TOPOLOGIE DER POLYEDER

UND KOMBINATORISCHE TOPOLOGIE DER KOMPLEXE

VON

KURT REIDEMEISTER
O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT
MARBURG (LAHN)

ZWEITE AUFLAGE

MIT 69 FIGUREN

LEIPZIG 1953
AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT
GEEST & PORTIG K.-G.

PRINTED IN GERMANY — LIZENZ-NR. 276 — 105/80/52 VOM 28. 11. 1952
DRUCK VON F. ULLMANN G. M. B. H., ZWICKAU SA. — III/29/2

MATHEMATIK
UND IHRE ANWENDUNGEN
IN PHYSIK UND TECHNIK

HERAUSGEGEBEN VON

A. KRATZER

MÜNSTER (WESTF.)

REIHE A

BAND 17

TOPOLOGIE DER POLYEDER

VON

K. REIDEMEISTER

LEIPZIG 1953

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT

GEEST & PORTIG K.-G.

DEM ANDENKEN VON
MAX DEHN

Vorwort der ersten Auflage.

Die kombinatorische Topologie hat ihren ersten systematischen Niederschlag in dem von Dehn und Heegaard verfaßten Artikel der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften gefunden. Die exakten Begriffsbildungen sind hier jedoch nur bis zur dritten Dimension durchgeführt, und der Erweiterung des Ansatzes auf Komplexe höherer Dimension haben sich erhebliche Schwierigkeiten in den Weg gestellt. Es ist wesentlich das Verdienst von M. A. H. Newman, diese Kluft durch eine Theorie der Simplizialkomplexe überbrückt zu haben. Er bestätigte dabei zugleich eine Auffassung, die in dem genannten Enzyklopädieartikel geäußert ist: daß die kombinatorische Topologie ein primitivster Abschnitt der Geometrie ist, in welchem der Grenzwertbegriff noch keine Rolle spielt. Wie in der nachfolgenden Einleitung näher geschildert ist, stellt sich nämlich die kombinatorische Topologie als ein wohlumrissenes Teilgebiet der Polyedertheorie heraus — eine Tatsache, die geeignet ist, den elementaren Charakter der kombinatorischen Topologie zu beleuchten und eine neue systematische Darstellung derselben zu rechtfertigen.

Bei der Fassung des Polyederbegriffs (§ 5) konnte ich an Arbeiten von Lennes und Veblen anknüpfen. Durch die Einführung in die Theorie der Homotopieketten (§ 17), die sich bisher nur mit kombinatorischen Methoden fassen ließen, hoffe ich den Zugang in ein Gebiet geebnet zu haben, das mit seinen mannigfachen Beziehungen zu Algebra und Zahlentheorie die Fruchtbarkeit der kombinatorischen Betrachtungsweise zeigt. Weiteren Aufschluß über Inhalt und Anlage des Buches geben die Einleitung und die zusammenfassende Inhaltsübersicht (S. 191).

Das Buch setzt nur wenige Vorkenntnisse aus der linearen Algebra und der linearen Geometrie voraus.

Marburg, April 1938.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Daß die neue Auflage keine wesentlichen Veränderungen gegenüber der ersten Auflage aufweist, liegt in der Natur der Sache. Die Definition der Polyeder durch ihre Zerlegungen in konvexe Raumstücke und die Begründung der kombinatorischen Topologie der Verwandschaft von Polyedern in Kapitel I bis III beruht auf so einfachen Voraussetzungen, daß der Aufbau nahezu zwangsläufig ist, sobald man gelernt hat, mit Simplizialkomplexen umzugehen. Andererseits hat die Aufgabe, zu entscheiden, ob Polyeder verwandt sind, in der Zwischenzeit keine prinzipielle Förderung erfahren und so konnte auch Kapitel IV in seiner bisherigen Gestalt belassen werden.

