提供
电子课件
www.pup6.com

新

21世纪全国高等院校汽车类创新型应用人才培养规划教材

车辆优化设计理论与实践

潘公宇　商高高　主　编

- 内容编排体系由浅入深、循序渐进
- 系统全面地介绍优化设计理论及方法
- 突出优化设计在车辆设计中的实际应用

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21世纪全国高等院校汽车类创新型应用人才培养规划教材

车辆优化设计理论与实践

潘公宇　商高高　主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书介绍了车辆优化设计的基本理论和方法、优化设计的工具软件及其在车辆优化设计中的应用。主要内容包括：优化设计的基本概念、优化设计问题数学模型的建立、优化设计的数学基础、一维搜索方法、无约束优化方法、约束优化方法、优化设计在车辆优化设计中的应用和优化设计的常用工具软件。本书将优化设计的基础理论与优化工具软件密切结合，使读者加深了对优化设计的实质内涵的理解。

本书可作为车辆工程专业的本科生、研究生学习优化设计基本理论和应用实例的教材，也可作为从事车辆设计人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

车辆优化设计理论与实践/潘公宇，商高高主编. —北京：北京大学出版社，2013.7
(21世纪全国高等院校汽车类创新型应用人才培养规划教材)
ISBN 978-7-301-22675-9

Ⅰ. ①车… Ⅱ. ①潘… ②商… Ⅲ. ①汽车—最优设计—高等学校—教材 Ⅳ. ①U462

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第136823号

书　　名：车辆优化设计理论与实践
著作责任者：潘公宇　商高高　主编
策 划 编 辑：童君鑫
责 任 编 辑：黄红珍
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-22675-9/TH·0355
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　新浪官方微博：@北京大学出版社
电 子 信 箱：pup_6@163.com
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62750667　出版部62754962
印 刷 者：北京富生印刷厂
经 销 者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　13.25印张　303千字
2013年7月第1版　2013年7月第1次印刷
定　　价：32.00元

前　言

优化设计是20世纪60年代初发展起来的一门新学科，它将最优化原理和计算技术应用于设计领域，为工程设计提供了一套科学、系统、可靠、高效的设计方法。利用这种新的设计方法，并借助于计算机，人们就可以从众多的设计方案中寻找出最佳设计方案，从而大大提高设计效率和质量。

本书系统地介绍了车辆优化设计的基本理论和方法、优化设计的工具软件和工程应用。全书共分7章。第1章介绍了优化设计的基本概念及相关理论，包括优化设计的基本要素和优化问题的数学模型建立，多元函数的基本性质，无约束优化问题的极值条件及等式、不等式约束优化问题的极值条件。第2章介绍了一维搜索方法，包括搜索区间的确定和区间消去法原理、黄金分割法、牛顿法和二次插值法。第3章介绍了无约束问题的优化方法，包括坐标轮换法、鲍威尔法、最速下降法、牛顿型方法、共轭梯度法、变尺度法。第4章介绍了约束问题的优化方法，包括随机方向法、复合形法、可行方向法、惩罚函数法、增广乘子法，此外，对模糊优化方法和遗传算法优化方法也作了简介。第5章介绍了多目标优化设计方法，包括多目标优化方法的基本概念、统一目标法、协调曲线法、分层序列法和宽容分层序列法。第6章介绍了优化设计在车辆优化设计中的应用。第7章介绍了MATLAB软件在优化设计中的应用。

为了便于读者学习和使用优化设计方法，本书内容的编排由浅入深，循序渐进。通过实例和MATLAB优化工具箱的密切结合，使读者掌握优化设计方法的实质内容。本书可作为车辆工程专业的本科生、研究生学习优化设计的教材或教学参考书，也可作为从事机械设计、车辆设计人员的参考用书。

本书由江苏大学潘公宇教授、商高高副教授编写。其中，第1～3章和第6章部分章节由潘公宇编写，第4、5、7章和第6章部分章节由商高高编写。在编写过程中参考了国内外学者公开出版的相关教材、专著及相关研究论文，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，敬请广大读者批评指正。

编者

2013年3月

目　录

第1章 优化设计的基本概念及相关理论

本章教学要点

知识要点	掌握程度	相关知识
优化设计的数学模型	熟练掌握优化设计中设计变量、约束条件和目标函数的基本概念	了解将工程问题转化为优化设计模型的一般方法
目标函数的基本性质和数学基础	熟练掌握多元函数的方向导数、梯度、等值面(线)等基本概念；熟悉多元函数的泰勒展开	了解二次型函数、正定矩阵、海赛矩阵等
无约束问题的极值条件和约束问题的极值条件	熟练掌握无约束函数极值问题的充分必要条件；掌握约束函数极值问题的库恩-塔克条件	了解凸集、凸函数及其基本性质

