HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

# 未确知数学

WEIQUEZHI SHUXUE

刘开第　吴和琴　王念鹏
李惠娟　刘绍英　著

华中理工大学出版社

# 未确知数学

刘开第　吴和琴　王念鹏
李惠娟　刘绍英　著

华中理工大学出版社

(鄂)新登字第 10 号

图书在版编目(CIP)数据

未确知数学 / 刘开第 等著
武汉:华中理工大学出版社, 1997 年 1 月
ISBN 7-5609-1139-0
Ⅰ. 未…
Ⅱ. ①刘… ②吴… ③王… ④李… ⑤刘
Ⅲ. 不适定问题
Ⅳ. 0175

# 未确知数学

刘开第 吴和琴 王念鹏
李惠娟 刘绍英 著
责任编辑: 易秋明

*

华中理工大学出版社出版发行
(武昌喻家山 邮编:430074)
新华书店湖北发行所经销
华中理工大学出版社照排室排版
华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:8.5 字数:210 000
1997 年 1 月第 1 版 1997 年 1 月第 1 次印刷
印数:1—2 000
ISBN 7-5609-1139-0/O · 135
定价: 9.50 元


02-1101-2252

## 内 容 简 介

未确知数学是根据建筑工程理论研究的需要提出的。这开创了一条研究“未确知信息”的数学表达和处理方法的全新路子，解决了“不完整信息”表达和处理的问题。内容包括：连续型未确知数；离散型未确知数；未确知顺序；未确知集合；未确知函数和未确知极限、导数及应用等。

# 序　言

“未确知数学”是王光远根据建筑工程理论研究的需要提出的。这开创了一条研究“未确知信息”的数学表达和处理方法的全新路子。本书内容基本解决了王光远提出的“现在对这种‘不完整信息’还没有适当的数学工具来表达和处理，亟待研究”的问题。

**（一）未确知信息及其研究**

有别于随机性和模糊性的“未确知性”是被人们已认识到的客观现实所提供的又一种新的不确定性。本书介绍的一整套数学理论及方法基本解决了它的表达和处理问题。

“未确知数学”研究的是“未确知量”和“未确知信息”。顺便指出：邓聚龙将客观现实中存在的部分已知部分未知的量称为“灰量”，这里所介绍的“未确知量”与“灰量”在性质上有较大的一致性。这表现在就其量的已知程度上说都知道一部分且都不全知，但就其各自的定义来看二者又有重要的区别，其区别表现在灰量的已知信息量少于未确知量的已知信息量。有时，当人们只需用灰数即可满足要求的地方，用未确知数来表示就可能显得繁琐而不必要。但在有些实际问题中，所提供的信息量多，若用灰数表达往往失掉某些信息，使问题解决的过于粗糙。特别是在王光远的建筑工程理论研究中，需要的是具有更多已知信息的未确知数，而不是灰数。由于这些区别，在数学上就形成了不同的数学概念。两者都是当前世界上人们正在研究的“不完整信息的数学处理”的手段。本书是专门研究未确知信息的数学处理方法的专著，故称为“未确知数学”。

当前，关于不完整信息的研究除“灰色数学”和“未确知数学”外，国际上主要还有以下两个学派，即：美国学者 G. Shafer 的“信

度理论"学派和以模糊数学创始人 L. A. Zadeh 的"可信度理论"学派。这两个学派的研究，从表面上看它与未确知数学研究的路子不同，似乎是各执其事互不相关，但由于实际上都在处理现实中的类似对象，因此，只要方法符合实际，那么它们之间一定会有密切关系。以"可能度理论"为例，经分析可知，L. A. Zadeh 的证据合成规则中的综合可能度 $\pi(x)$和未确知数学中的集合交运算法则中的 $\pi(x)$之间只差一个常数因子，当考虑到可能度只有相对比的意义时，将会发现 L. A. Zadeh 的合成法则就是未确知数学中的集合交运算法则。从这里看出，两大学派的研究实质上是关于未确知数学中的一种特殊集合(有限离散论域情况下的经典未确知集合)的交运算方面的研究。所以"未确知数学"是对未确知信息数学处理方法的全面的一般性的理论研究。