Noch eine Bemerkung für den Leser: Das Verständnis wird erleichtert, wenn man sich den Inhalt der Sätze der n-dimensionalen Geometrie, die im folgenden dargestellt werden, zunächst für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ veranschaulicht. Dies gilt auch für die Theorie der Simplizialkomplexe in Paragraph 11 und 12, in denen es sich hauptsächlich um rein kombinatorische Sachverhalte handelt. Kapitel IV ist im einzelnen nicht von Kapitel III abhängig und kann deswegen als Fortsetzung von Kapitel II gelesen werden.

Marburg, Juli 1952

Kurt Reidemeister.

Inhaltsverzeichnis.

III. Kapitel.

Kombinatorische Topologie der Polyeder.

IV. Kapitel.

Topologische Eigenschaften der Polyeder.

Einleitung.

Einige einfache Figuren, die üblicherweise Polygone oder Polyeder genannt werden, Dreiecke, Vierecke, Streckenzüge, Würfel, Parallelepipede, sind jedermann bekannte und unentbehrliche Hilfsmittel der euklidischen Geometrie. Der allgemeine Begriff des zwei- oder dreidimensionalen Polyeders spielt jedoch bei der Definition dieser Figuren keine Rolle. Dreiecke und Würfel werden direkt aus den geometrischen Axiomen erklärt. Auch die umfassende Klasse der konvexen Polyeder führt man als besondere konvexe Bereiche, etwa als Durchschnitt endlich vieler Halbräume ein, nicht als Polyeder mit der zusätzlichen Eigenschaft der Konvexität. Wie geläufig uns auch die aus den vielen elementaren Einzelbeispielen abstrahierte Vorstellung „Polyeder" ist — dem Begriff des Polyeders fehlt zunächst jene exakte Eindeutigkeit, die für eine systematische Untersuchung erforderlich ist, und so sieht man sich gleich beim ersten Schritt in die Polyedertheorie vor eine Entscheidung gestellt, die für den weiteren Aufbau folgenschwer ist.

Die hier zugrunde gelegte Definition besagt: Ein Polyeder P ist eine Punktmenge eines linearen n-dimensionalen Raumes R^n, welche sich durch die mengentheoretischen Prozesse der Durchschnitt- und Summenbildung aus endlich vielen Halbräumen und linearen Unterräumen erzeugen läßt. Diese Definition setzt nur die Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome der linearen Geometrie, nicht aber Stetigkeitseigenschaften derselben voraus; sie ist eine Erweiterung der oben für konvexe Polyeder angegebenen. Die Gesamtheit der Polyeder eines R^n bildet einen sogenannten Mengenring — d. h. Summe und Durchschnitt zweier Polyeder ist wieder ein Polyeder —, und zwar den kleinsten Mengenring, welcher die sämtlichen Halbräume und linearen Unterräume des R^n enthält.

Ein Polyeder P läßt sich natürlich auf verschiedene Weise erzeugen, und so ergibt sich aus unserer Definition die zweifache Aufgabe, den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Darstellungsweisen von P und die von der Darstellungsweise unabhängigen Eigenschaften von P aus einer einzelnen Darstellung zu ermitteln. Die Lösung dieser formalen Aufgabe erfolgt durch die Untersuchung der geometrisch bedeutungsvollen Berandungsbeziehungen zwischen Polyedern, und zwar in zwei Etappen.

Zuerst wird (Kapitel I) gezeigt, daß ein d-dimensionales **konvexes Raumstück** C^d, das ist der Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen H_i^n und einem d-dimensionalen linearen Unterraum R^d, einen Rand besitzt, der aus konvexen Raumstücken von geringerer Dimension als d, den Randseiten von C^d, besteht. Die $(d-1)$-dimensionalen Seiten legen eine Durchschnittdarstellung von C^d mit einer Minimalzahl von Halbräumen fest.