导入案例

汽车传动轴的优化设计

连接车辆变速器与后桥的传动轴工作状况如图 1.1 所示。该传动轴为承受纯扭载荷的空心轴。设该轴所传递的计算转矩为 T，轴的外径为 D，内径为 d，最高工作转速为 $n_{\max}$，临界转速的安全系数为 δ，轴管材料的弹性模量为 E，扭转许用应力为 $[\tau]$。为了减少功率损耗、节省材料，我们要求这样来确定空心轴的尺寸参数——外径 D 和内径 d：质量最小，同时要求满足工艺条件，内、外径之差不小于某一规定值 s，并且在实际使用时满足抗扭强度和稳定性要求，以便完成传递转矩的作用。这样，传动轴的设计问题，可以归结为寻求一个既符合使用要求(既满足限制条件)，又能使其重量达到最小的最优方案。

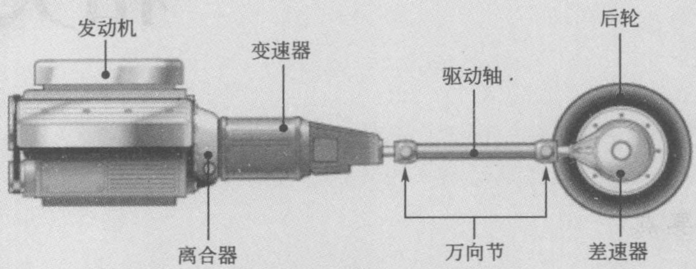

图 1.1　传动轴的示意图

1.1　优化设计概述

优化设计是 20 世纪 60 年代初发展起来的一门新学科，它是将最优化原理和计算技术应用于设计领域，为工程设计提供一种重要的科学设计方法。利用这种新的设计方法，人们就可以从众多的设计方案中寻找出最佳设计方案，从而大大提高设计效率和质量。

一项机械产品的设计，一般需要经过调查分析、方案拟定、技术设计、零件工作图绘制等环节。传统设计方法通常在调查分析的基础上，参照同类产品通过估算、经验类比或试验来确定初始设计方案。然后根据初始设计方案的设计参数进行强度、刚度、稳定性等性能分析计算，检查各性能是否满足设计指标要求。如果不完全满足性能指标的要求，设计人员将凭借经验或直观判断对参数进行修改。这样反复进行分析计算—性能检验—参数修改，直到性能完全满足设计指标的要求为止。整个传统设计过程就是人工试凑和定性分析比较的过程，主要的工作是性能的重复分析，至于每次参数的修改，仅仅凭借经验或直观判断，并不是根据某种理论精确计算出来的。实践证明，按照传统设计方法作出的设计方案，大部分都有改进提高的余地，而不是最佳设计方案。

传统设计方法只是被动地重复分析产品的性能，而不是主动地设计产品的参数。作为一项设计不仅要求方案可行、合理，而且应该是某些指标达到最优的理想方案。虽然设计

中的优化思想在古代设计中就有所体现，但直到直至20世纪60年代，随着电子计算机和计算技术的迅速发展，优化设计才有条件日益发展起来。

现代化的设计工作已不再是过去那种凭借经验或直观判断来确定结构方案，也不是像过去“安全寿命可行设计”方法那样，在满足所提出的要求的前提下，先确定结构方案，再根据安全寿命等准则，对该方案进行强度、刚度等的分析、校核，然后进行修改，以确定结构尺寸。而是借助电子计算机，应用一些精确度较高的力学的数值分析方法(如有限元法等)进行分析计算，并从大量的可行设计方案中寻找出一种最优的设计方案，从而实现用理论设计代替经验设计，用精确计算代替近似计算，用优化设计代替一般的安全寿命的可行性设计。优化方法在机械设计中的应用，既可以使方案在规定的设计要求下达到某些优化的结果，又不必耗费过多的计算工作量。因此，产品结构、生产工艺等的优化已经成为市场竞争的一种手段。例如，据资料介绍，利用一个化工优化系统的计算机手段，对一个化工厂进行设计。根据所给数据，在16h内，进行了16个可行性设计的选择，并从中选出一个成本最低、产量最大的方案。而在这之前，求解这个问题，曾用一组工程师工作了一年，但仅做了三个设计方案，而它们的效率却没有一个可以和上述优化方案相比。又例如，美国贝尔(Bell)飞机公司采用优化方法解决了450个设计变量的大型结构优化问题。在对一个机翼进行质量设计中，减轻质量达35%。波音(Boeing)公司也有类似的情况，在747机身的设计中，收到了减轻质量、缩短生产周期、降低成本的效果。武汉钢铁公司所引进的1700薄板轧机是德国DMAG公司提供的，该公司在对此产品进行优化修改后，就多盈利几百万马克。

近年来，优化设计在汽车设计中的应用也越来越广，汽车零部件的优化设计，各系统的优化匹配等在近十几年也有很大发展，各种减速器的优化设计、万向传动和滚动轴承的优化设计，以及轴、弹簧、制动器等的结构参数优化等都得到了广泛研究。另外，近年来发展起来的计算机辅助设计(CAD)，在引入优化设计方法后，在设计过程中既能够不断选择设计参数并评选出最优设计方案，又可以加快设计速度，缩短设计周期。把优化设计方法与计算机辅助设计结合起来，使设计过程完全自动化，已成为设计方法的一个重要发展趋势。

