

飞机部件理论外形的 计算和绘制

栾秉海 编

国防工业出版社

内 容 提 要

本书从生产实际出发,较详细地介绍了飞机部件理论外形的各种计算和绘制方法;曲线光顺性的检查法;函数的插值法;飞机部件各种切面外形的绘制原理以及零部件各种角度的计算方法等,对于模线自动化的新技术,书中也作了概略的介绍。

本书可供飞机工厂从事模线样板工作的同志参考,也可供从事飞机设计和工艺者参考。

飞机部件理论外形的计算和绘制

刘 秉 海 编

国防工业出版社出版

北京市书刊出版业营业登记证出字第024号

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

上海商务印刷厂排版 国防工业出版社印刷厂印装

787×1092 1/16 印张 12 1/8 281 千字

1978年6月第一版 1978年6月第一次印刷 印数: 0.091—3,600 册

统一书号: 15034·1666 定价: 1.30 元

目 录

第一章 用平切面法绘制飞机部件理论外形	1
第一节 用平切面法绘制理论模线的主要内容	1
一、坐标系的选择	1
二、绘制的主要内容	1
三、模线光顺性的检查	2
第二节 平切面法的缺点	3
第二章 用二次曲线法绘制飞机部件理论外形	4
第一节 二次曲线法概述	4
一、决定一条二次曲线的条件	4
二、二次曲线的判别值 f	4
三、用二次曲线绘制飞机部件理论外形的示例	5
第二节 用二次曲线作图法绘制理论外形的原理和方法	7
一、巴斯卡原理	7
二、根据已知条件,求作二次曲线	7
第三节 二次曲线的解析计算法	8
一、二次曲线束的方程式	9
二、根据已知条件,确定二次曲线方程的显式表达式	10
第四节 二次曲线的仿射计算法	13
一、仿射几何的基本概念	13
二、二次曲线的仿射变换	13
三、单位二次曲线的有关性质	14
四、二次曲线判别值 f 的大小与曲线形状的关系	15
五、二次曲线在仿射坐标内的作图法	17
六、二次曲线在直角坐标内的作图计算法	17
七、已知二次曲线上某点的横坐标 X ,求该点纵坐标 Y 的方法	19
八、已知二次曲线上某点的横坐标,求该点的切线斜率	22
九、二次曲线的共轭	23
十、二次曲线的分割计算法	25
第三章 用指数曲线法计算和绘制飞机部件理论外形	27
第一节 指数曲线的各种形态	27
一、两种实用的单位指数曲线	27
二、对单位指数曲线方程式 $\bar{y} = [4\bar{x}(1-\bar{x})]^m$ 的分析	27
三、对单位指数曲线方程式 $\bar{y} = \lg \varphi\left(\bar{x} - \frac{1}{n}\bar{x}^n\right)$ 的分析	29
四、选用指数曲线的示例	29
第二节 利用方程式 $\bar{y} = [4\bar{x}(1-\bar{x})]^m$ 所表达的指数曲线设计和绘制部件理论外形的方法	30
一、必需的原始数据	30
二、幂指数 m 的确定	31
三、已知曲线的横坐标,求其纵坐标	31
四、曲线上某点切线倾角的计算	32

五、曲线族系数 P 、 Q 及其应用	34
六、在设计部件外形时, m 值的选择示例	34
七、反向曲线过渡区切面外形的计算	36
八、曲线的长度, 曲面的表面积的计算	38
第三节 利用方程式 $\bar{y} = \lg \varphi \left(\bar{x} - \frac{1}{n} \bar{x}^n \right)$ 所表达的指数曲线设计和绘制部件理论外形的方法	39
一、必需的原始数据	39
二、幂指数 n 的确定	39
三、已知曲线上某点的横坐标, 确定其纵坐标	39
四、外形曲线上某点切线倾角的计算	40
第四节 用指数曲线方程式设计和计算飞机部件理论外形的示例	40
第四章 利用“数学模型”法表达飞机部件理论外形的基本理论及模线绘制自动化	45
第一节 建立飞机部件理论外形“数学模型”的基本原理	45
一、机翼表面“数学模型”的建立原理	46
二、机身表面“数学模型”的建立原理	46
第二节 用样条函数表达基线的方程	47
一、一般三次样条函数的建立	47
二、曲线的一端具有无穷大导数的样条函数的建立	50
第三节 飞机部件表面的数学方程	52
一、先建立三条主要纵向线的方程	52
二、前机身表面的方程	53
三、机身曲面几何形态的分析	54
第四节 利用“数学模型”法确定零件理论外形与弯边斜角值	55
一、零件理论外形的确定	55
二、零件弯边斜角值的确定	56
第五节 模线绘制自动化	57
一、数控绘图机的基本工作原理	57
二、数控绘图机的基本结构形式、绘图精度、速度及工作条件	58
三、数控绘图机各主要部分介绍	58
第五章 翼型曲线光顺性的检查及修型法	62
第一节 光顺的数学原理	62
第二节 差分概念	62
一、差分和差分表的编制	62
二、各阶差分的几何意义	62
三、差分的性质	64
四、各阶差分的变化对曲线光顺性影响的示例	65
第三节 对曲线光顺性的修正	66
第四节 修正量的求法	68
第五节 利用差分法进行曲线光顺性修正的注意事项	72
第六节 不光顺翼型的自动修型法	72
第六章 函数的逼近及其插值法	77
第一节 问题的提出	77
第二节 差商的概念	77
一、差商的定义	77
二、差商的主要性质	78

