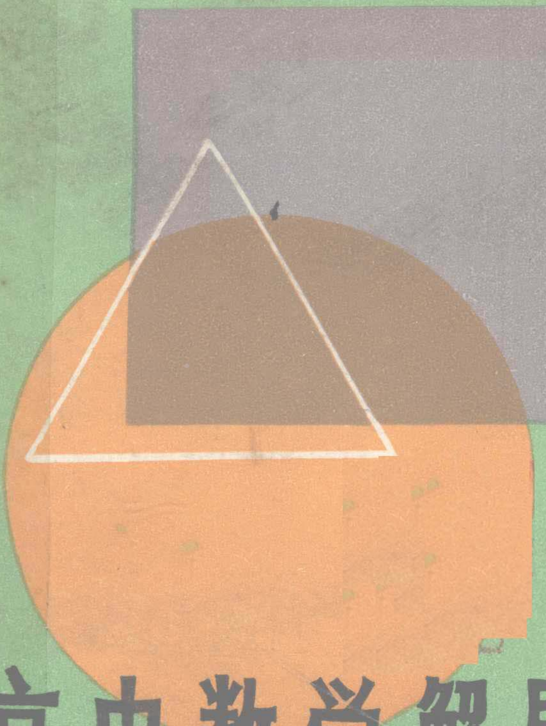
GAO ZHONG SHUXUE
JIETI TUJING



高中数学解题途径

华东师范大学出版社

高中数学解题途径

华东师范大学
第一附中数学教研组　编

华东师范大学出版社

高中数学解题途径

华东师范大学
第一附中数学教研组　编

华东师范大学出版社出版
（上海中山北路3663号）

新华书店上海发行所发行　宜兴南漕印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：13　字数：290千字

1986年5月第一版　1988年3月第四次印刷

印数：165,001—175,000本

ISBN　7—5617—0060—1/G·027

定价：2.20元

前　　言

本书系由《中学数学解题途径》修订补充而成．《中学数学解题途径》出版以后，深受广大读者爱护和支持．我们曾接到很多读者来信，对之深表欢迎，认为它能指出解题关键，揭示解题规律，使读者容易找到正确的解题途径，对读者有一定的帮助；同时也希望我们增补某些高中数学内容，如行列式、排列组合、反三角函数和三角方程等．为此，我们对原书作了修改和补充．

补充后的书名改为《高中数学解题途径》，高中数学的内容除了导数、微分、概率外，基本上收集在本书内．它对社会青年的自学或者高中各年级学生课外阅读、青年职工业余自学都很适用．为了便于读者自学，本书还选了少量习题，希望读者边阅读边练习，逐步理解和掌握书中的内容．阅读时要对照现行教材的有关章节，在复习和理解有关基础知识后，使用本书收效更大．

本书由石源泉、王剑青、刘定一、鲍宜国、夏益辉、徐惠芳、毛梦奇、唐尚群同志执笔，虽作了一定的努力，但限于水平，不当之处在所难免，希望读者提出宝贵意见，以便改正．

华东师范大学第一附中数学教研组

一九八五年一月

目　录

第一章　式

一、因式分解

(一)在不同数域里进行因式分解

在初中代数中，因式分解是一个很重要的问题．因式分解一般在有理数范围内讨论，或者在实数范围内进行，而且分解的因式必须是整式．初中学过的问题这里不再讨论，但当数扩展到复数后，因式分解必须按指定的数域范围进行．根据数的范围多项式因式分解有三种情况：1．在有理数范围内；2．在实数范围内；3．在复数范围内．本章研究的因式分解问题如无特殊指出，一般指的是在有理数范围内进行的．

［例一］　分别在有理数、实数、复数范围内分解因式：

(1) x^4-4。　　　　(2) $3x^4-5x^3+3x^2+4x-2$。

解：(1) 在有理数范围内，

$$x^4-4=(x^2+2)(x^2-2);$$

在实数范围内，

$$x^4-4=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2});$$

在复数范围内，

$$x^4-4=(x+i\sqrt{2})(x-i\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}).$$

(2) 在有理数范围内，

$$\begin{aligned}原式&=3x^2(x^2-2x+2)+x(x^2-2x+2)-(x^2-2x+2)\\&=(x^2-2x+2)(3x^2+x-1);\end{aligned}$$

在实数范围内，

$$原式=3(x^2-2x+2)\left(x+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x+\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}\right);$$

在复数范围内，

$$原式=3(x-1-i)(x-1+i)\left(x+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}\right).$$

注意，在实数范围内，只有一次二项式与有虚根的二次三项式是不可约的．任何二次以上的实系数多项式都是可约的，并且能够表示成一次及二次三项式因子的乘积的形式．

［例二］ 在有理数、实数、复数范围内分解因式 $x^{12}-y^{12}$.