1.2 优化设计的基本要素和数学模型

优化设计包括建立优化问题的数学模型和选择恰当的方法寻求最优方法。本节简要叙述优化设计的数学模型及涉及的基本术语。

1.2.1 设计变量

零件、部件和机构等机械设计的方案，通常用一组基本参数来表示。设计的对象和内容不同，表示设计方案的参数也不同。它们可以是几何参数，如零件的高度、长度尺寸，直径，角度，齿轮的模数，连杆机构运动简图尺寸等；也可以是物理参数，如重量、功率、转矩、效率、刚度等。总之，基本参数是一些对该项设计性能指标好坏有影响的量。例如，在导入实例中，传动轴的基本参数用T、D、d、$n_{\max}$、δ等表示。在一项设计中，有些参数的数值可根据设计对象的具体情况预先给定，这些参数称为设计常数。例如，导

入实例中传动轴的计算转矩 T、最高工作转速 n_{max} 等都是设计常数。而另一些参数的数值则要在设计过程中优选确定，这一部分参数可看作是变量，称为设计变量。例如，导入实例中传动轴的外径 D、内径 d 就是设计变量。

n 个设计变量 x_1，x_2，…，x_n 按一定顺序排列成数组，称为 n 维列向量，表示为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=[x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_n]^{\mathrm{T}} \tag{1-1}$$

式中，$x_i(i=1，2，\cdots，n)$ 是 n 维向量 $\boldsymbol{X}$ 的分量。

如前所述，n 个设计变量组成一个 n 维向量。而以 n 个设计变量为坐标轴则构成一个实空间，称为 n 维实欧氏空间，用 E^n 表示。在这个空间中，任意一个点都表示一组设计变量的确定值，这种点称为设计点，它代表一个设计方案。由于这个空间包含着无数设计点，所以称它为设计空间。

设计空间是所有设计方案的集合，用符号 $X\in E^n$ 表示。设计空间中任意一个设计方案，都是从设计空间原点出发的设计向量 $\boldsymbol{X}^{(k)}$。

对于二维和三维设计空间，可以通过作图直观地理解上述概念。

前面的导入实例中有两个设计变量，即传动轴的外径 D 和内径 d，分别用 x_1 和 x_2 表示，则有

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D\\d\end{bmatrix}$$

这是一个二维向量，以 x_1 和 x_2 为坐标轴构成的二维实欧式空间 E^2 是一个设计平面，如图 1.2(a)所示。一组设计变量($x_1^{(k)}$，$x_2^{(k)}$)在设计平面内对应着一个以坐标原点为始点的向量 $X^{(k)}$，向量端点的坐标值代表一个设计方案，这个向量端点就是设计点。因此，任何一个两变量的设计方案都可以用设计平面内的设计点来表示。

三个设计变量 x_1、x_2、x_3 构成三维设计空间 E^3。同理，在三维设计空间内，每一个点确定的坐标值，对应着一个设计方案，如图 1.2(b)所示。某一设计方案设计点用向量表示为

$$\boldsymbol{X}^{(k)}=\begin{bmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\x_3^{(k)}\end{bmatrix}=[x_1^{(k)}\quad x_2^{(k)}\quad x_3^{(k)}]^{\mathrm{T}}$$

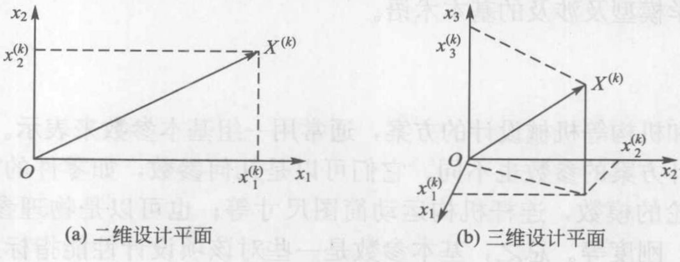

图 1.2 设计空间示意图

当设计变量数目多于3个，即 $n>3$ 时，设计空间是一个抽象的 n 维超越空间，只能用数学符号 E^n 来表示。

由此可知，设计变量的个数决定了设计空间的维数，而设计空间的维数又表征设计的自由度。设计变量越多，则设计的自由度越大，求解也越复杂。故通常在保证必要的设计精度的前提下，设计变量尽可能取少些。

设计变量有连续变量和离散变量两种形式。设计变量的值是连续变化的，称为连续变量。如结构的长度尺寸、角度、质量等，可以在一定范围内任意取值。但在一些情况下，设计变量的值只能按某种离散数列来变化，称为离散变量。例如，齿轮的齿数、模数、钢丝直径等不能任意取值，只能在规定的数列中取值。

1.2.2 约束条件

如前所述，设计空间是所有设计方案的集合，但实际上并不是任何一个设计方案都是可行的，如出现负值的面积、长度等。因此，在设计过程中，为了得到可行的设计方案，必须根据实际的要求，对设计变量的取值加以限制。这种限制条件就是设计的约束条件。因为每一个约束条件都是设计变量的函数，所以又称其为约束函数。