三、差商表的编制	79
第三节 抛物线插值(逼近)公式及其在生产实践中的应用	79
一、抛物线插值公式	79
二、抛物线插值公式的实用形式及其参数的特性	80
三、抛物线插值法示例	81
四、利用抛物线插值法时,曲线在某点的切线倾角及曲面在某点的斜角值的求法	84
第四节 一般插值公式	85
一、不等间距的牛顿插值公式	85
二、等间距的插值公式	86
第七章 双曲面部件各种斜切面外形的计算和绘制	95
第一节 双曲面部件斜切面的分类	95
一、单斜切面	95
二、双斜切面	95
第二节 单斜切面外形的计算和绘制	95
一、单斜切面外形是以纵向切面曲线为绘制依据时的计算和作图方法	95
二、单斜切面外形是以综合切面模线为绘制依据时的计算和作图方法	97
三、单斜切面外形是以纵向射线曲线为绘制依据时的计算和作图方法	99
第三节 双斜切面外形的计算和绘制	100
一、双斜切面外形是以纵向水平切面曲线或垂直切面曲线为绘制依据时的计算和作图方法	100
二、双斜切面外形是以纵向射线平面曲线为绘制依据时的计算和作图方法	104
三、双斜切面外形是以综合切面模线为绘制依据时的计算和作图方法	106
第四节 斜切面上纵向构件位置的确定	108
一、单斜切面上长桁位置的确定	108
二、双斜切面上长桁位置的确定	109
第五节 斜切面综合切面模线的绘制	110
一、在两个平行的斜切面的综合切面模线上,决定其轴线位置的参数	111
二、参数 m, n 的计算	111
三、各种斜切面的轴线在综合切面模线上相对位置的分析	112
第八章 机翼尾翼部件平面外形及正常切面外形的计算和绘制	114
第一节 坐标系的选择	114
第二节 机翼理论弦面上百分线倾角的变化规律	114
一、机翼理论弦面上百分线及其倾角的概念	114
二、百分线倾角的变化规律	115
第三节 航向、肋向及任意方向弦长的计算	116
一、沿航向及肋向切面弦长的计算	116
二、任意方向切面弦长的计算	117
第四节 名义百分点(号)和实际百分点(号)	117
一、名义百分点和实际百分点的概念	117
二、名义百分点和实际百分点的换算及换算系数	118
第五节 机翼平面图形及正常切面外形的分类及其计算	119
一、机翼平面图形及正常切面外形的分类	119
二、在机翼的平面图形中,理论控制切面平行,中间结构肋平行于理论控制切面时,其切面外形的计算	120
三、理论控制切面平行,中间结构肋与理论控制切面不平行时,中间切面外形的计算	121
四、理论控制切面不平行,中间结构肋平行于其中一个理论控制切面(如平行于尖端理论控制切面)时,中间切面外形的计算	123