解：在有理数范围内：

$$原式=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4);$$

在实数范围内：

$$原式=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)\cdot(x^2-\sqrt{3}xy+y^2)(x^2+\sqrt{3}xy+y^2);$$

在复数范围内：

$$原式=(x+y)(x-y)(x+iy)(x-iy)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}y\right)\cdot\left(x+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}y\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}y\right)\cdot\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}y\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}+i}{2}y\right)\cdot\left(x+\frac{-\sqrt{3}+i}{2}y\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}-i}{2}y\right)\cdot\left(x+\frac{\sqrt{3}+i}{2}y\right).$$

（二）应用除法分解因式

如果多项式 $f(x)$ 能够被多项式 $\phi(x)$ 整除，并且存在第三个多项式 $g(x)$，能使恒等式 $f(x)=\phi(x)g(x)$ 成立，则 $\phi(x)$、$g(x)$ 叫做 $f(x)$ 的因子．设有理系数多项式

$$f(x)=\frac{1}{a}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n),$$

这里 a、a_0、a_1、……、a_{n-1}、a_n 都是整数（$a\neq0$），若 $f(x)$ 有一次因式 $\left(x-\frac{p}{q}\right)$，其中 p、q 是整数，那么 p 一定是 a_n 的约数，q 一定是 a_0 的约数．如要使多项式 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除，必须并且只须 $f(a)=0$．解题时，如多项式有一次因式，一般可应用综合除法．某些有高于一次的因式或特殊的多项式，可考虑应用一般除法．例如，多项式 $x^4-x^3-5x^2-7x+12$、x^5-y^{10} 的因式分解，前者可用综合除法，后者可用一般除法．

［例三］　将多项式 $f(x)=x^5+6x^4+13x^3+14x^2+12x+8$ 分解因式．

解：用 ±1，±2，±4，±8 来试验，知道 $f(x)$ 有一个根 $x=-2$．以 $x+2$ 除，得

$$f(x)=(x+2)(x^4+4x^3+5x^2+4x+4).$$

经过试验知第二因式有一根 $x=-2$，以 $x+2$ 除，得

$$x^4+4x^3+5x^2+4x+4=(x+2)(x^3+2x^2+x+2).$$

再试验知 $x=-2$ 也是 x^3+2x^2+x+2 的一个根，得

$$x^3+2x^2+x+2=(x+2)(x^2+1).$$

所以最后有

$$x^5+6x^4+13x^3+14x^2+12x+8=(x+2)^3(x^2+1).$$

［例四］　分解因式 $3x^5-x^4+x^3-7x^2+4$．

解：多项式 $3x^5-x^4+x^3-7x^2+4$ 可能有的有理系数因

式$\left(x-\frac{p}{q}\right)$中，$\frac{p}{q}$只能为 ±1、±2、±4、$\pm\frac{1}{3}$、$\pm\frac{2}{3}$、$\pm\frac{4}{3}$.
用综合除法试验：

$$\begin{array}{r|l} 3-1+1-7+0+4 & 1 \\ +3+2+3-4-4 & \\ \hline 3+2+3-4-4+0 & \end{array}$$

$\therefore$ 原式$=(x-1)(3x^4+2x^3+3x^2-4x-4)$. 继续试验

$$\begin{array}{r|l} 3+2+3-4-4 & 1 \\ +3+5+8+4 & \\ \hline 3+5+8+4+0 & \end{array}$$

$\therefore$ 原式$=(x-1)^2(3x^3+5x^2+8x+4)$. 继续试验

$$\begin{array}{r|l} 3+5+8+4 & -\frac{2}{3} \\ -2-2-4 & \\ \hline 3+3+6+0 & \end{array}$$

$\therefore$ 原式$=\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1)^2(3x^2+3x+6)$

$$=(3x+2)(x-1)^2(x^2+x+2).$$

［例五］ 把$x^4-\frac{3}{2}x^3-6x^2+\frac{7}{2}x+3$分解因式.