1. 约束条件的形式

约束条件可以用数学等式或不等式来表示。等式约束对设计变量的约束严格，其形式为

$$h_v(\boldsymbol{X})=h_v(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=0 \quad (v=1,\ 2,\ \cdots,\ p,\ p<n) \tag{1-2}$$

在机械设计优化中，不等式约束更为普遍，它的形式为

$$g_u(\boldsymbol{X})=g_u(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\geqslant 0 \quad (u=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{1-3}$$

或

$$g_u(\boldsymbol{X})=g_u(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\leqslant 0 \quad (u=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

式中，p、m 分别表示施加于该项设计的等式约束条件数和不等式约束条件数。

式(1-2)中 $p<n$ 的含义是，等式约束条件数应少于设计变量数。从理论上讲，利用一个等式约束条件可以消去一个设计变量。如果 $p\geqslant n$，即等式约束条件数等于或多于设计变量数，显然就无意义了，故只能取 $p<n$。

式(1-3)可以处理为统一的形式

$$g_u(\boldsymbol{X})\leqslant 0 \tag{1-4}$$

因为可以用 $-g_u(\boldsymbol{X})\leqslant 0$ 来代替 $g_u(\boldsymbol{X})\geqslant 0$。

约束条件也可以根据约束函数的性质分为显约束和隐约束两种。显约束是指有明确设计变量函数关系的一种约束条件；而隐约束则是对某个或某组设计变量的间接限制条件，是设计变量的一个可计算函数。例如，一个复杂机构的最大工作应力可能是通过有限元方法计算得到的，等等。

另一种分类法是将约束条件分为边界约束和性能约束。

边界约束又称为区域约束，用以限制某个设计变量的变化范围，或规定某组变量间的相对关系。例如，当某一个设计变量 x_i 仅取正值才有实际意义时(如面积、长度、质量等)，其边界约束为

$$g_u(\boldsymbol{X})=-x_i\leqslant 0$$

边界约束属于显约束。

性能约束又称为性态约束，是指机械工作性能或状态所要求的限制条件，是根据对机械的某项性能要求而构成的设计变量的函数方程，如机械零件的强度、刚度、效率或振动频率的允许范围。这类约束函数可根据力学和机械设计的公式与规范导出，所以性能约束通常是隐约束，但也有显约束的情况。

2. 可行设计区域与非可行设计区域

一个不等式约束将 n 维实欧氏设计空间 E^n 分成两部分：一部分是满足约束条件的设计点，称为可行设计点，可行设计点的集合 R 称为可行设计区域；另一部分是不满足约束条件的设计点，称为非可行设计点，这种设计点的集合称为不可行区域。严格地说，只要不满足任意一个约束条件的区域都是非可行设计区域。从几何概念上来看，不等式约束条件 $g_u(\boldsymbol{X})\leqslant 0$ 的极限情况 $g_u(\boldsymbol{X})=0$ 在设计空间内以一个几何面(二维问题为曲线)的形式出现，称为约束面(线)，它把设计空间分成满足约束条件的部分 $g_u(\boldsymbol{X})<0$ 和不满足约束条件的部分 $g_u(\boldsymbol{X})>0$。如图 1.3 所示，在二维平面内，由四条约束线围出了两个区域的情况。图中阴影线围成的区域即为可行区域，其数学表达式为

$$R=\{\boldsymbol{X}|g_u(\boldsymbol{X})\leqslant 0,(u=1,2,3,4)\} \tag{1-5}$$

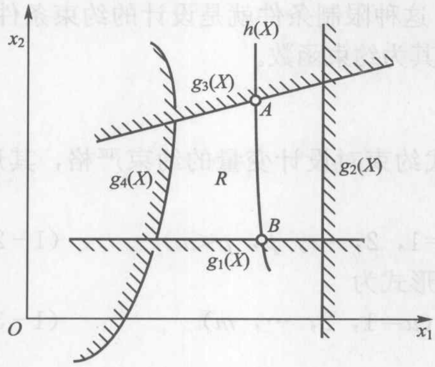

图 1.3 可行区域的组成

即在可行域内的一切点所对应的所有方案，均为允许设计方案，所以其中的任意一个设计点都称为可行设计点。

如果除不等式约束条件外，还有等式约束条件 $h(\boldsymbol{X})=0$，如图 1.3 所示，则设计方案只允许在可行域 R 内的等式约束曲线 $h(\boldsymbol{X})=0$ 上选取，即在该曲线的 AB 段中选取，这种约束又称为起作用约束或紧约束。同样，当可行设计点移至一约束面(线)上时，称它为约束区域的边界点，即为某项约束所允许的极限约束方案，此时该约束也称起作用约束。如果某设计点在由不等式约束组成的可行域之内，则其所有的约束条件都不是起作用约束。

以后规定：$R=\{\boldsymbol{X}\mid g_u(\boldsymbol{X})\leqslant 0,\ h_v(\boldsymbol{X})=0,\ u=1,\cdots,m;\ v=1,\cdots,p\}$。