第六节 机翼正常切面外形计算方法的综合比较	124
一、百分点计算法	124
二、射线(百分线在综合切面上的投影)计算法	124
三、百分模线作图法	124
四、射线作图法	125
第七节 理论控制切面翼型的压缩、翼型压缩系数的分析与计算	125
一、理论控制切面的翼型经过压缩后,中间切面的翼型的特点	125
二、翼型压缩系数的变化规律	125
第八节 机翼正常切面前缘圆弧的计算	128
一、对称翼型	128
二、不对称翼型	129
三、实际使用的近似公式	129
第九章 机翼结构中各种斜切面外形的计算和绘制	130
第一节 机翼结构中各种斜切面的分类	130
一、第一种斜切面	130
二、第二种斜切面	130
三、第三种斜切面	130
第二节 第一种斜切面的计算和绘制	130
一、斜切面上各百分号处横坐标的计算	130
二、斜切面上纵坐标 y 的确定	131
三、前缘圆弧半径的确定	131
第三节 第二种斜切面的计算和绘制	133
一、斜切面上在名义百分号处外形纵坐标的计算	133
二、斜切面 $\eta\%$ 上所对应的外形点 KL 及 MF 的横坐标的计算	135
三、对第二种斜切面计算公式的分析	135
四、第二种斜切面前缘曲率半径的计算	136
第四节 第三种斜切面的计算和绘制	138
一、第三种斜切面外形的计算	138
二、第三种斜切面前缘曲率半径的计算	140
第十章 扭转机翼外形的计算和绘制	143
第一节 机翼的扭转和扭转角	143
一、机翼的扭转	143
二、机翼的扭转角	143
第二节 几何扭转机翼中间切面的计算和绘制	144
一、扭转机翼中间切面的扭转角 α' 的计算	144
二、以理论弦平面为基准所表达的各理论控制切面的外形数据	145
三、几何扭转机翼中间切面(平行于理论控制切面)外形的计算和绘制	148
第十一章 机翼的相应变换。机翼切面外形点上斜率的计算	149
第一节 机翼相应变换的概念	149
一、机翼相应变换的图形	149
二、相应变换的分析表达式	150
三、变换距离的计算	151
第二节 机翼切面外形点上斜率的计算	152
一、机翼中间切面外形点上斜率的计算公式	152
二、对机翼全部中间切面上各翼型点处斜率的计算	153

第十二章 飞机结构中零件斜角值的计算	154
第一节 零件弯边斜角和切边的概念	154
一、零件弯边斜角的概念	154
二、零件端头切边的概念	154
第二节 机身零件的斜角值及切边的计算	155
一、长桁类纵向构件的斜角和切边的计算	155
二、隔板类横向构件的斜角和切边的计算	159
第三节 机翼零件的斜角值及其切边的计算	161
一、翼梁等纵向构件的弯边斜角和切边的计算	161
二、翼肋等横向构件的弯边斜角和切边的计算	183
三、小结	172
第十三章 曲线挠度的计算	178
一、当外形曲线为圆时, 其曲线段挠度的计算公式	178
二、当外形曲线为经验曲线时, 其某段挠度的计算公式	179

第一章 用平切面法绘制飞机部件理论外形

利用平切面法绘制模线,早在四百多年以前就已经出现了,它是随着船舶制造业的发展而逐渐完善起来的。本世纪二十年代的后期,由于飞机速度的增大,飞机外形的日趋复杂以及对外形流线性及精确度要求的提高,在航空工业中也开始采用平切面法绘制理论模线。这种方法,在较长的时期内一直是世界各国飞机制造业的基本方法。

本章将简要叙述这种方法的内容及其特点。

第一节 用平切面法绘制理论模线的主要内容

一、坐标系的选择

平切面法是以投影几何的原理和作图法为基础的一种飞机外形绘制方法。它是用平行于三个互相垂直的坐标面的一系列平面切割部件而得到的外形曲线来表达飞机部件外形表面的。这三个互相垂直的坐标面构成空间直角坐标系。很明显,对于机身、机翼、尾翼、发动机短舱等部件均应从事有利于模线绘制的角度去选择各自的坐标系的。机身的坐标系选择见图1-1,该坐标的 X 轴为飞机轴线,以前端 O 点为原点,向尾部为正; Y 轴过 O 点向上, Z 轴垂直于 XOY 平面,按右螺旋方向为正。这样定出的坐标系中, XOY 平面为机身的对称平面,以 V 表示; XOZ 平面为机身的水平基准面,以 H 表示; YOZ 平面为机身的零点距离平面,以 W 表示。

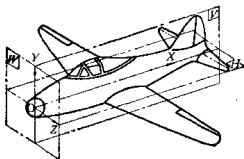


图1-1 机身坐标系的示例

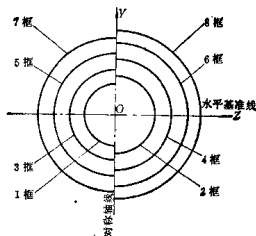


图1-2 综合切面模线示意图

二、绘制的主要内容

(一)综合切面模线

对机身曲面而言,垂直于轴线 OX ,即平行于零点距离平面 W 的一组切面所切出的外形为隔框的理论外形,它们画在综合切面模线图板上,见图1-2。

综合切面模线是作为绘制结构模线,制造外形检验样板的主要依据。

(二) 平面模线

平面模线主要包括水平及垂直切面纵向模线、长桁模线及必要的射线面纵向模线。

仍以机身部件为例, 平行于对称面 V 的一组切面所切出的一系列侧视投影曲线, 称作垂直切面纵向模线, 其中对称面所切得的上、下外形曲线, 称为“沿对称面上(下)曲线”, 见图 1-3、图 1-4。