**(二) 未确知数学**

未确知数学这一新的数学理论，首先把不能表达未确知信息的实数进行推广，形成了包括实数在内的新数系——未确知数系，这一新数系不但是实数系的推广，而且以拓广实数为契机，接着把原数学的许多领域，如集合、顺序、函数、极限等一一拓广，从而出现了"未确知集合"、"未确知顺序"、"未确知函数"、"未确知极限"等相关的数学内容，由此建立起称之为"未确知数学"的数学理论。

**(三) 未确知数学的发展状况**

1990 年王光远在哈尔滨建筑工程学院学报上发表了《论未确知信息及其数学处理》，这篇重要的论文可以说是揭开了未确知数学的第一页。之后，经河北煤炭建工学院等几所院校的几位教师的共同努力，初步形成了"未确知数学"的研究框架。目前，有的内容已初步形成了"未确知数学"体系。主要有如下方面的内容：未确知数，未确知顺序，未确知集合，未确知函数，未确知极限等等。

另外，关于未确知概率，未确知测度，未确知拓扑空间，未确知群等内容也在趋于完善。还有未确知系统理论设想，未确知数学的应用理论，未确知数运算程序，未确知数学在专家系统理论中的应

用，未确知数学在煤矿建筑中的应用，未确知数学在区间分析中的应用等正在进一步研究中。

**（四）未确知数学的应用前景**

不确定性信息在现实生活和各种科技活动中到处可以遇到，就像数量到处都可以遇到一样。作为表达和处理未确知信息的未确知数将会和实数一样应用到各种科技领域之中，这是自然的。在这里着重指出几点：

1. “未确知数学”已初步形成了比较成熟的一套理论体系，并且在一些人工难以实现的运算方面已经完成了在计算机上实现的问题。

2. “未确知数学”已应用于专家系统理论，讨论了“理想证据合成公式”的不存在性问题，这是专家系统理论中的一个重要问题。

3. “未确知数学”直接来源于王光远的建筑工程理论研究，反过来，“未确知数学”的理论又回到建筑工程理论中。目前，已应用于结构软设计理论、广义可靠性理论、结构维修理论；并且正在研究应用于地震震源机制和地震危险性分析中。

本书的分工：① 吴和琴、刘开第、李惠娟等完成了未确知数学的应用理论。该书由刘开第、吴和琴主稿，王念鹏完成了全书的誊写、符号的协调一致及统稿工作。② 刘开第、王念鹏、刘绍英等完成了第一、二、三、六、七章，吴和琴、王念鹏等完成了第四、五章。另外，徐扬、庞彦军在研究工作中也做出了重要贡献，周俊健、周志仁、王丽萍在研究方面也取得了一定成绩。

“未确知数学”的研究可以说还是刚刚开始，许多问题还没有来得及研究，随着研究的深入和问题的解决，特别是在各种科技领域中的应用，将会使人们更加认识到“未确知数学”和其它数学一样大有用处。

由于笔者水平有限，该书难免有不完善、不恰当、甚至错误的地方，我们只不过是起一个“抛砖引玉”的作用，望更多的同行、理

论和实际工作者更多的了解、认识未确知数学，参与探讨、研究、应用和发展未确知数学，使之最终能成为浩瀚数学海洋中碧绿的一波。

著　者

1994年6月8日

# 目　　录

# 第一章　连续型未确知数

## §1.1　未确知信息

在社会科学、自然科学和工程技术所处理和研究的问题中,往往存在大量不确定性信息.它们的不确定性被归纳为随机性、模糊性和未确知性.

对随机性和模糊性信息的研究分别形成了统计数学、决策论和模糊数学.到目前为止,对未确知性信息的研究正在进行.

从工程软设计理论[1~3]的长期研究中形成了一种处理未确知性信息的数学方法,并抽象出一种"广义数",它是一种带有附加信息(附加限制)的区间数,称之为"未确知数".