Mit Hilfe der Berandungsbeziehungen zwischen konvexen Raumstücken lassen sich nun unter den Erzeugungsweisen beliebiger Polyeder die **randtreuen Zerlegungen** in konvexe Raumstücke aussondern. Die Raumstücke

$$C_i^d \qquad (i = 1, 2, \ldots, \alpha^d;\ d = 0, 1, \ldots, n)$$

bilden eine Zerlegung von P, wenn jeder Punkt von P in einem und nur einem C_i^d vorkommt; P ist also Summe der C_i^d. Und diese Zerlegung ist randtreu, wenn ein $C_{i_1}^{d_1}$, das einen Randpunkt eines $C_{i_2}^{d_2}$ enthält, ganz dem Rand von $C_{i_2}^{d_2}$ angehört; es ist dann $d_1 < d_2$. Zwei verschiedene randtreue Zerlegungen desselben Polyeders gehen durch eine Folge von **Zweiteilungen** in dieselbe Zerlegung des Polyeders über; bei einer Zweiteilung wird ein Raumstück C_i^d durch zwei Raumstücke der gleichen Dimension C_{1i}^d, C_{2i}^d und ein Raumstück C_{12i}^{d-1} von einer um 1 geringeren Dimension ersetzt. Damit sind auch die Eigenschaften einer randtreuen Zerlegung, welche dem Polyeder selbst zukommen, gekennzeichnet: es sind genau diejenigen Eigenschaften von Zerlegungen, welche bei Zweiteilung erhalten bleiben.

In der bisher geschilderten ersten Etappe sind Sätze über konvexe Punktmengen das wichtigste Hilfsmittel; in der zweiten Etappe (Kapitel II) ist die Tatsache ausschlaggebend, daß die randtreuen Zerlegungen **Komplexe** im Sinne der kombinatorischen Topologie sind — d. h. Systeme von Zellen, denen je eine Dimension zugeordnet ist und zwischen denen gewisse Berandungsbeziehungen bestehen. Jedes Polyeder hat ein Randpolyeder, genauer ein d-dimensionales Polyeder ein $(d-1)$-dimensionales Randpolyeder. Ein d-dimensionales Polyeder besitzt ferner bestimmte **Komponenten**, die ihrerseits d-dimensionale Polyeder eines R^d sind. Und die $(d-1)$-dimensionalen **Randseiten** der Komponenten bestimmen eine normierte randtreue Zerlegung des Polyeders. So findet die durch unsere Definition gestellte formale Aufgabe ihre Lösung in einer Beschreibung der Polyeder, welche ganz der elementaren Vorstellung entspricht. Übrigens läßt sich erst an dieser Stelle zeigen, daß ein konvexes Polyeder ein konvexes Raumstück ist, d. h. daß eine durch Durchschnitt- und Summenbildung aus Halbräumen und linearen Unterräumen erzeugte Punktmenge, die konvex ist, Durchschnitt gewisser Halbräume und Unterräume ist. Die Möglichkeit, ein d-dimensionales Polyeder eines R^d durch seine Randseiten zu kennzeichnen, erhellt aus dem Jordanschen Satz für Polyeder: Ein Randpolyeder ist stets geschlossen, und ein endliches $(d-1)$-dimensionales geschlossenes Polyeder eines R^d bestimmt genau ein endliches d-dimensionales Polyeder, dessen Rand es ist. — Gleichlaufend mit dieser Beschreibung der Polyeder ergibt sich eine schrittweise sich verfeinernde axiomatische Beschreibung der Zerlegungskomplexe.