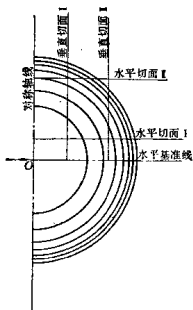


图 1-3 水平及垂直切面位置图



图 1-4 垂直切面纵向模线示意图



图 1-5 水平切面纵向模线示意图

平行于水平基准面 H 的一组切面所切出的机身水平投影曲线, 称作水平切面纵向模线, 其中水平基准面所切得的左右外形曲线称作“沿水平基准面曲线”, 见图 1-5。

垂直或水平切面间的距离, 一般都为 50 的倍数, 视部件表面的曲度情况而定。

在平面模线中, 除了长桁模线是用来制造长桁样板外, 其他模线一般是用来检查部件外形纵向的光顺性。

三、模线光顺性的检查

若部件的外形曲面是光滑流线的话, 则其综合切面模线及平面模线也必然是光滑流线的。这种光滑流线的情况我们称作“光顺性”。平切面法就是依靠纵(平面模线)、横(综合切面模线)向模线的协调及光顺性来保证部件外形曲面的光顺性的。

部件沿隔框方向外形的光顺性, 依靠综合切面模线以目视法检查; 部件外形沿纵向的光顺性, 依靠平面模线以目视法检查。

在绘制的 1:1 的平面模线中, 对难以判定其是否光滑时, 可画成 1:2、1:5 或 1:10 的压缩比例模线, 此种缩比模线, 仅切面间距离压缩, 面切面外形坐标不压缩。用缩比模线检查光顺性, 效果较好。

在部件外形曲面变化较大的地方, 其纵向的光顺性, 仅用水平及垂直切面模线的光顺性往往还控制不住, 此时, 应该增加用射线平面模线的光顺性去控制, 射线平面模线的光顺性也是靠目视法检查, 见图 1-6、1-7。

这里应着重指出的是: 用平切面法绘制理论模线是一个纵、横向模线反复光顺协调的过

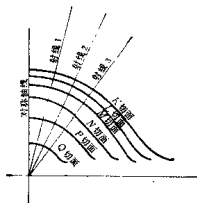


图 1-6 射线平面位置图

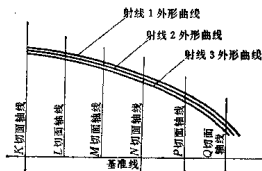


图 1-7 射线平面横线示意图

程,直至纵、横向模线都认为合格,才画出正式的理论模线,并以此定型理论图纸。

理论模线绘制完毕后,应该进行计算隔框(肋)的弯边斜角值和结构模线绘制前的统一技术资料的准备工作。

第二节 平切面法的缺点

(一)部件外形光顺性的精确度低 因为该法曲线的光顺性是靠目视来检查的,因此要求模线绘制人员有较丰富的经验。一般不光顺的偏差在 $\pm 0.3 \sim \pm 0.5$ (毫米) 范围内就不容易检查出来,对于较长的纵向曲线,更难检查。特别是这种方法只能保证已给出的切面外形的光顺,而对各切面间的曲面外形的光顺性就不能确切地了解。生产中经常发现,由于控制切面的数量不足,会使部件外形局部产生不光顺的现象。这是理论模线绘制中必须注意的问题。

(二)模线光顺性的协调工作量大,生产周期长,难以展开平行作业。

由于平切面法存在以上两个主要缺点,随着飞机外形准确度的日益增高,此法就不能满足要求了。近十多年以来,在飞机生产领域中,陆续采用了“二次曲线法”、“指数曲线法”等等。近几年来,由于对飞机部件理论外形建立了“数学模型”的新技术,采用了数字程序控制绘图机来自动绘制理论模线,大大地减轻了体力劳动,提高了模线绘制的质量,使得飞机制造业走上了一个新的发展阶段。这些内容在以后各章中将分别加以叙述。

第二章 用二次曲线法绘制飞机部件理论外形

第一节 二次曲线法概述

二次曲线法是以数学定理为基础的,其外形数据完全根据给定的公式计算出来。由于二次曲线所组成的部件的理论外形已完全能满足气动性能要求,而且二次曲线在计算和作图方面均较简单,因此不采用更高次曲线。

