续函数的性质，多元函数的极限、连续与可微性的定义及其相互关系，各类积分的背景与性质等.线性代数中的基本知识点包括行列式、逆矩阵与伴随矩阵的计算及其相互关系，齐次与非齐次性微分方程解的结构，矩阵的初等变换与秩的概念，向量组的线性相关与无关，向量组的秩与线性方程组解结构之间的关系，特征与特征向量的概念，线线变换、正交变换及二次型的标准化等.概率统计中的基本知识点包括：随机事件的运算，五个古典概率的基本公式，独立性的概念，分布率，分布密度与分布函数的性质及其相互之间关系.复合随相函数的概念，数字特征的定义、背景与基本运算公式，简单随机样本及其数字特征等.

在考试中，考生出现的大量错误是由于对基本概念与知识点理解的不准确或不完整，甚至是对基本知识点理解的扭曲所造成的.

例如，许多学生都会背出一个结论：一个函数的导数大于零时，该函数单调增加，而函数的导数小于零时，该函数单调减少.但他们却忘记或忽略了这一结论描述的是一个函数的全局性质，即该结论的前提是在一个区间上考虑问题.事实上只由一点处的导数正负号，不能决定函数的增减性.由函数在一点的导数值正负号只能的决定函数局部性质：函数在该点的值该点两侧近旁某邻域内的函数值有大小的比较关系结论，即下述性质(可用导数定义与极限的保序性

进行证明)：

“设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0) > (0)$，则存在 $\delta > (0)$，使得对任意的 $x \in (0,\delta)$ 有 $f(x) > f(0)$，对任意的 $x \in (-\delta,0)$ 有 $f(x) < f(0)$.”

再比如，极限运算法则是所有学过微积分的人所熟悉的内容.考虑命题：

“若在某一趋向下，两个函数都有极限，则这两个函数的和与差都有极限”.

这一命题的属性是：前者是后者的充分条件，当前者不成立时，后者结论不一定没有.在考试中，大量考生在极限运算法则这个频繁考点上犯错误.原因就是他们对这类基本概念与基础知识点的理解不准确或不完整，甚至是对基本知识眯的理解发有所扭曲.

《导引与进阶丛书》以最简洁的篇幅梳理数学三个学科中的若干基本知识点，以及不同知识点之间的内在联系，配合适量典型的基本题型与知识交叉运用题型，引导读者与考生高效率做到对基本概念与基础知识点理解的准确性与完整性，并逐渐过渡到掌握知识的系统性与交叉运用能力的训练.对基本题目涉及的方法与技巧多做总结与分析，对综合题目中知识点交叉的模式要有具体的了解与熟悉；直到具有敏感性.这样的训练会使你遇到个别难题时容易找到切入点与思路.

全套教材每个章节具有统一编排格式：

[知识综述与导引]　依据国家考研大纲中要求的重点，对知识模块给予简知综述，突出重点，详解难点，指出读者与考生容易忽略的薄弱环节与存在的弱点，必要时给出识破命题陷阱的重要提示.

[问题集粹]　以学生提问的方式，由编者设计覆盖基本知识点与概念交叉运用能力的若干问题，配以解答与导引，同时针对此类问题，配合若干典型例题，力图使读者牢固掌握对相应知识点与相关题型的处理能力.

[模拟与自测题]　每一章后，以典型练习题方式留给读者用以训练发挥的空间，强调教学双向互动过程.在书后给出答案与提示.(作题时请不要先看答案与提示)

书中所有例题与练习题，都是经过编者精心研究与讨论，进而设计与编排所成.这一工作是基于作者在清华大学与清华大学考研辅导班的多年教学经验积累，以及对国家考试要求与试题类型深入研究的结果，具有重要的典型性与代表性.对于这些例题与练习题，读者可视自身情况选读或选做，但应注意两点：一是立足于独立思考与亲自动手练习；二是应将每一个题目作为一类问题，以达到触类旁通，以一当十，以不变应万变的目的，相信你自己会造就出属于你自己的居高临下的知识洞察力，在考场上去面对你并不陌生的试卷.

“天行健，君子以自强不息，地势坤，君子以厚德载物”(出自《易经》——中国十三经之一).国家大师梁启超先生于1925年从中摘出“自强不息，厚德载物”八个字作为清华大学校训，一直延续至今.“自强不息”，无需再释.“厚德载物”乃以丰厚道德追求业务精益求精.多年来，清华大学的教师，以此作为他(她)们对待工作的行为准则，对待工作，尤其是对待学生.