Ist die bisherige Entwicklung im wesentlichen durch den Ausgangspunkt, die Definition der Polyeder, bestimmt, so tritt für den weiteren Ausbau der Theorie eine durch die randtreuen Zerlegungen vermittelte Äquivalenzbeziehung zwischen Polyedern als maßgeblicher Gesichtspunkt hinzu (Kapitel III). Zwei Polyeder heißen verwandt, wenn sie isomorphe Zerlegungen besitzen, d. h. Zerlegungen, deren Raumstücke sich so einander zuordnen lassen, daß entsprechende Raumstücke in denselben Berandungsbeziehungen stehen. Die Verwandtschaft ist transitiv, und Grundaufgabe ist fernerhin, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Verwandtschaft aufzustellen. Die durch diese Frage gestiftete Teildisziplin der Polyedertheorie ist die kombinatorische Topologie. In der Tat, sind Z_1 und Z_2 Zerlegungen der verwandten Polyeder P_1 und P_2, so muß die notwendige und hinreichende Bedingung der Verwandtschaft von P_1 und P_2 allein durch die Komplexstruktur von Z_1 und Z_2 bestimmt sein. Der Verwandtschaft von Polyedern entspricht daher eine rein kombinatorische Äquivalenzbeziehung von Komplexen. Da sich konvexe Raumstücke in Simplizes zerlegen lassen, ist die Untersuchung simplizialer Komplexe, d. h. solcher Komplexe, deren Zellen sämtlich Simplizes sind, dabei die Hauptaufgabe. Ihre Äquivalenz läßt sich nach Newman auf eine Umformung des Zweiteilungsprozesses für simpliziale Komplexe zurückführen und mit Hilfe des Verbindungspolynoms für solche Komplexe sehr elegant behandeln; eine wichtige Rolle spielen dabei die Begriffe des kombinatorischen Elementes und der kombinatorischen Sphäre. Das grundlegende Ergebnis ist die Charakterisierung der Äquivalenz von Simplizialkomplexen auf rein kombinatorischem Wege. Das anschließende Kapitel berichtet über die wichtigsten topologischen Eigenschaften der Polyeder, die Homologiegruppen, die Fundamentalgruppe, die Homotopiekettenringe. — Damit ist in großen Zügen der Gedankengang wiedergegeben, der die Anlage des Buches bestimmte.

Erstes Kapitel.

Polyeder und Punktmengen.

§ 1. Lineare Räume.

1·1. Geordnete Schiefkörper. Die Definition eines affinen oder linearen, n-dimensionalen Raumes R^n erfolgt am bequemsten mit Hilfe der Algebra.

Ein Schiefkörper K ist eine Menge von Elementen oder Zahlen α, β, γ, ..., für welche zwei Verknüpfungen, Addition und Multiplikation, erklärt sind, die den folgenden Rechenregeln genügen[1]):

A. 1. Die Addition ist stets ausführbar, d. h. zu zwei Zahlen α, β gibt es stets eine dritte γ mit

$$\alpha + \beta = \gamma .$$

A. 2. Die Addition ist assoziativ, d. h. für die drei Zahlen α, β, γ ist stets

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma .$$

A. 3. Es gibt ein Nullelement 0, für welches stets

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

ist.

A. 4. Zu jedem Element α gibt es ein entgegengesetzt gleiches $-\alpha$ mit

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0 .$$

A. 5. Die Addition ist kommutativ, d. h. für zwei Zahlen α, β ist stets

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha .$$

Zusammengefaßt besagen die Axiome ***A.*** 1 bis ***A.*** 4, daß die Zahlen des Schiefkörpers bezüglich der Addition eine Gruppe, und zwar wegen ***A.*** 5 eine kommutative oder Abelsche Gruppe bilden.

Für die Multiplikation wird gefordert:

M. 1. Die Multiplikation ist stets ausführbar, d. h. zu zwei Zahlen α, β gibt es stets eine dritte γ mit

$$\alpha \beta = \gamma .$$

---

[1]) Zur Ergänzung des nachfolgenden Berichtes über Körper und Schiefkörper vgl. etwa O. Haupt, Einführung in die Algebra, Leipzig 1929.

M. 2. Die Multiplikation ist assoziativ, d. h. für drei Zahlen α, β, γ gilt stets

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma\,.$$

M. 3. Es gibt ein Einselement 1, für welches stets

$$1\alpha = \alpha 1 = \alpha$$

ist.

M. 4. Zu jedem Element $\alpha \neq 0$ gibt es ein inverses α^{-1} mit

$$\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1\,.$$

Für Addition und Multiplikation gemeinsam gilt das distributive Gesetz:

A. M. Für drei Zahlen α, β, γ ist stets

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

und

$$(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha\,.$$

Die Axiome ***M.*** 1 bis ***M.*** 4 besagen, daß die von 0 verschiedenen Zahlen des Schiefkörpers eine Gruppe mit der Multiplikation als Verknüpfung bilden. Ein Schiefkörper ist ein Körper, wenn noch das weitere Axiom gilt:

M. 5. Die Multiplikation ist kommutativ, d. h. für zwei Zahlen α, β ist stets

$$\alpha\beta = \beta\alpha\,.$$

Ein Schiefkörper ist geordnet, wenn zwischen je zwei verschiedenen Zahlen eine Anordnungsrelation besteht, d. h. bei geeigneter Bezeichnung der Zahlen α, β die eine α kleiner ist als die andere β und das Umgekehrte nicht gilt, in Zeichen

$$\alpha < \beta\,,$$

und wenn diese Beziehung den folgenden Regeln genügt:

O. 1. Die Anordnungsbeziehung ist transitiv, d. h. sind α, β, γ drei Zahlen und ist $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma$, so ist auch $\alpha < \gamma$.

O. 2. Ist $\alpha < \beta$, so ist stets auch $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

O. 3. Ist $\alpha < \beta$ und $0 < \gamma$, so ist auch $\alpha\gamma < \beta\gamma$ und $\gamma\alpha < \gamma\beta$.

Das Axiom ***O.*** 2 ist das Monotoniegesetz der Addition, ***O.*** 3 das Monotoniegesetz der Multiplikation. Ist α kleiner als β, so ist β größer als α, in Zeichen $\beta > \alpha$. Die Zahlen, die größer als Null sind, heißen positiv, die kleiner als Null sind, negativ.

Ist α positiv, so ist $-\alpha$ negativ, und umgekehrt. Summe und Produkt positiver Zahlen ist wieder positiv.

Aus den Verknüpfungen des Schiefkörpers lassen sich in bekannter Weise die Verknüpfungen für Zahlen-n-tupel oder Vektoren

$$\mathfrak{v} = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

erklären. Sind

$$\mathfrak{v}_i = \xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

drei Vektoren, so ist $\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_3$ gleichbedeutend mit

$$\xi_{1k} + \xi_{2k} = \xi_{3k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Unter $\lambda\,\mathfrak{v}$ wird der Vektor

$$\lambda\,\xi_1, \lambda\,\xi_2, \ldots, \lambda\,\xi_n$$

verstanden. Aus den Axiomen ***A.*** 1 bis ***A.*** 5 folgt:

V. 1. Die Vektoren bilden eine kommutative Gruppe mit der Vektoraddition als Verknüpfung.

Für die Multiplikation mit dem Faktor λ gelten nach ***M.*** 1 bis ***M.*** 4 und ***A. M.***:

V. 2. Der Vektor $\lambda\,\mathfrak{v}$ ist durch λ und $\mathfrak{v}$ stets eindeutig bestimmt.

V. 3. Für $\lambda = 1$ ist $\lambda\,\mathfrak{v} = \mathfrak{v}$

V. 4. Für zwei Zahlen λ, μ gilt stets

$$\lambda(\mu\,\mathfrak{v}) = (\lambda\,\mu)\,\mathfrak{v}\,.$$

V. 5. Die Multiplikation mit einem Faktor ist distributiv bezüglich der Addition und der Vektoraddition, d. h. es ist

$$(\lambda + \mu)\,\mathfrak{v} = \lambda\,\mathfrak{v} + \mu\,\mathfrak{v}$$

und

$$\lambda(\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2) = \lambda\,\mathfrak{v}_1 + \lambda\,\mathfrak{v}_2\,.$$

Der Begriff der Vektoren läßt sich folgendermaßen verallgemeinern: Eine Gesamtheit $\mathfrak{W}$ von Elementen oder Vektoren $\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \ldots$ ist eine n-dimensionale Vektormannigfaltigkeit über dem Schiefkörper $\mathfrak{K}$, wenn zwischen den Vektoren eine Addition $\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2 = \mathfrak{w}_3$ und eine Multiplikation mit Faktoren λ aus $\mathfrak{K}$, $\lambda\,\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}_2$ erklärt ist und wenn jedem Vektor $\mathfrak{w}$ eineindeutig ein Zahlen-n-tupel $\mathfrak{v} = a(\mathfrak{w})$ so zugeordnet werden kann, daß

$$a(\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2) = a(\mathfrak{w}_1) + a(\mathfrak{w}_2)$$

und

$$a(\lambda\,\mathfrak{w}) = \lambda(a(\mathfrak{w}))$$

ist.