本章着重讨论未确知信息的处理方法和未确知数的定义及其运算法则.

### 一、未确知信息

目前国内外的研究者对"未确知性"的理解是不同的,名称也不同.有关研究工作主要有两个学派:信度理论[4]和可能度理论[5].这些研究工作还很不成熟,而且未能提供切实可行的数学处理方法.

在本书中,"未确知信息"被定义为由于条件限制,在进行决策时尚无法确知的信息.也就是说,它是由于决策者所掌握的证据不足以确定事物的真实状态和数量关系而带来的纯主观的认识上的不确定性.

为了说明概念,下面举几个未确知信息的例子:

（1）一座已建成的建筑物的重量.

（2）建筑场地附近某断层是活断层还是死断层.

（3）某次历史地震的持续时间，震中位置等情况.

（4）去找某人，他不在家，他的去向.

这些例子都是已发生的和已存在的事物，因而没有随机性，它们也不存在定义和评定标准不清的问题，因而没有模糊性. 但对决策者来说，它们都是具有不确定性的未确知信息.

## 二、未确知信息的两种处理方法

若在决策中必须使用未确知信息，一般情况下，在对证据和有限的信息进行分析和论证后，可有两种处理方法：(1) 用主观概率来回答（例如上面的例 2 和例 4）；(2) 用主观隶属度来回答（如例 1 和例 3）. 下面分别加以说明.

**1. 主观概率分布估计**

所谓主观概率，就是人们对某一未确知事件的各种可能情况为真机率的主观估计. 因为处理的是已发生的事件，因而这里没有随机性，又因为处理的是一次性事件，因而主观概率没有任何统计的含义. 所以，这里虽然采用了处理随机事件的手法，但这种主观概率与统计概率有本质区别，它反映了未确知性和随机性有本质区别.

**2. 主观隶属度分布估计**

这是采用解决模糊性信息的手段来处理未确知信息.

例如，通过测量、分析和研究后，估计例 1 中建筑物的重量为 5000t 左右. 这个回答是用一个模糊量来估计建筑物重量这个确定性的量. 它纯粹是回答者对该具体量的一种主观粗略估计，因而称为主观隶属度分布. 下面用一个具体例子来说明表示未确知性的“主观隶属度”和表示一般模糊性的“客观隶属度”的区别.

例如，A 从未见过 B，而在某决策中，需要知道 B 的年龄，这时，C 告诉 A“B 是个青年人”，这是一个模糊信息. “青年”的隶属

函数必须符合大家公认的标准.必要时,可进行模糊统计得出,因而称为客观隶属度.换一种情况,如果A和B很熟,但不知B的确切年龄,这时如果A根据他的面貌、特征、性格估计B是23岁左右.这时A给出的隶属度分布就纯粹是个人主观地根据具体情况得出的对具体事物的模糊估计.它和"青年"之类的公认的模糊概念是有区别的.这正反映了未确知性和模糊性的差异.

## 三、可信度和可信度分布

主观概率分布和主观隶属度分布虽然在概念上有所区别,但它们在本质上却非常接近.概括地说,它们都是人们对某一未确知事件的各种可能情况或可能取值为真机率的主观估计,也就是决策者的经验、直觉、有限的信息等因素在该人心目中所产生的信任程度的比例分配.因此,可以把主观概率和主观隶属度统一为"可信度"①.可信度在论域上的分布称为"可信度分布"②.

未确知事物的真实状态或真值称为真元 $x_0$,它的任一个可能状态或可能值 $x_i$ 称为基元,所有基元组成的集合(论域)称为基本空间 $X$.