1.2.3 目标函数

要从许多可行设计方案中评选出一个最优的方案来，就得有一个衡量设计方案的标准。若能把这个“标准”表示为设计变量的可计算函数，优化这个函数，则可以取得最优设计方案。这里的函数称为目标函数或评价函数，它是以设计变量为自变量，以所要求的某种目标为因变量，按一定关系所建立的用以评价设计方案优劣的数学关系式，记作

$$f(\boldsymbol{X})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1-6}$$

在优化设计中，若追求目标函数值最小，写为$\min\limits_{X\in E^n}f(\boldsymbol{X})$，若追求目标函数值最大，写为$\max\limits_{X\in E^n}f(\boldsymbol{X})$。由于$\min\limits_{X\in E^n}-f(\boldsymbol{X})$与$\max\limits_{X\in E^n}f(\boldsymbol{X})$等价，为使算法和程序统一，通常都写成追求目标函数值最小的形式，即$\min\limits_{X\in E^n}f(\boldsymbol{X})$。

目标函数有单目标函数和多目标函数之分。用一个评价标准建立的目标函数称为单目标函数，单目标函数的最优化问题称为单目标优化问题。如果同时兼顾几个评价标准建立的目标函数，则称为多目标函数，在同一个设计中提出多个目标函数的优化问题，称为多目标优化问题。关于多目标优化问题将在第5章详细介绍。

1.2.4 优化设计的数学模型

优化设计问题的数学模型是实际设计问题的特性和本质的抽象，是反映各主要因素之间内在联系的一种数学形态。优化设计的数学模型一般包括设计变量、目标函数和约束条件3个基本要素，其含义为：在满足一定的约束条件下，选取设计变量，使目标函数值达到最小。于是，优化设计问题数学模型的一般形式如下。

选取适当的设计变量

$$\boldsymbol{X}=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}} \quad (X \in E^n)$$

使其在满足

$$g_u(\boldsymbol{X})=g_u(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant 0 \quad (u=1, 2, \cdots, m)$$

和

$$h_v(\boldsymbol{X})=h_v(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0 \quad (v=1, 2, \cdots, p, p<n)$$

的约束条件下，目标函数

$$f(\boldsymbol{X})=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

最小。或将数学模型简记为向量形式

$$\left.\begin{array}{l}\min\limits_{X \in E^n} f(\boldsymbol{X}) \\ g_u(\boldsymbol{X}) \leqslant 0, u=1, 2, \cdots, m \\ h_v(\boldsymbol{X})=0, v=1, 2, \cdots, p<n\end{array}\right\} \tag{1-7}$$

在上述数学模型中，若 $f(\boldsymbol{X})$、$g_u(\boldsymbol{X})$、$h_v(\boldsymbol{X})$都是设计变量 $\boldsymbol{X}$ 的线性函数时，则称这种最优化问题为数学规划方法中的线性规划问题，即

$$\left.\begin{array}{l}\min\limits_{X \in E^n} f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{B} \\ \quad -\boldsymbol{X} \leqslant 0\end{array}\right\} \tag{1-8}$$

式中，$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{B}$ 为各为 n 阶的常数列阵；$\boldsymbol{A}$ 为 $n \times n$ 阶的常数矩阵；$\boldsymbol{X}$ 为 n 维列向量。

如果目标函数 $f(\boldsymbol{X})$、约束函数 $g_u(\boldsymbol{X})$和 $h_v(\boldsymbol{X})$中有一个或多个是 $\boldsymbol{X}$ 的非线性函数，则称此优化问题为非线性规划问题。

式(1-7)表示的优化设计数学模型称为约束优化问题。若式(1-7)中的 $m=p=0$，即不存在任何约束条件，则称此问题为无约束优化问题。在工程实际问题中，不加任何限制条件的设计问题是不多的，绝大多数都是约束优化问题。但因为无约束优化问题是约束优化方法的基础，所以在第3章将详细介绍无约束优化方法。

除此之外，根据数学模型中目标函数、约束条件和设计变量的不同性质和特点，还可以将优化方法分为整数规划、几何规划、动态规划和随机规划等，但这些方法在车辆设计中应用较少。

总之，建立数学模型是最优化过程中极为重要的一步，数学模型的好坏将直接影响设计质量。对于复杂的问题，建立数学模型时往往需要从两个互相矛盾的情况中作出决策，

一方面希望建立一个复杂的数学模型，以便把设计问题精确地描述出来；另一方面又希望建立一个比较容易处理的数学模型。要想恰当地处理好这两个方面，就需要我们对问题作出正确的分析和判断，抓住主要矛盾，适当忽略不重要的因素，从而建立合理的数学模型。

下面举例说明建立数学模型的过程。

【例 1－1】 工程车辆传动轴最小质量设计的数学模型。

此处工程车辆传动轴即为前面导入实例中提到的空心传动轴，其示意图如图 1.4 所示，设其所传递的计算转矩为 T，外径为 D，内径为 d，要求在满足强度和扭转稳定等条件下，求质量最小的设计方案。

