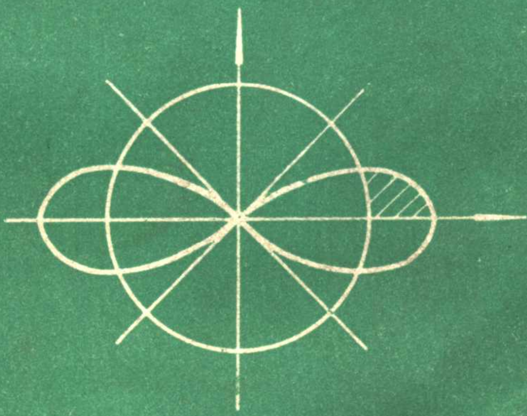
电大参考书

高等数学习题集全解

上册



科学技术文献出版社重庆分社

电大参考书

高等数学习题集全解

上册

谢云荪　况良浩　邱敦元

阎大桂　胡敏德　邓御寇

科学技术文献出版社重庆分社

高等数学习题集全解（上）

科学技术文献出版社重庆分社　出版

重庆市市中区胜利路132号

新华书店重庆发行所　发行

科学技术文献出版社重庆分社印刷厂　印刷

开本：787×1092毫米1/32　印张：31　字数：70万

1986年10月第一版　1986年10月第一次印刷

科技新书目：127—232　印数：24000

书号：7176·18　定价：6.00元

前　　言

与《高等数学讲义》（中央广播电视大学试用教材）相配套的《高等数学习题集》，是电大学生的学习用书，亦是各类成人教育学校学生和广大自学青年广泛使用的参考教材。由于受学习条件的限制，这类学生在学习高等数学做习题的过程中遇到一定困难，渴望有一本高等数学习题集解答，以启发思路，印证演算结果。鉴于此，我们约请一些高校教师，编写了本书。

本书的演算力求从基本概念出发。许多题目往往有几种解法，基于此出发点，书中没有一一列举，但与基本概念有关的解法书中还是尽量列出。

有些题目超出了教材范围，为使读者了解解法的原理，在解算过程中对此进行了补充说明。

为方便读者使用，本书分上、下两册出版，章节安排与《高等数学讲义》一致。

我们衷心希望本书能为广大读者特别是自学青年学习高等数学起辅导作用，但能力有限，缺点在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

一九八五年三月

D4460/01

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　函数及其图形

预备知识

1.1　对照写出等价的不等式与区间：

(1) $\|x\|<3$	1° $4<x<6$
(2) $\|x-1\|<3$	2° $-3<x<3$
(3) $\|3-2x\|<1$	3° $x>3$或$x<-1$
(4) $\|1+2x\|\leqslant 1$	4° $x>2$
(5) $\|x-1\|>2$	5° $-2<x<4$
(6) $\|x+2\|\geqslant 5$	6° $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$或$1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$
(7) $\|5-x^{-1}\|<1$	7° $1<x<2$
(8) $\|x-5\|<\|x+1\|$	8° $x\leqslant -7$或$x\geqslant 3$
(9) $\|x^2-2\|\leqslant 1$	9° $\frac{1}{6}<x<\frac{1}{4}$
(10) $x<x^2-12<4x$	10° $-1\leqslant x\leqslant 0$

解　先解不等式(1)—(10)(解集用区间表示)：

(1)解集为$-3<x<3$。

(2)$-3<x-1<3$，解集为$-2<x<4$。

(3)$-1<3-2x<1$，$-4<-2x<-2$，
解集为　$1<x<2$。

(4)$-1\leqslant 1+2x\leqslant 1$，$-2\leqslant 2x\leqslant 0$，
解集为　$-1\leqslant x\leqslant 0$。

(5)$x-1>2$或$x-1<-2$，
解集为　$x>3$或$x<-1$。

(6) $x+2\geqslant 5$或$x+2\leqslant -5$，

解集为 $x\geqslant 3$或$x\leqslant -7$。

(7) $-1<5-x^{-1}<1$， $-6<-\frac{1}{x}<-4$，

$4<\frac{1}{x}<6$，x必为正数，所以

解集为$\frac{1}{6}<x<\frac{1}{4}$。

(8)可分为三种情况：

1) $x\geqslant 5$时，不等式恒成立；

2) $-1<x<5$时，有

$$\begin{cases}-1<x<5\\-(x-5)<x+1,\end{cases}\quad 即\begin{cases}-1<x<5\\x>2\end{cases},$$