若 $X$ 为有限($I$ 个基元)离散论域,则称 $F(x_i)=F(x_0=x_i)=f_i$ 为基元 $x_i$ 的可信度,$I$ 个基元的可信度组成"可信度向量"

$$\boldsymbol{F}=(f_1,f_2,\cdots,f_i,\cdots,f_I) \tag{1-1-1}$$

若 $X$ 为连续论域,则可采用可信度分布密度 $f(x)$,这时,$x_0$ 落入$(x_i,x_j)$上的可信度为

$$F(x_i<x_0\leqslant x_j)=\int_{x_i}^{x_j}f(t)\mathrm{d}t \tag{1-1-2}$$

由于主观隶属度与主观概率都代表决策者心目中所产生的信任程度的比例分配,因而可以规定总可信度为1,即可令可信度满足归一化条件:

---

① Faith degree
② Faith Distribution

$$\sum_{i=1}^{I} F(x_i) = 1 \qquad (离散型)$$

$$\int_X f(x)\mathrm{d}x = 1 \qquad (连续型)$$

这对主观概率是符合一般条件，对主观隶属度就相当于对隶属度的取值附加了限制.

但应说明，对于未确知信息来说，上述归一化条件只是在信息较充分的条件下才能满足. 有时，可信度总和可能小于 1，这是因为：

（1）被考虑到的论域 $X$ 有可能漏掉某些可能状态和可能值.

（2）当信息的可靠性较差时，各种可能状态的可信度都比较小.

概括地说，总可信度小于 1 的情况反映了决策者的信心不足. 因而一般情况下，上述归一化条件应为：

$$\sum_{i=1}^{I} F(x_i) \leqslant 1 \qquad (离散型) \qquad (1\text{-}1\text{-}3)$$

$$\int_X f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1 \qquad (连续型) \qquad (1\text{-}1\text{-}4)$$

存在小于 1 的可能性，正是未确知信息的特点，这也正是它和模糊性及随机性在数学上的主要区别.

## §1.2 未确知数的概念

在很多场合下，未确知信息的真元 $x_0$ 可用一个数来表示，这时，未确知信息就可用可信度分布函数 $F(x)$唯一确定. 在不同情况下，$F(x)$分别代表主观概率分布和主观隶属度分布. 这就是说，未确知信息可以用一个广义数表示，它是一种带有附加信息(附加限制)的区间数，称之为“未确知数”①.

① unascertained number

由上述分析可给未确知数如下抽象定义.

**定义** 1.2.1 对于区间数$[a,b]$,若函数$F(x)$满足条件:

(1) $F(x)$是$(-\infty,+\infty)$上定义的不减右连续函数;

(2) $0\leqslant F(x)\leqslant 1$;

(3) 当$x<a$时,$F(x)\equiv 0$;当$x>b$时,$F(x)\equiv F(b)\leqslant 1$.

则说$[a,b]$和$F(x)$构成一个未确知数,记作

$$\{[a,b],\ F(x)\}$$

$F(x)$称为区间$[a,b]$上的主观可信度分布函数,简称可信度分布或分布,$[a,b]$为取值区间(论域).也可把$F(x)$叫做未确知数的分布,把$[a,b]$叫做未确知数的分布区间.

这个定义的实质是说,未确知数是带有附加条件的区间数,记号$\{[a,b],\ F(x)\}$是未确知数的未确知表达形式.$F(x)$为分布函数,其直观意义是真值$x_0$落在区间$(-\infty,x]$上的可信度,而$x_0$落在区间$(x_i,x_j]$上的可信度为$F(x_j)-F(x_i)$.

本书中假定:当$x\geqslant b$时,$F(x)\equiv F(b)=1$.

## §1.3 广义斯底尔吉斯积分与连续型未确知数

为定义未确知数的运算,引入广义斯底尔吉斯积分概念.因这一概念系由斯氏积分拓广而来,所以,称为广义斯底尔吉斯积分.