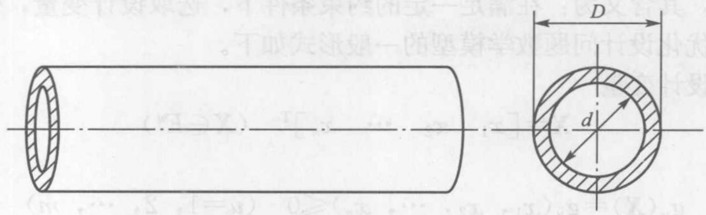

图 1.4 空心传动轴

解： 传动轴的长度取决于车辆的总体布置，一旦长度确定后，传动轴的质量则仅取决于轴的横截面积 S，且 $S=\pi(D^2-d^2)/4$。设传动轴的最高工作转矩 $n_{\max}=4000\text{r/min}$，计算转矩 $T=1.02\times10^6\text{N}\cdot\text{mm}$，临界转速 n_k 的安全系数 $\delta=2$，轴管材料的扭转许用应力 $[\tau]=125\text{N/mm}^2$，弹性模量为 $E=2.1\times10^5\text{N/mm}^2$，轴管的最大扭转应力为 $\tau_{\max}$。传动轴必须满足的设计条件如下。

（1）临界转速条件：

$$n_k=152.353\sqrt{D^4+d^4}\leqslant\delta n_{\max}$$

（2）扭转强度条件：

$$\tau_{\max}=\frac{16DT}{\pi(D^4-d^4)}\leqslant[\tau]$$

（3）空心轴扭转失稳条件：

$$\tau_{\max}\leqslant0.292E\left(\frac{D-d}{D}\right)^{3/2}$$

（4）制造工艺条件：

$$D-d\geqslant3.2$$

下面建立上述问题的优化设计数学模型。

取设计变量为

$$\boldsymbol{X}=[x_1\quad x_2]^{\mathrm{T}}=[D\quad d]^{\mathrm{T}}$$

目标函数为

$$f(\boldsymbol{X})=\pi(x_2^2-x_1^2)/4$$

设计约束为

$$g_1(\boldsymbol{X})=152.353\sqrt{x_1^2+x_2^2}-\delta n_{\max}\leqslant0$$

$$g_2(\boldsymbol{X})=-[\tau]+\frac{16Tx_1}{\pi(x_1^4-x_2^4)}\leqslant0$$

$$g_3(\boldsymbol{X})=-0.292E\left(\frac{x_1-x_2}{x_1}\right)^{3/2}+\frac{16Tx_1}{\pi(x_1^4-x_2^4)}\leqslant0$$

$$g_4(\boldsymbol{X}) = x_1 + x_2 + 3.2 \leqslant 0$$

整理，得

$$\begin{aligned}
& \min S = \pi(D^2 - d^2)/4 \\
\text{s.t.}\ & -152.353\sqrt{D^2+d^2}+8000 \leqslant 0 \\
& -125 + \frac{5194817.3D}{D^4 - d^4} \leqslant 0 \\
& -61320\left(\frac{D-d}{D}\right)^{3/2} + \frac{5194817.3D}{D^4-d^4} \leqslant 0 \\
& -D + d + 3.2 \leqslant 0
\end{aligned}$$

这是一个 $n=2$ 的约束非线性规划问题。

1.2.5 优化设计问题的几何描述

为了直观地理解优化设计的基本概念，了解设计变量、约束条件、目标函数及最优解之间的关系，下面我们将对优化设计问题进行几何解释。

求 n 个设计变量在满足约束条件下目标函数极小化的问题，可以想象为在 $n+1$ 维坐标系的约束可行域内，寻找目标函数值为最小的点 $\boldsymbol{X}^* = [x_1^* \quad x_2^* \quad \cdots \quad x_n^*]^{\mathrm{T}}$，并满足

$$\begin{aligned}
& \min_{X \in E^n} f(\boldsymbol{X}) = f(\boldsymbol{X}^*) \\
\text{s.t.} \quad & g_u(\boldsymbol{X}^*) \leqslant 0 \quad (u=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \\
& h_v(\boldsymbol{X}^*) = 0 \quad (v=1,\ 2,\ \cdots,\ p,\ p<n)
\end{aligned}$$

则称 $\boldsymbol{X}^*$ 为最优点（最优设计方案），$f(\boldsymbol{X}^*)$ 为最优值。最优点 $\boldsymbol{X}^*$ 和最优值 $f(\boldsymbol{X}^*)$ 构成一个约束最优解。

如果一组设计变量仅使目标函数取最小，而无约束条件，即满足

$$\min_{X \in E^n} f(\boldsymbol{X}) = f(\boldsymbol{X}^*)$$

则称之为无约束最优解。显然，无约束最优解就是目标函数的极小值及其极值点。

下面对一个二维非线性最优化问题进行几何描述。

已知目标函数

$$f(\boldsymbol{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4$$

在满足不等式约束条件

$$\begin{aligned}
g_1(\boldsymbol{X}) &= -x_1 + x_2 - 2 \leqslant 0 \\
g_2(\boldsymbol{X}) &= x_1^2 - x_2 + 1 \leqslant 0 \\
g_3(\boldsymbol{X}) &= -x_1 \leqslant 0 \\
g_4(\boldsymbol{X}) &= -x_2 \leqslant 0
\end{aligned}$$