一、决定一条二次曲线的条件

在数学上,二次曲线的通式是:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

其中 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 为未知常数,但只有五个是独立的。因此,必须知道五个条件才能唯一地决定一条二次曲线。这五个条件可以是:

1. 曲线上的五个点。
2. 曲线上的四个点和其中一个点的切线。
3. 曲线上的三个点和其中两个点的切线。
4. 除以上情况外,由点和点的切线的任意组合(五个独立条件)。

通常,这五个条件取为三个点和其中两个端点的切线,见图 2-1。

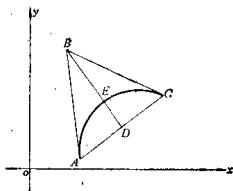


图 2-1 二次曲线的五个条件

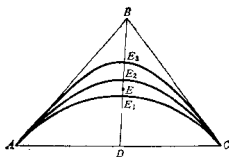


图 2-2 二次曲线的判别值

其中 A 点称为始点, B 点称为顶点, C 点称为终点, E 点称为控制点。

二、二次曲线的判别值 f

二次曲线的控制点 E 可以任意给定。但为了标准化起见,通常取在三角形 ABC 的中线 BD 上,见图 2-2。

图中,由于 E 点的位置不同,所得的二次曲线的形状也各异。

令

$$\frac{DE}{BD} = f$$

称为二次曲线的判别值。

当 $f < \frac{1}{2}$ 时, 二次曲线为椭圆的一部分;

$f = \frac{1}{2}$ 时, 二次曲线为抛物线的一部分;

$f > \frac{1}{2}$ 时, 二次曲线为双曲线的一部分。

因此, 在二次曲线法中, 判别值 f 是一个很重要的参数。

三、用二次曲线绘制飞机部件理论外形的示例

(一) 用二次曲线表达双曲面部件的理论外形

1. 机身隔框的二次曲线表示法

在图 2-3 中, $A^{\pm}$ 为上顶点, A_V 为下顶点; C_K 为最大宽度点; $E^{\pm}$ 及 E_V 分别为上下控制点。

对垂直于飞机轴线的隔框而言, 其左右形状对称, 故 $A^{\pm}$ 和 A_V 点的切线一定与水平基准线平行。而 C_K 点的切线一定与对称轴线平行。

显然, 也可以不给出 $E^{\pm}$ 及 E_V 点, 而给出两条互相衔接的二次曲线 $\widehat{A^{\pm}C_K}$ 及 $\widehat{A_VC_K}$ 的判别值 $f^{\pm}$ 及 f_V 。

如果机身各横切面都是圆, 则显然只需要有一个 R (半径) 尺寸就够了。

如果将各个隔框的上述五个点 ($A^{\pm}$ 、 A_V 、 C_K 、 $E^{\pm}$ 、 E_V) 或三个点 ($A^{\pm}$ 、 C_K 、 A_V) 及两个判别值 ($f^{\pm}$ 、 f_V) 沿纵向通过五条二次曲线连接起来, 形成上顶点线、下顶点线、最大半宽度线、上下控制点线 (或上下判别值曲线) 等, 那么就构成了整个光滑连续的外形曲面。反过来, 如已知上述的五条纵向曲线, 那么任一横切面上的五个点的坐标位置便可求得, 因而该切面的外形即可确定。

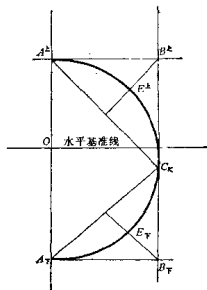


图 2-3 隔框的二次曲线表示法

2. 用二次曲线组成整个机身外形的示例

图 2-4 所示, 8 框和 20 框之间为圆柱体, 所以它是单曲面部分; 8 框切面以前是机身前段, 20 框以后是机身后续段, 它们是双曲面部分。

在机身前段及后续段, 共有上顶点线、下顶点线、最大半宽度线、上控制点线、下控制点线, 它们都用二次曲线表达。这五条理论曲线, 可以完整地表达整个机身的理论外形。

对于机身前段的驾驶舱, 形状比较复杂, 因而表达理论外形的二次曲线的数量也就较多。图 2-5 为某一机身前段的侧视投影图。

图中, A_1A_2 切面以前是机头罩, 它是抛物线旋转体。上顶点线自 A_1 点到挡风玻璃前缘点 C_1 处为一段二次曲线; 自挡风玻璃后缘点 A_3 到机身圆柱体部分 (C_3C_2 切面) 为另一段二次曲线; 机身下顶点线自 A_3 点到 C_2 点是一段二次曲线。机身的最大半宽度线呈“ ∞ ”状; 以 C_4 点为拐点, 前后各为一段二次曲线。