**定义** 1.3.1 若$F(x)$、$G(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的有界函数,任取$a<b$且$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,$\lambda=\max\limits_i|x_i-x_{i-1}|$,$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i(i=1,2,\cdots,n)$.若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)[G(x_i)-G(x_{i-1})]$$

与对区间$[a,b]$的分法以及对点$\xi_i$的取法无关而且存在,则称函数$F(x)$在区间$[a,b]$上对于函数$G(x)$可积,记成

$$(\mathrm{S})\int_a^b F(x)\mathrm{d}G(x)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)[G(x_i)-G(x_{i-1})]$$

当 $a\to-\infty,b\to+\infty$时，如果等号左边极限

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b F(x)\mathrm{d}G(x)=\int_{-\infty}^b F(x)\mathrm{d}G(x)$$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b F(x)\mathrm{d}G(x)=\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}G(x)$$

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b F(x)\mathrm{d}G(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\mathrm{d}G(x)$$

都各自存在，则称等号左边的广义斯氏积分收敛，否则，称广义斯氏积分发散.

本文中，$F(x)$、$G(x)$均是主观可信度分布函数，是其值介于 0 与 1 之间的不减右连续函数，并且满足归一化条件：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ 1, & x\geqslant b\end{cases}\qquad G(x)=\begin{cases}0, & x<c\\ 1, & x\geqslant d\end{cases}$$

对上面的分布 $F(x)$、$G(x)$，常遇到形如

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(x-t)\mathrm{d}G(t),\quad \int_{-\infty}^{+\infty}F(x+t)\mathrm{d}G(t)$$

$$\int_0^{+\infty}F\left(\frac{x}{t}\right)\mathrm{d}G(t),\quad \int_{-\infty}^{0}\left[1-F\left(\frac{x}{t}\right)\right]\mathrm{d}G(t)$$

$$\int_0^{+\infty}F(xt)\mathrm{d}G(t),\quad \int_{-\infty}^{0}[1-F(xt)]\mathrm{d}G(t)$$

的广义斯底尔吉斯积分，其中 $x\in(-\infty,+\infty)$是任意给定的参数. 容易看出，当 $G(t)$是区间$[c,d]$上的主观可信度分布时，因为当 $t<c$ 或 $t>d$ 时有 $\mathrm{d}G(t)=0$，故上述各积分实际上等同于在包含$[c,d]$于其内部的某个有限闭区间$[M_1,M_2]$上的斯氏积分，如

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(x-t)\mathrm{d}G(t)=\int_{M_1}^{M_2}F(x-t)\mathrm{d}G(t)$$

其中$(M_1,M_2)\supset[c,d]$.

因而，对上述 6 种形式上是广义斯氏积分实则是通常斯氏的积分，当然可以直接引用通常斯氏积分的有关定理. 对此，引用时不再另行说明.

为简单起见，开始时对分布 $F(x)$、$G(x)$ 加较强的条件，比如设 $F(x)$ 是连续型分布，即对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，均有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

其中 $f(t)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上定义的非负可积函数，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=1$$

称 $f(t)$ 为密度函数.

**定义** 1.3.2　若 $F(x)$ 是连续型分布，则称未确知数 $\{[a,b],F(x)\}$ 是连续型未确知数.

研究未确知数的四则运算，首先研究连续型未确知数的四则运算.这中间要反复用到斯底尔吉斯积分的存在性、性质及运算等有关定理.为此，把斯氏积分中几个常用定理叙述如下：

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 变差有界；或 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上(R)可积，$g(x)$ 可表为某个(R)可积函数的变上限积分，则斯氏积分

$$(\mathrm{S})\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}g(x)$$

存在.

(2) 斯氏积分有分部积分公式：

$$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}g(x)=f(x)g(x)\Big|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}g(x)\mathrm{d}f(x)$$

等号两边的积分有一个存在，则另一个也存在并且等号成立.

(3) 若积分 $\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}g(x)$ 存在，则对 $a<c<d$ 有

$$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}g(x)=\int_{a}^{c}f(x)\mathrm{d}g(x)+\int_{c}^{b}f(x)\mathrm{d}g(x)$$

即等号右边的两个积分不但存在且等号成立.

(4) 若积分 $\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}g(x)$ 存在，并且除有限个点外，$g'(x)$ 存在，(R)可积，则