此时解集为$2<x<5$；

3) $x\leqslant -1$时，不等式不成立。

$|x-5|<|x+1|$的解集是$x\geqslant 5$和$2<x<5$的并集，即$x>2$。

(9) $-1\leqslant x^2-2\leqslant 1$，$1\leqslant x^2\leqslant 3$，化成不等式组：

$$\begin{cases}x^2\leqslant 3\\x^2\geqslant 1\end{cases},\quad\begin{cases}|x|\leqslant\sqrt{3}\\|x|\geqslant 1\end{cases},\quad\begin{cases}-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 3\\x\geqslant 1或x\leqslant -1\end{cases},$$

解集为 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$。

(10)化成不等式组 $\begin{cases}x^2-4x-12<0\\x^2-x-12>0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}(x+2)(x-6)<0\\(x+3)(x-4)>0,\end{cases}$解之，得$\begin{cases}-2<x<6\\x<-3或x>4,\end{cases}$

$x<x^2-12<4x$的解集为$4<x<6$。

故不等式与区间的等价关系如下：

(1)$\Longleftrightarrow$2°，(2)$\Longleftrightarrow$5°，(3)$\Longleftrightarrow$7°，

(4)$\Longleftrightarrow$10°，(5)$\Longleftrightarrow$3°，(6)$\Longleftrightarrow$8°，

(7)$\Longleftrightarrow$9°，(8)$\Longleftrightarrow$4°，(9)$\Longleftrightarrow$6°，

(10)$\Longleftrightarrow$1°。

1.2 试讨论下述命题的真伪，并申明理由：

(1)$x<5$就是$|x|<5$

(2)$|x-5|<2$就是$3<x<7$

(3)$|1+3x|\leqslant 1$即$x\geqslant -\frac{2}{3}$

(4)不存在实数x，使得$|x-1|=|x-2|$

解 (1)命题为假。通过解绝对值不等式$|x|<5$，得$-5<x<5$，但此区间与$x<5$是两个不同的区间。

(2)命题为真。解不等式$|x-5|<2$，就得$3<x<7$。所以$|x-5|<2$就是$3<x<7$。

(3)命题为假。解不等式$|1+3x|\leqslant 1$，得

$-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 0$，此区间与$x\geqslant -\frac{2}{3}$不同。

(4)命题为假。通过解绝对值方程

$|x-1|=|x-2|$（解法：方程等号两边平方，得$(x-1)^2=(x-2)^2$，解此整式方程），得$x=\frac{3}{2}$。所以实数$x=\frac{3}{2}$能使方程$|x-1|=|x-2|$成立。

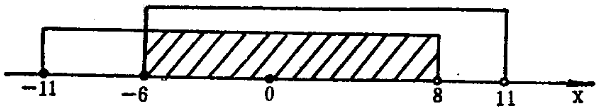
1.3 求下列不等式的公共部分，并在数轴上表示出

来。

（1）$-11\leqslant x<8$与$-6\leqslant x<11$

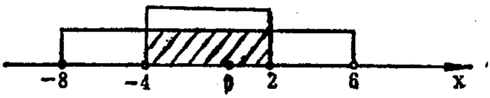
（2）$-8\leqslant x<6$与$-4<x\leqslant 2$

解 （1）公共部分为$-6\leqslant x<8$，



第1.3题(1)

（2）公共部分为$-4<x\leqslant 2$，



第1.3题(2)

1.4 证明下列各式：

（1）$|-x|=|x|$　　（2）$|x-y|=|y-x|$

（3）$|x|=\sqrt{x^2}$　　（4）$|x/y|=|x|/|y|$　$(y\neq 0)$

（5）$|x+y|\leqslant|x|+|y|$

（6）$|x|-|y|\leqslant\big||x|-|y|\big|\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$