参与本书编写的老师，均为清华大学在职教师，他(她)们是一个教学与研究成绩卓著的教授群体，长期担任清华大学考研辅导班主讲，突出特点是具有双向了解：最了解国家考试大纲与命题走向，最了解考生的状况与需求，有许多教材与专著出版，广大考生给了他(她)们很高的评价.同时，他(她)们也愿做广大考生和学生的良师益友.基本长期丰富教学研究与授课经验的积累，经过对全国硕士研究生入学考试大纲与辅导教学进行长期专门的深入研究，倾心编写出这套《导引与进阶丛书》教材，真诚希望这套教材为广大考生考试成功奉献他(她)的一份

智慧,为在读大学生的学习提供一份帮助.

《导引与进阶丛书》教材的读者范围包括:参加全国硕士研究生入学统一考试的考生,包括数学试卷一、二、三、四全体应试者,大学本科在读学生,也可作为成人自考学员的参考书.

应特别指出的是,不少人认为,经济类考生,只学过经济类高等数学就已足够.其实这是误导.试卷三、四的历年题目表明,除个别题目有一点经济术语之外,绝大部分题目的题型与难度都与试卷一、二相当,与试卷一、二共用部分题目,也是历年常有之事.那些少量含有经济术语的题目不会成为答卷障碍,少量涉及一些经济术语的题目,如最大利润、最小成本等,不过是一般理工科数学教学中的普通例题而已,一个考生,如果有较好的理工科数学基础,应答试卷三、四,将不会遇到任何困难.

北京水木艾迪教育研究发展有限公司与清华大学出版社策划编辑为《导引与进阶》教材的策划与出版作了大量有益的工作,清华大学出版社的责任编辑为此花费了大量辛勤劳动.清华大学数学科学系李海中教授、李津教授,以及许多老师对本教材的编写工作给予了真诚的鼓励与支持,编者在此向他们真诚致谢.

限于作者水平和时间仓促,对书内的疏漏与不当之处,敬请读者批评指正,以便重印和再版时予以改正.

编　者

2004 年 4 月 22 日于清华大学

前　言

线性代数是全国硕士研究生入学统一考试数学科目的一个重要组成部分，在数学一和数学二中约占数学考试科目的20%，在数学三和数学四中约占数学考试科目的25%．题型一般是一个填空，两个选择和两个解答题，或两个填空，一个选择和两个解答题．根据历年考题的分析，试题内容覆盖面较广，基本覆盖了考试大纲中规定的大部分考试内容，试题一般都比较综合，每个题都含有2、3个知识点，着重考察对基本概念的理解以及综合运用知识解决问题的能力．这几年更有一些线性代数与解析几何、微积分的综合试题，以及线性代数应用问题的试题出现．因此系统地理解线性代数的基本概念和基本理论，掌握线性代数的基本方法，提高抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、符号运算能力，提高综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力，是成功应考的保证．

线性代数是一门逻辑性很强的课程．在线性代数中要研究许多新的对象，它们都有自己的运算规则，这些运算规则有的和过去习惯的数的运算很相似，有的又极不相同，因此在复习时要善于做比较，通过比较澄清概念，总结规律．线性代数的概念很多，很抽象，概念和概念之间联系非常紧密．要学会从不同的角度不同的观点来认识和理解各个概念，并运用这些知识去解决问题．线性代数的解题方法往往不是惟一的，解题的思路和技巧也往往是多种多样的，只有掌握好基本概念，做到融会贯通，才能达到举一反三．

本书通过提问的方式，帮助读者复习和整理基本概念，总结解题的方法和技巧．对一些问题用不止一种解法来启发读者的解题思路，提高分析问题和解决问题的能力．线性代数的内容由于前后联系紧密，纵横交错，尤其作为考研试题综合性都很强，因此本书在编写上，与一般教材不同，不拘泥于传统的体系，而是采取立体式的结构，例如在写行列式时就会涉及到矩阵、向量、线性方程组、特征值甚至二次型，而在后面章节，也会和行列式联系．为便于读者复习，在相关部分通过“相关链接”一栏引导读者进行有关内容的复习．

由于时间紧促，考虑不周造成的疏漏与不妥之处实属难免，敬请读者批评指正．

目　　录

第1讲　行　列　式

知识综述与应试导引

行列式是线性代数的基础，是研究线性代数主要问题的一种有力工具．例如在讨论矩阵的可逆性、矩阵的秩、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量以及判别二次型的正定性等问题中都要用到行列式．它的主要内容有行列式的概念和基本性质，行列式按行展开定理等．这一讲的要求是了解行列式的概念，掌握行列式的性质，会应用行列式的性质和行列式按行展开定理计算行列式．近几年行列式也有和微积分结合的综合考题，但万变不离其宗，解决这类问题的关键仍然是行列式的基本概念、性质和计算方法．