解：把多项式写成$\frac{1}{2}(2x^4-3x^3-12x^2+7x+6)$. 在可能有的有理系数因式$\left(x-\frac{p}{q}\right)$中，$\frac{p}{q}$只能是 ±1、±2、±3、±6、$\pm\frac{1}{2}$、$\pm\frac{3}{2}$. 用综合除法试验：

$$
\begin{array}{l|l}
2-3-12+7+6 & 1 \\
\quad 2-1-13-6 & \\
\hline
2-1-13-6+0 & -2 \\
\quad -4+10+6 & \\
\hline
2-5-3+0 & 3 \\
\quad +6+3 & \\
\hline
2+1+0 &
\end{array}
$$

$\therefore$ 原式$=\frac{1}{2}(x-1)(x+2)(x-3)(2x+1)$.

[例六] 分解整系数多项式

$$f(x)=2x^3-(2a-b)x^2-(a+b)bx+ab^2$$

的因式.

解：多项式 $f(x)$ 是含有文字的整系数多项式，并且是以 x 的降幂排列的，应用综合除法

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 2-(2a-b)-(a+b)b+ab^2 & a \\
 & \quad +2a \qquad +ab \qquad -ab^2 & \\
\hline
 & 2+b \qquad -b^2 & \frac{b}{2} \\
 & \quad +b \qquad +b^2 & \\
\hline
2 & 2+2b & \\
\hline
 & 1+b &
\end{array}
$$

$\therefore$ $f(x)=(x-a)2\left(x-\frac{b}{2}\right)(x+b)$

$\qquad =(x-a)(2x-b)(x+b)$.

[例七] 把下列各式分解因式：

(1) a^5-b^5. (2) $32x^{15}+y^{15}$.

解：当 n 为正整数时，(i) a^n-b^n 能被 $a-b$ 整除；(ii) 当 n 为偶数时，a^n-b^n 能被 $a-b$ 及 $a+b$ 整除；(iii) a^n+b^n 决不能被 $a-b$ 整除；(iv) 当 n 为奇数时，a^n+b^n 能被 $a+b$ 整除.

(1) $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$.

(2)
$$\begin{aligned}32x^{15}+y^{15}&=(2x^3+y^3)[(2x^3)^4-(2x^3)^3y^3\\&\quad+(2x^3)^2(y^3)^2-(2x^3)(y^3)^3+(y^3)^4]\\&=(2x^3+y^3)(16x^{12}-8x^9y^3+4x^6y^6\\&\quad-2x^3y^9+y^{12}).\end{aligned}$$

［例八］ 把 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 因式分解.

解：$a^3+b^3+c^3-3abc=a(a^2-3bc)+b^3+c^3$.

令 $a=-(b+c)$ 代入原式为零，所以 $a+b+c$ 是它的一个因式．应用一般除法得

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-3ab\\&\quad=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).\end{aligned}$$

或者设 原式$=(a+b+c)[A(a^2+b^2+c^2)+B(ab+bc+ca)]$，比较 a^3 系数知 $A=1$．取 $a=1$，$b=1$，$c=0$ 代入，求得 $B=-1$.

（三）应用待定系数法

用待定系数法分解因式，就是把原式假设成若干个因式的连乘积，使这些因式的连乘积与原式组成恒等式．在所假设的因式中，某些项的系数（或常数）可先用待定值的字母表示，然后通过多项式恒等定理，建立方程组，求出这些待定系数的值.

［例九］ K 为何值时，$x^2-y^2+3x-7y+K$ 可以分解成两个一次因式？

解：设原式 $=(x+y+m)(x-y+l)$

$$=x^2-yx+lx+yx-y^2+ly+mx-my+ml$$

$$=x^2+(l+m)x-y^2+(l-m)y+ml.$$

比较系数，得

$$\begin{cases}l+m=3\\ l-m=-7,\end{cases}$$

解方程组，得 $l=-2$, $m=5$,

$$\therefore\quad K=5\times(-2)=-10.$$

另解：设 $x^2-y^2+3x-7y+K$

$$=x^2+3x-(y^2+7y-K)=0.$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+4(y^2+7y-K)}}{2}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{4y^2+28y+9-4K}}{2}.$$

原式要分解成两个一次因式，必须 $4y^2+28y+9-4K$ 是完全平方式.

$$4y^2+28y+9-4K$$

$$=4\left[y^2+7y+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2+\frac{9-4K}{4}\right]$$

$$=4\left[\left(y+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{-49+9-4K}{4}\right]$$

$$=4\left[\left(y+\frac{7}{2}\right)^2-K-10\right].$$

当 $-K-10=0$ 时，为完全平方式，即 $K=-10$ 时，原式可分解成两个一次因式.