以上各段二次曲线可以完整地表达机身前段的理论外形。

(二) 用二次曲线表达直母线体部件的理论外形

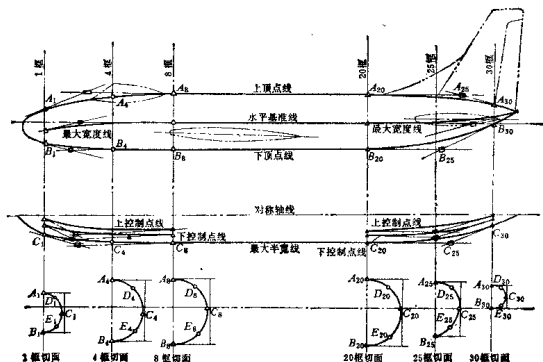


图 2-4 用二次曲线组成整个机身外形的示例

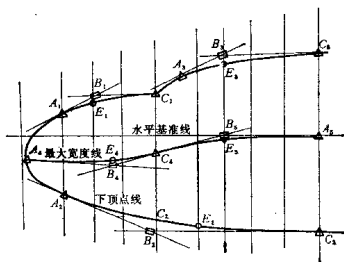


图 2-5 机身前段的侧视投影图用二次曲线表达

以机翼为例说明。

机翼外形一般是由两个或几个基准外形用各百分号直线连接所构成的空间曲面。各基准的外形是以各个百分点上的坐标数据表达的。当机翼不大(各基准肋弦长不大)时,以坐标数据表达翼型相当精确,完全可以绘出光顺的翼型模线。但当基准肋的弦长很大时,给定坐标点的间距也大,因而难以保证绘出的翼剖面外形的光顺性,此时,若将翼型曲线改用二次曲线表达,就可以保证其外形的质量。

1. 用二次曲线表达翼剖面理论曲线

在飞机设计和模线绘制中,可以根据翼型的形状和翼弦的尺寸,将翼型用 3~4 段二次

曲线表达。显然,增加二次曲线的段数,可以使所组成的翼型更准确地接近于原理论数据所确定的外形。但段数过多,将导致计算的繁杂。因而,在保证一定准确度要求下,应选取适当的段数。

图 2-6 所示的翼型用了三段二次曲线表达。

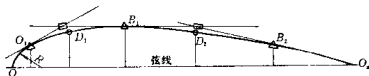


图 2-6 用二次曲线表达翼剖面理论外形

第一段:翼型前缘段,自 O 到 O_2 部分,为一半径为 R 的圆弧。

第二段:从 O_2 点到翼型最大厚度点 B_1 为中段,其中 D_1 为控制点。

第三段:从 B_1 点到尾段直线部分的始点 B_2 ,是翼型后段,其中 D_2 点为控制点。若是“~”型翼剖面,则 B_2 点应取在拐点处。

从 B_2 点到翼型后缘点 O_3 部分为直线。

应该注意的是:用二次曲线表达翼剖面理论外形时,始点、终点、控制点等应力求取在原翼型的百分点上。

2. 用二次曲线表达翼尖部分的平面图形

图 2-7 中 $ACGBF$ 部分为翼尖的平面图形:以 A 、 B 、 C 为基点,以 F 、 G 为控制点,可以将翼尖的平面外形用两段二次曲线表达,即 AEB 和 BGC 。显然, A 点切线为前缘线, C 点切线为后缘线, B 点切线平行于尖端肋轴线 AC 。

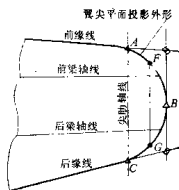


图 2-7 用二次曲线表达翼尖的平面外形

第二节 用二次曲线作图法绘制理论外形的原理和方法

当图纸已给出二次曲线的基本数据时,可利用巴斯卡原理,以作图法绘出该段二次曲线。

一、巴斯卡原理

如图 2-8 所示,“顶点位于一条二次曲线上的任意六角形,对边的三个交点必在同一条直线上”。这就是巴斯卡原理,这条直线通常称之为巴斯卡线。

图中 S_1DS_2BCA 是内接于一条二次曲线上的六角形。所谓对边,系指被相同数目所分割的两个边,如 S_1C 与 AD ; S_2C 与 DB ; S_2A 与 S_1B 等都是。它们分别相交于 X_1 、 X_2 与 M 点。假据巴斯卡原理,这些点必定在一条直线上。

二、根据已知条件,求作二次曲线

(一)已知五个点,求过此五点的一条二次曲线。

见图 2-9,已知 S_1 、 B 、 D 、 S_2 、 A 五点。用作图法求二次曲线上任一点 C 的步骤如下:

连接 S_1B 与 S_2A , 延长之, 交于 M 点; 过 M 点任作一条巴斯卡线; 连 BD , 延长之, 和巴斯卡线相交于 X_2 点; 再连 AD 线, 与巴斯卡线交于 X_1 点; 连接 S_2X_1 , 延长之, 和 S_1X_2 的连线交于 C 点, 此 C 点即为所求的二次曲线上的第六点。同理, 过 M 点引若干条巴斯卡

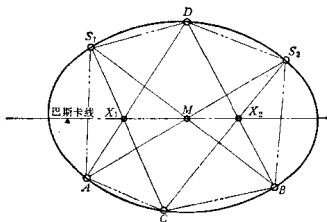


图 2-8 巴斯卡原理图

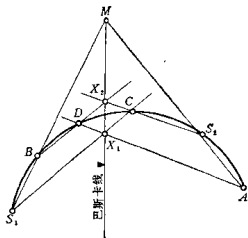


图 2-9 过五点的一条二次曲线的作图法

线,相应地可求出二次曲线上的若干点。将这些点光滑连接之,即可绘出所求的二次曲线。

(二)已知所求二次曲线上的四个点 S_1 、 B 、 D 、 E 和其中一个端点 E 的切线 EM , 求作此条二次曲线。

见图 2-10。连 S_1B , 延长之,与 E 点切线交于 M 点,此 M 点为巴斯卡线上的一点。以下的作图方法与(一)中所述相同。

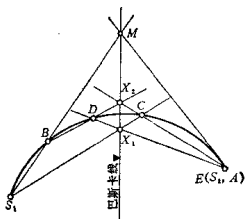


图 2-10 过四点及一切线的二次曲线作图法

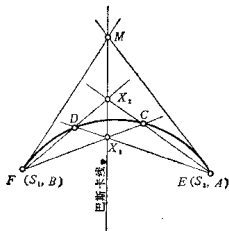


图 2-11 过三点及两切线的二次曲线作图法

(三)已知所求二次曲线上的三个点 F 、 D 、 E 和两个端点 E 、 F 的切线, 求作此条二次曲线。

见图 2-11。过 E 、 F 两点的切线相交于 M 点; 自 M 点任作一条巴斯卡线与 FD 连线之延长线相交于 X_2 点, 与 ED 之连线相交于 X_1 点; 连 EX_2 及 FX_1 , 两线相交于 C 点。此点即为所求二次曲线上的点。同理可求出该二次曲线上的若干点, 将这些点光滑连接之, 即为所求的二次曲线。

第三节 二次曲线的解析算法

本节利用二次曲线的方程式求解飞机部件理论外形曲线的坐标值。为了得到运用的

公式,需要先阐述一下有关的理论。

一、二次曲线束的方程式

若平面上有四个点,而且它们不在同一条直线上,则显然可以决定无数条二次曲线,这无数条二次曲线均通过给定的四个点。这些二次曲线的集合,依着一个参数 K ,我们称这组二次曲线为“二次曲线束”。

以下求二次曲线束的方程式。

设已知不在同一直线上的四个点 M_1, M_2, M_3, M_4 , 再任选第五个点 M' , 则此五点可决定一条二次曲线, 其方程式以 $\Phi(x, y, t) = 0$ 表示; 若再选第六点 M'' (此点不在 $\Phi(x, y, t) = 0$ 上), 则过 M_1, M_2, M_3, M_4, M'' 五点又可以决定一条二次曲线, 以

$$\Psi(x, y, t) = 0$$

表示。

这样, 经过已给的 M_1, M_2, M_3, M_4 四个点的所有二次曲线, 其方程式均可以用下式表示:

$$\lambda\Phi(x, y, t) + \mu\Psi(x, y, t) = 0 \quad (2.1)$$

式中 λ, μ 为常数, 且不同时为零。

令

$$K = -\frac{\lambda}{\mu} \quad (2.2)$$

则有

$$K = \frac{\Psi(x, y, t)}{\Phi(x, y, t)} \quad (2.3)$$

若已知第五点 $M_0(x_0, y_0, t_0)$, 且 M_0 点不与 M_1, M_2, M_3, M_4 中任何二点在同一条直线上, 则将 M_0 的坐标代入上式中, 可得唯一的参数 K_0 , 其值为:

$$K_0 = \frac{\Psi(x_0, y_0, t_0)}{\Phi(x_0, y_0, t_0)} \quad (2.4)$$

此时经过已知的四点及选定的 M_0 点的二次曲线方程式为:

$$K_0\Phi(x, y, t) - \Psi(x, y, t) = 0 \quad (2.5)$$

为了避免找寻曲线 $\Phi(x, y, t) = 0$ 和 $\Psi(x, y, t) = 0$ 的困难, 可以利用直线 $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ 和 $\overline{M_1M_4}$ 去代替, 见图 2-12 所示。