Die Vektoren $\mathfrak{w}$ erfüllen alsdann ebenfalls die Axiome ***V.*** 1 bis ***V.*** 5. Die Abbildung $a(\mathfrak{w}) = \mathfrak{v}$ ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{W}$ auf die Zahlen-n-tupel. Fordern wir von den Vektoren der Gesamtheit $\mathfrak{W}$ an Stelle der Abbildung $a(\mathfrak{w})$, daß sie die Axiome ***V.*** 1 bis ***V.*** 5 erfüllen, so läßt sich $\mathfrak{W}$ eine Dimension zuordnen, die eine natürliche Zahl n oder die unendlich ist. Falls die Dimension gleich n ist, folgt dann auch die Existenz eines Isomorphismus $a(\mathfrak{w}) = \mathfrak{v}$.

1·2. Algebraische Definition des R^n. Eine Menge R^n von Elementen oder Punkten $p_1, p_2, \ldots$, in der ein System von Teilmengen, die *Geraden* R^1 des R^n, erklärt ist, ist ein *linearer* oder *affiner n-dimensionaler Raum* über dem Schiefkörper $\mathfrak{K}$, wenn die folgenden beiden Forderungen erfüllt sind:

I. 1. Zwei verschiedene Punkte bestimmen eine und nur eine Gerade, welche sie enthält. Eine Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte.

I*. Es gibt eine eineindeutige Abbildung der Punkte p auf die Zahlen-n-tupel $\mathfrak{v}$ des Schiefkörpers $\mathfrak{K}$, für die gilt: entsprechen den Punkten p_1, p_2 die Vektoren $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$, so entsprechen den Punkten p der durch p_1, p_2 bestimmten Geraden genau die Vektoren

$$\mathfrak{v} = \lambda_1 \mathfrak{v}_1 + \lambda_2 \mathfrak{v}_2 \quad \text{mit} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 .$$

Ein linearer Raum R^n über einem geordneten Schiefkörper $\mathfrak{K}$ ist ein *Raum mit Anordnung* oder ein *geordneter linearer Raum*, wenn noch eine zweite Klasse von Untermengen, die *Strecken* S^1, erklärt sind und diese den folgenden Axiomen genügen:

S. 1. Zwei verschiedene Punkte p_1, p_2 bestimmen eindeutig eine Strecke $p_1 p_2 = p_2 p_1 = S^1$, und für jede Strecke gibt es zwei Punkte, durch welche sie bestimmt ist. Sie heißen die Randpunkte der Strecke.

S*. Entsprechen den Punkten p_1, p_2 die Vektoren $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$, so entsprechen den Punkten p, welche der Strecke S^1 angehören, genau die Punkte mit den Vektoren

$$\mathfrak{v} = \lambda_1 \mathfrak{v}_1 + \lambda_2 \mathfrak{v}_2 , \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 , \qquad \lambda_1, \lambda_2 > 0 .$$

Eine Strecke ist also in der durch ihre Randpunkte bestimmten Geraden enthalten. Die durch Hinzunahme der Randpunkte aus einer Strecke entstehende Punktmenge heißt *abgeschlossene Strecke*, sie wird mit $\overline{p_1 p_2}$ bezeichnet; im Gegensatz zu abgeschlossenen Strecken wird eine Strecke selbst auch *offene Strecke* genannt.

Zunächst einige Folgerungen aus den Axiomen ***I.*** 1 und ***I****.

Eine Menge R von Punkten ist ein *linearer Unterraum* von R^n, wenn sie mit je zwei Punkten p_1, p_2 auch die Punkte der durch p_1, p_2 bestimmten Geraden enthält[1]). Durch Induktion folgt:

Enthält ein linearer Unterraum die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_\alpha$, denen die

---

[1]) Zur Theorie der linearen Unterräume vgl. etwa O. Schreier und E. Sperner, Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra. I. Leipzig und Berlin 1931.