［例十］ 把 $3x^2+5xy-2y^2+x+9y-4$ 分解因式.

解法1. 应用待定系数法. 设

$$\begin{aligned}原式&=(3x-y+a)(x+2y+b)\\&=3x^2-xy+ax+6xy-2y^2+2ay+3bx-by+ab\\&=3x^2+5xy-2y^2+(a+3b)x+(2a-b)y+ab.\end{aligned}$$

比较系数，得

$$\begin{cases}a+3b=1\\2a-b=9\\ab=-4.\end{cases}$$

解方程组，得 $a=4,\ b=-1.$

$$原式=(3x-y+4)(x+2y-1).$$

解法 2 把 x、y 按二次三项式降幂整理，就可用十字相乘法或求根公式解之.

$$原式=3x^2+(5y+1)x-(2y-1)(y-4),$$

$$\because\quad \begin{array}{ccc}3 & & -(y-4)\\ & \times & \\ 1 & & 2y-1\\ \hline \multicolumn{3}{c}{-y+4+6y-3=5y+1}\end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 原式&=[3x-(y-4)](x+2y-1)\\&=(3x-y+4)(x+2y-1).\end{aligned}$$

也可应用求根公式:

$$\begin{aligned}原式&=3x^2+(5y+1)x-2y^2+9y-4\\&=3\left(x+\frac{5y+1+\sqrt{(5y+1)^2+4\times3(2y^2-9y+4)}}{2\times3}\right)\\&\quad\cdot\left(x+\frac{5y+1-\sqrt{(5y+1)^2+4\times3(2y^2-9y+4)}}{2\times3}\right)\\&=3\left(x+\frac{5y+1+7(y-1)}{2\times3}\right)\left(x+\frac{5y+1-7(y-1)}{2\times3}\right)\\&=(x+2y-1)(3x-y+4).\end{aligned}$$

[例十一] 已知方程 $x^4-2x^2y-3y^2+8y+m=0$ 的图象是两条圆锥曲线，求 m 的值和两曲线的交点.

解：$\because\ x^4-2x^2y-3y^2=(x^2+y)(x^2-3y)$，

设 $x^4-2x^2y-3y^2+8y+m=(x^2+y+p)(x^2-3y+q)$

$$=x^4-2x^2y+(p+q)x^2-3y^2+(q-3p)y+pq.$$

由多项式恒等定理得

$$\begin{cases} p+q=0 \\ q-3p=8 \\ pq=m, \end{cases}$$

解得 $p=-2,\ q=2.$

$$\therefore\quad m=-4.$$

于是原方程就可以表示成：

$$(x^2+y-2)(x^2-3y+2)=0.$$

所得两圆锥曲线的方程就是

$$x^2+y-2=0,$$

$$x^2-3y+2=0.$$

可见，它们是两条抛物线.

解方程组，得

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1; \end{cases}\qquad \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=1. \end{cases}$$

所以，当 $m=-4$ 时，原方程的图象是两条抛物线，它们的交点是(1, 1)和(−1, 1).

练 习 一 (1)

一、在实数范围内把下列各式分解因式：

1. $x^2+4x+1.$　　2. $x^4-5x^2+6.$

3. $6x^4-7x^2-3.$　　4. $\sqrt{3}a^2-\sqrt{6}a-\sqrt{2}a+2.$

5. $9x^2-12xy+y^2$. 6. $5x^2y^2+xy-7$.

二、在实数范围内和复数范围内把下列各式分解因式.

1. x^3-1.

2. x^4+1. [提示：在有理数范围内不可约. 在实数范围内原式 $=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$. 在复数范围内原式 $=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$.]

3. $x^4+2x^3+5x^2+4x+12$. [提示：原式 $=(x+2)(x-1)(x^2+x+6)$. 在实数范围内不可约，在复数范围内

$$原式=(x+2)(x-1)\left(\frac{x+1-\sqrt{23}i}{2}\right)\cdot\left(\frac{x+1+\sqrt{23}i}{2}\right).]$$

三、把下列各式分解因式：

1. $f(x)=x^3-4x^2+x+6$.