1.1　行列式的概念

n 阶行列式是一个数，是由 n^2 个数排成 n 行 n 列的方阵

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所决定的．

例如：二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = -2.$$

二阶行列式的一般计算公式是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\times a_{22} - a_{12}\times a_{21}.$$

这个数是由两项的和构成的，每一项又是由取自不同行不同列的两个数的乘积组成的，且其中一项为正，一项为负．

三阶行列式的计算公式是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

在这个式子中如果把二阶行列式展开，就得到6项，每一项由取自不同行不同列的3个数的乘积组成，其中3项为正，3项为负．

在 n 阶行列式中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，剩下的是一个 $n-1$ 阶行列式，叫

做 a_{ij} 的**余子式**,记作 M_{ij}. 那么 3 阶行列式就可写作:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

再进一步,记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

称 A_{ij} 为 a_{ij} 的**代数余子式**,则 3 阶行列式就可写作:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

同样,n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

将其中的代数余子式全部展开,得到的是一个数,它是 $n!$ 项的代数和,其中每一项都是由取自不同行不同列的 n 个数的乘积组成,其中一半是正项,一半是负项.

显然,如果在一个行列式中,有的元素是字母 x,那么,行列式就是关于 x 的一个多项式.

例 1.1 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x(x-1) = x^2 - x.$

由 n 阶行列式的定义,容易计算以下例子.

例 1.2 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \cdots = n!.$

例 1.3 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

形如例 1.2 的行列式叫对角行列式,形如例 1.3 的行列式叫上三角行列式,这两个例子可以当公式用. 与例 1.3 类似的有下三角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.2 行列式的性质

行列式最基本的性质有以下 4 个.

性质 1 行列式中行列互换,其值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

这个性质告诉我们,对于行成立的性质,对于列也一样成立,所以以下的性质,将“行”改成“列”也成立.

性质 2 行列式中两行(列)对换,其值变号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 3 行列式中如果某行(列)元素有公因子,可以将公因子提到行列式外.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 4 行列式中如果有一行(列)每个元素都由两个数之和组成,行列式可以拆成两个行列式的和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

由以上 4 条基本性质,还能推出下面几条性质:

性质 5 行列式中如果有两行(列)元素对应相等,则行列式的值为 0.

性质 6 行列式中如果有两行(列)元素对应成比例,则行列式的值为 0.

性质 7 行列式中如果有一行(列)元素全为 0,则行列式的值为 0.

性质 8 行列式中某行(列)元素的 k 倍加到另一行(列),其值不变.

行列式主要依靠这些性质来简化计算,所以这 8 个性质不但要熟记,还要会熟练应用.

例 1.4 计算 $\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & \end{vmatrix}$.

[分析] 这个行列式不是对角行列式,但是可以通过换列化作对角行列式.这里要注意阶数 n 的奇偶性.当 n 是偶数时,一共要对换$\frac{n}{2}$次;当 n 是奇数时,一共要对换$\frac{n-1}{2}$次.

[解] $$\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & \end{vmatrix} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} n!, & n \text{ 是偶数}; \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} n!, & n \text{ 是奇数}. \end{cases}$$

[解毕]

1.3 行列式的其他常用公式

(1)范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

(2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是方阵.

(3) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵.

上面两个公式还可以推广为:

(4) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵,$\boldsymbol{C}$ 是 $m \times n$ 的矩阵.

或 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵,$\boldsymbol{C}$ 是 $n \times m$ 的矩阵.

(5) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵,$\boldsymbol{C}$ 是 $n \times m$ 的矩阵.

或 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵,$\boldsymbol{C}$ 是 $m \times n$ 的矩阵.

例 1.5 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$.

[解] 这是一个典型的范德蒙德行列式,直接套公式,得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = (-1-1)(2-1)(3-1)[2-(-1)][3-(-1)](3-2)$$

$$= -2 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 1$$

$$=-48.$$

［解毕］

例 1.6　计算 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$.

［解］　这是形如 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}$ 的行列式，可以套用公式：

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \times n$$

$$=\begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n!, & n \text{ 是奇数;} \\ (-1)^{\frac{n-2}{2}} n!, & n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

［解毕］

例 1.7　计算 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

［分析］　表面上看和前面提到的几个行列式不一样，但是可以通过换行换列化作形如 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}$ 的行列式. 先换第 2 列和第 4 列，再换第 2 行和第 4 行.

［解］

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3).$$

［解毕］