下，求其最优解 $\boldsymbol{X}^*$ 和 $f(\boldsymbol{X}^*)$。

这是一个非线性优化设计问题，在以 x_1、x_2 和 $f(\boldsymbol{X})$ 为坐标的三维空间中，可作出目标函数和各约束函数的立体图形，如图 1.5(a)所示。目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 是锥形曲面，约束面 $g_1(\boldsymbol{X})$ 是平面，$g_2(\boldsymbol{X})$ 是抛物面，$g_3(\boldsymbol{X})$、$g_4(\boldsymbol{X})$ 是分别通过 x_1 轴、x_2 轴的平面。

当给定目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 一系列数值，如 1，4，9，…时，可在 x_1Ox_2 平面内得到相应的一系列平面同心圆，如图 1.5(b)所示。每一个圆上任一点的目标函数值是相等的，故这些同心圆又称等值线。各约束线在 x_1Ox_2 平面内围成一个可行域（阴影线围成的区域）。显

然，x_1Ox_2平面上的这些约束线和等值线所示图 1.5(a)中对应曲线的投影线。

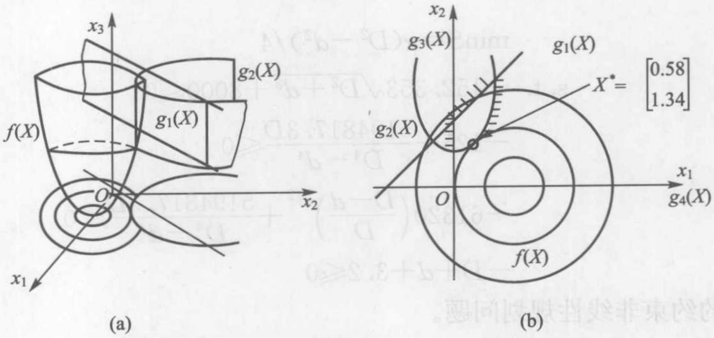

图 1.5　二维非线性最优化问题的几何概念

从图中可以看出，在可行域内目标函数最小值 $f(\boldsymbol{X}^*)$的点 $\boldsymbol{X}^*$，是约束曲线 $g_2(\boldsymbol{X})$与等值线的切点。如把图形放大精确绘出，可以确定最优点为

$$\boldsymbol{X}^*=\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.58\\1.34\end{bmatrix}$$

而最优值为

$$f(\boldsymbol{X}^*)=3.812$$

由此例可以看出，最优点 $\boldsymbol{X}^*$ 位于可行域的边界上，即位于约束曲线 $g_2(\boldsymbol{X})$上，这是约束优化设计解答的普遍情况。此处约束 $g_2(\boldsymbol{X})$对确定最优点起了决定作用，它是一个起作用的约束。

若将上例的约束条件全部取消，则变成无约束优化问题，其最优解为 $\boldsymbol{X}^*=[x_1^*\quad x_2^*]^{\mathrm{T}}=[2\quad 0]^{\mathrm{T}}$；$f(\boldsymbol{X}^*)=0$，实际上这个最优点就是目标函数等值线族的中心点，即目标函数的极小值。

若把上述概念推广到 n 维约束优化设计问题，就不难理解：n 个设计变量 x_1，x_2，…，x_n构成 n 维设计空间。m 个不等式约束的超曲面在设计空间中围成一个可行域 R。目标函数取一定值时，在 n 维设计空间中形成一个目标函数的等值超曲面。优化设计过程就是在可行域 R 内寻找一个目标函数值最小的设计点 $\boldsymbol{X}^*$，这个最小点 $\boldsymbol{X}^*$ 一般是等值超曲面与约束超曲面的切点。对于无约束优化问题，则是目标函数本身的极小点。

1.3　多元函数的基本性质

本节首先对目标函数和约束函数的某些性质、目标函数达到最优解的某些规律做些必要的讨论。同时，对优化设计所涉及的多元函数的极值理论的基本概念及有关的数学知识做些阐述。这些都是机械优化设计方法的理论基础。

1.3.1　目标函数的等值面(线)

如前所述，优化设计的目标函数

$$f(\boldsymbol{X})=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

一般可表示为设计变量 x_1，x_2，…，x_n的可计算函数。也就是说，若给定一个设计方案，即给定一组 x_1，x_2，…，x_n的值(实值)时，目标函数 $f(\boldsymbol{X})$必有一确定的数值。那么，若给定 $f(\boldsymbol{X})$值，则有无限多组的 x_1，x_2，…，x_n数值与之相对应。也就是说，当 $f(\boldsymbol{X})=C$ 时，$\boldsymbol{X}=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}$在设计空间中有一个点集。一般情况下，此点集是一曲面或超曲面，称之为目标函数的等值面。当给定一系列的 C 值，即 $C=C_1$，C_2，…，时，可以得到一组曲面族——等值面族。显然，在一个特定的等值面上，每一个设计方案的目标函数值都是相等的。