令直线 $\overline{M_1M_2}$ 的方程式为 $f_1(x, y, t) = 0$; 直线 $\overline{M_2M_4}$ 的方程式为 $f_2(x, y, t) = 0$; 直线 $\overline{M_1M_3}$ 的方程式为 $f_3(x, y, t) = 0$; 直线 $\overline{M_2M_4}$ 的方程式为 $f_4(x, y, t) = 0$ 。

那么, 经过 M_1, M_2, M_3, M_4 四个点的二次曲线束的方程式可以写为如下形式:

$$K \cdot f_1 \cdot f_2 - f_3 \cdot f_4 = 0 \quad (2.6)$$

面

$$K = \frac{f_3 \cdot f_4}{f_1 \cdot f_2} \quad (2.7)$$

是该二次曲线束的参数。

若将选定的第五点 $M_0(x_0, y_0, t_0)$ 代入 (2.6) 式, 即得通过 M_1, M_2, M_3, M_4 及 M_0 五个点的唯一的一条二次曲线, 其方程式为:

$$K_0 \cdot f_1 \cdot f_2 - f_3 \cdot f_4 = 0 \quad (2.8)$$

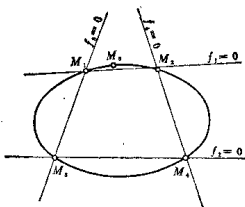


图 2-12 确定二次曲线方程的图形

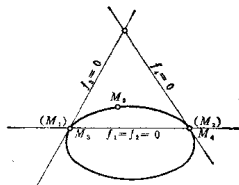


图 2-13 用两个点及过此两点的切线及一个控制点表达的二次曲线

式中

$$K_0 = \frac{f_3(x_0, y_0, t_0) \cdot f_4(x_0, y_0, t_0)}{f_1(x_0, y_0, t_0) \cdot f_2(x_0, y_0, t_0)} \quad (2.9)$$

在图 2-12 中, 若 M_2 点逐渐靠近 M_4 点, M_1 点逐渐靠近 M_3 点, 则 $f_4(x, y, t) = 0$ 和 $f_3(x, y, t) = 0$ 的直线就逐渐和过 M_4 及 M_3 点的切线相靠近, 其极限位置是 M_4 点与 M_3 点重合, M_3 点与 M_1 点重合, $f_4(x, y, t) = 0$ 和 $f_3(x, y, t) = 0$ 的直线分别和 M_4 点及 M_3 点的切线重合, 见图 2-13 所示。

此时, 该二次曲线的方程式可以写为:

$$K_0 [f_1(x, y, t)]^2 - f_3(x, y, t) \cdot f_4(x, y, t) = 0 \quad (2.10)$$

式中

$$K_0 = \frac{f_3(x, y, t) \cdot f_4(x, y, t)}{[f_1(x, y, t)]^2} \Big|_{M_0(x_0, y_0, t_0)} \quad (2.11)$$

因此, 若已给出始点、终点及过两点的切线, 并选定一个控制点, 就可以根据 (2.10) 式确定一条二次曲线方程式。

二、根据已知条件, 确定二次曲线方程的显式表达式

设在 XOY 坐标系中, 有一条待确定的二次曲线 (图 2-14), 它的始点是 $A(X_1, Y_1)$, 终点是 $B(X_n, Y_n)$, 过 A 和 B 两点的切线为已知。选定的中间控制点为 $M_0(X_0, Y_0)$ 。求满足以上五个条件的二次曲线方程式。

曲线上 A 点的切线方程式为

$$f_1(X, Y, t) = 0,$$

即是:

$$m_2 X - Y + Y_1 - m_2 X_1 = 0 \quad (2.12)$$

式中 m_2 为过 A 点的切线的斜率。

令

$$Y_1 - m_2 X_1 = a \quad (2.13)$$

代入 (2.12) 式, 有:

$$m_2 X - Y + a = 0 \quad (2.14)$$

过 B 点的曲线的切线方程式为

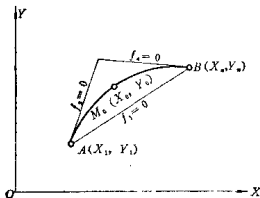


图 2-14 根据原始条件确定二次曲线方程的显式