（7）已知a，b，m为正数，且$a<b$，则

$$\frac{a+b}{b+m}>\frac{a}{b}$$

（8）若$a>0$，$b>0$，则

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$$

（9）$x>0$，则$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

当且仅当$x=1$时，等式成立。

(10) $|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$

证 （1）由绝对值定义，有

$$|-x|=\begin{cases}-x & -x>0，即x<0\\ 0 & -x=0，即x=0\\ -(-x)=x & -x<0，即x>0\end{cases};$$

$$|x|=\begin{cases}x & x>0\\ 0 & x=0\\ -x & x<0。\end{cases}$$

$\therefore |-x|=|x|$。

（2）左边$=|-y+x|=|-(y-x)|=|y-x|=$右边。

（3）根据绝对值定义，左边 $|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0,\end{cases}$

右边，当$x\geqslant 0$时，$\sqrt{x^2}=x$；

当$x<0$时，$\sqrt{x^2}=-x$。

所以有 $|x|=\sqrt{x^2}$。

（4）右边$=\dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}}=\sqrt{\dfrac{x^2}{y^2}}=\sqrt{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}=\left|\dfrac{x}{y}\right|=$左边。

（5）由绝对值定义，有$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$。同样$-|y|\leqslant y\leqslant|y|$。二式相加，得

$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|$，它与

$|x+y|\leqslant|x|+|y|$是等价的。

（6）由$x\leqslant|x|$，同理有$|x|-|y|\leqslant\big||x|-|y|\big|$ ①

由①，有$|x|=|(x-y)+y|\leqslant|x-y|+|y|$，

所以$|x|-|y|\leqslant|x-y|$。

同理，$|y|-|x|\leqslant|y-x|$。

而 $|y-x|=|-(y-x)|=|x-y|$，$|x|-|y|$与$|y|-|x|$互为相反数，$|x-y|$同时大于这一对相反数，可以写成

$|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$ ②

由$-|y|\leqslant y\leqslant|y|$，同乘$(-1)$，得$-|y|\leqslant -y\leqslant|y|$，再与$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$相加，得$-(|x|+|y|)\leqslant x-y\leqslant|x|+|y|$，所以有$|x-y|\leqslant|x|+|y|$ ③

将①、②、③连起来就有

$|x|-|y|\leqslant\big||x|-|y|\big|\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$。

（7）根据已知条件：$b>a$ ①

①×m，$bm>am$（$\because m>0$） ②

②两边同加ab，$ab+bm>ab+am$ ③

即 $b(a+m)>a(b+m)$ ④

④$+b(b+m)$，得$\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$（$\because b(b+m)$为正）。

（8）由$(a-b)^2\geqslant0$，即$a^2-2ab+b^2\geqslant0$，

两边同加$4ab$，$a^2+2ab+b^2\geqslant4ab$，

即 $(a+b)^2\geqslant4ab$，由于$ab>0$，$a+b>0$，则

两边开平方 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，

即

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}。$$

（9）由$(x-1)^2\geqslant0$，即$x^2-2x+1\geqslant0$，

即 $x^2+1\geqslant2x$。

两边除以x，得$x+\dfrac{1}{x}\geqslant2$（$\because x>0$）。

（10）由绝对值定义，有$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$，

所以有 $-|x_1|\leqslant x_1\leqslant|x_1|$

$$-|x_2|\leqslant x_2\leqslant|x_2|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-|x_n|\leqslant x_n\leqslant|x_n|$$

相加得 $-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)\leqslant x_1+x_2+\cdots+x_n$

$$\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|,$$

即 $|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$。

1.5 解不等式：

(1) $-2<\dfrac{1}{x+2}<2$ (2) $\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|>\dfrac{x-2}{x+1}$

(3) $|x-A|<\varepsilon$ ($\varepsilon>0$为常数) (4) $\dfrac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}>0$

解 (1)

原不等式化为不等式组 $\begin{cases}\dfrac{1}{x+2}>-2\\[2mm]\dfrac{1}{x+2}<2,\end{cases}$

解之，得 $\begin{cases}x<-\dfrac{5}{2}\text{或}x>-2\\[2mm]x<-2\text{或}x>-\dfrac{3}{2}\end{cases},$

所以原不等式的解为 $x<-\dfrac{5}{2}$ 或 $x>-\dfrac{3}{2}$.