2. $f(x)=6x^3-11x^2+6x-1$. [提示：$f(1)=0$，原式 $=(x-1)(6x^2-5x+1)=(x-1)(2x-1)(3x-1)$.]

3. $f(x)=x^3+6x^2+11x+6$.

4. $f(x)=x^4-5x^3+3x^2-3x+2$.

5. x^5+y^5. 6. $x^{15}-1$.

7. x^6-y^6. 8. x^7+y^7.

四、已知 $2x^3-x^2-13x+p$ 有一个因式是 $2x+1$，求 p 的值并把这个多项式因式分解.

五、已知 $x^4+kx^3+px+16$ 有因式 $(x-1)$ 和 $(x-2)$，求 k、p 的值并分解因式. [提示：应用除法得 $k=-5$，$p=20$. 原式 $=(x-1)(x-2)\cdot(x+2)(x-4)$.]

六、把 $(a+b)^5-a^5-b^5$ 因式分解.

七、已知 x^2+2x+1 是多项式 x^3-x^2+ax+b 的因式，求 a、b. [提示：因为已知多项式是 x 的三次式，它的一个因式是二次式，所以另一个因式为一次式 $x+m$. 设 $x^3-x^2+ax+b=(x^2+2x+1)(x+m)=x^3+(m+2)x^2+(2m+1)x+m$，可得 $a=-5$，$b=-3$.]

八、把下列各式分解因式：

1. $x^2-2xy-3y^2+8y-4$.

2. $x^2+3xy+2y^2+4x+5y+3$.

九、若 $x^4+2x^3-13x^2-14x+49$ 是一个整式的平方，求这个整式，［提示：设原式$=(x^2+ax+b)^2$，展开比较系数求出 a、b.］

十、K 是何值时，$Kx^2-2xy-3y^2+3x-5y+2$ 能够分解成两个一次因式？

二、分　　式

含有除法且除式中含有字母(变数)的代数式称为分式．两个多项式的比称为有理分式，其中分母不得为零．例如，$\frac{1}{x}$，$1+\frac{x}{y}$，$\frac{1}{\sqrt{x+y}}$，$\frac{x^2y}{\sqrt{x^2y}}$，$\frac{ax+b}{cx+d}$ 等都是分式，而 $\frac{1}{x}$，$\frac{ax+b}{cx+d}$，$\frac{x^2-4}{x+2}$ 等都是有理分式．

对于一个分式 $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$，只要 x 不是 $\varphi(x)$ 的根，任何值都是允许的．例如，对于分式 $\frac{x+1}{x^2-2}$，x 的每一个有理数都是允许的．因为不存在一个有理数平方等于 2．但是，在实数范围内，$x=\sqrt{2}$ 时，分式就无意义．又如分式 $\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$，当 $x=y=z=0$ 时，分式无意义．

分式的基本性质是分式运算的基本依据．即分式分子分母同乘以(或同除以)不等于零的代数式，分式的值不变．根据这个基本性质可以进行通分、约分，从而进行分式的综合运算．

［例十二］　a、b 取什么值时，$\frac{3x-4}{x^2-3x+2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$ 是恒等式？

解： 右式$=\frac{ax-2a+bx-b}{(x-1)(x-2)}=\frac{(a+b)x-(2a+b)}{(x-1)(x-2)}$.

比较左式分子的各项系数，可得，

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=4, \end{cases}$$

$$\therefore \quad a=1, \ b=2.$$

必须理解，两个分式的值对于 x 的一切允许值相等时，即 $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$ 的必要与充分条件是，对于 x 的一切值，恒等式 $f(x)\varphi_1(x)=f_1(x)\varphi(x)$ 成立。

［例十三］ 化简：

$$\left(\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\right)\frac{\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}}$$
$$+(x+y+z)^2.$$

解：

依下列顺序进行运算：

(i) $$\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$
$$=\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3yz}{z+y}$$
$$=\frac{(y^2-yz+z^2)(y+z)+x^3-3xyz}{x(y+z)}$$
$$=\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x(y+z)};$$

(ii) $$\frac{\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}}=\frac{\frac{2(y+z)}{yz}}{\frac{x+y+z}{xyz}}=\frac{2x(y+z)}{x+y+z};$$

(iii) 原式 $$=\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x(y+z)}\cdot\frac{2x(y+z)}{x+y+z}$$