(2) 由绝对值定义可知 $\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|>\dfrac{x-2}{x+1}$ 等价于

$\dfrac{x-2}{x+1}<0$。解之得 $-1<x<2$。

(3) 由 $|x-A|<\varepsilon$，$-\varepsilon<x-A<\varepsilon$，解之得

$A-\varepsilon<x<A+\varepsilon$。

（4）原不等式等价于下述不等式组：

$$①\begin{cases}x+1>0\\x-2>0\\3x-1>0\end{cases}, \qquad ②\begin{cases}x+1<0\\x-2<0\\3x-1>0\end{cases};$$

$$③\begin{cases}x+1<0\\x-2>0\\3x-1<0\end{cases}; \qquad ④\begin{cases}x+1>0\\x-2<0\\3x-1<0\end{cases}。$$

①之解为$x>2$，④之解为$-1<x<\frac{1}{3}$，②、③无解，故原不等式的解为$-1<x<\frac{1}{3}$或$x>2$。

1.6 解高次不等式：

（1）$|x^2-3x+2|\geqslant x^2-3x+2$ （2）$x^2-7x+12>0$

（3）$|x(1-x)|\leqslant 0.5$ （4）$-2x^2+4x-7>0$

（5）$x^3+x^2-30x<0$

解 （1）由绝对值的定义，原不等式对一切实数均成立，所以它的解为$-\infty<x<+\infty$。

（2）原不等式即 $(x-3)(x-4)>0$，解为

$x<3$或$x>4$。

（3）原不等式可化成不等式组

$$\begin{cases}x(1-x)\leqslant 0.5\\x(1-x)\geqslant -0.5\end{cases}, \quad 即\begin{cases}2x^2-2x+1\geqslant 0 & ①\\2x^2-2x-1\leqslant 0 & ②\end{cases}$$

用二次函数图象解此二不等式：$a=2>0$，①相应的二次函数图象与x轴无交点，所以解为全体实数；②相应的二次

函数图象与y轴有两个交点，$x_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，

解为$\frac{1-\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{3}}{2}$。原不等式的解集是①、②不等式解的交集，即$\frac{1-\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{3}}{2}$。

（4）原不等式化成$2x^2-4x+7<0$。用二次函数图象解此不等式：$a=2>0$，图象与x轴没有交点，所以不等式无解。

（5）原不等式化成$(x+6)\cdot x\cdot(x-5)<0$，它等价于不等式组：

$$\begin{cases}x<0\\x+6<0\end{cases}\quad 或\quad\begin{cases}x>0\\x-5<0,\end{cases}$$

于是解集为$x<-6$或$0<x<5$。

1.7 解不等式组：

（1）$\begin{cases}x-2(x-3)>4\\\frac{x}{2}-(x-3)>\frac{1}{4}\end{cases}$

（2）$\begin{cases}x+5\leqslant(x+1)(x+2)\\x(x+1)+x(x+2)>(2x-1)(x+3)\end{cases}$

解 （1）原不等式组化成$\begin{cases}-x+2>0\\-\frac{x}{2}+2\frac{3}{4}>0,\end{cases}$解之得

$\begin{cases}x<2\\x<\frac{11}{2},\end{cases}$ 不等式组的解为$x<2$。

（2）原不等式化成$\begin{cases}x^2+2x-3\geqslant 0\\2x-3<0\end{cases}$，解之得

$\begin{cases}x\leqslant -3\text{或}x\geqslant 1\\x<\dfrac{3}{2}\end{cases}$，不等式组的解为$x\leqslant -3$

或　$1\leqslant x<\dfrac{3}{2}$。

求函数值

1.8　已知函数$f(x)=x+1$，求：$f(2)$，$f(-2)$，$-f(2)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$\dfrac{1}{f(2)}$，$f(a+b)$。

解　$f(2)=2+1=3$；

$f(-2)=-2+1=-1$；

$-f(2)=-3$；

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$；

$\dfrac{1}{f(2)}=\dfrac{1}{3}$；

$f(a+b)=a+b+1$。

1.9　设$\varphi(t)=|t-3|+|t-1|$，求$\varphi(0)$，$\varphi(1)$，$\varphi(-1)$，$\varphi(-2)$。

解　$\varphi(0)=|0-3|+|0-1|=3+1=4$；

$\varphi(1)=|1-3|+|1-1|=2$；

$\varphi(-1)=|-1-3|+|-1-1|=4+2=6$；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com