为简明起见，现以二维问题为例说明。如图 1.6 所示，$n=2$ 的目标函数 $f(x_1, x_2)$在以 x_1、x_2和 $f(\boldsymbol{X})$为坐标轴的空间内是一个曲面。显然，在二维的设计平面 x_1Ox_2 中，每一个点(x_1，x_2)都有一相应的目标函数值 $f(x_1, x_2)$，在图中表示为沿 $f(X)$轴方向的高度。若将 $f(x_1, x_2)$曲面上具有相同高度的点投影到设计平面 x_1Ox_2上，则得 $f(x_1, x_2)=C$ 的平面曲线，即为目标函数的等值线，也称等高线。等值线是等值面在二维设计空间中的特殊形态，它也是表达二元函数函数值大小及其变化规律的一种直观图形。显然，当给定一系列不同的 C 值时，可以得到一组平面曲线：$f(\boldsymbol{X})=C_1$，$f(\boldsymbol{X})=C_2$…，这组曲线构成目标函数 $f(\boldsymbol{X})$的等值线族。

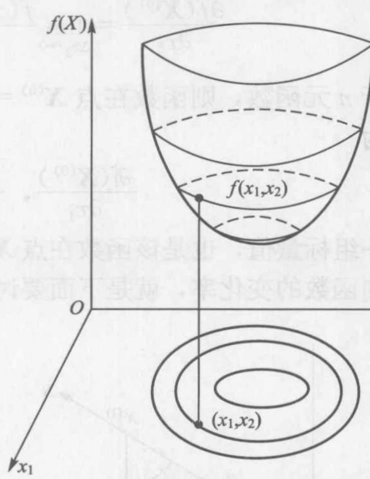

图 1.6 二维函数的等值线

以上讨论的是二维设计问题，等值线为平面曲线。对于三维设计问题，其等值函数是一个面，称作等值面；对于 n 维设计问题，则是 $n-1$ 维等值超曲面。

等值面具有以下几个性质。

(1) 不同值的等值面之间不相交。这是因为目标函数一般都是单值函数。

(2) 除了极值点所在的等值面外，其余的等值面不会在区域的内部中断。这是因为目标函数都是连续函数。

(3) 等值面稠密的地方，目标函数值变化快；稀疏的地方变化慢。

(4) 一般地，在极值点附近，等值面(线)近似地呈现为同心椭圆面族(椭圆族)。

1.3.2 方向导数和梯度

函数的等值面(线)仅以几何图形方面定性地表示了函数值的变化规律，虽然比较直观，但不能定量表示，且多数只限于二维函数。所以，为了能够定量地表示函数在某一点的变化性态，需要引出函数的方向导数和梯度等概念。

1. 偏导数

众所周知，对于一元函数，可用导数来描述函数相对于自变量的变化率。同样，对于多元函数，可用偏导数的概念来研究函数值相对于其中一个自变量(其余自变量保持不变)的变化率。

设二元函数 $f(\boldsymbol{X})=f(x_1, x_2)$，在点 $\boldsymbol{X}^{(0)}=[x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)}]^{\mathrm{T}}$ 处沿 x_1轴方向有增量 Δx_1，

则函数的相应增量为

$$f(x_1^{(0)}+\Delta x_1,\ x_2^{(0)})-f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)})$$

当Δx_1无限减小时，若极限

$$\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f(x_1^{(0)}+\Delta x_1,\ x_2^{(0)})-f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)})}{\Delta x_1}$$

存在，则这个极限称为函数$f(\boldsymbol{X})$在点$\boldsymbol{X}^{(0)}$处对x_1的偏导数，记作

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{X}^{(0)})}{\partial x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f(x_1^{(0)}+\Delta x_1,\ x_2^{(0)})-f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)})}{\Delta x_1} \tag{1-9}$$

同样，函数在$\boldsymbol{X}^{(0)}$处对x_2的偏导数为

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{X}^{(0)})}{\partial x_2}=\lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}+\Delta x_2)-f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)})}{\Delta x_2} \tag{1-10}$$

对于n元函数，则函数在点$\boldsymbol{X}^{(0)}=[\mathrm{x}_1^{(0)}\quad \mathrm{x}_2^{(0)}\cdots\quad \mathrm{x}_n^{(0)}]^T$处沿各坐标轴的一阶偏导数分别为

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{X}^{(0)})}{\partial x_1},\ \frac{\partial f(\boldsymbol{X}^{(0)})}{\partial x_2},\ \cdots,\ \frac{\partial f(\boldsymbol{X}^{(0)})}{\partial x_n} \tag{1-11}$$

它们是一组标量值，也是该函数在点$\boldsymbol{X}^{(0)}$处沿各坐标轴这些特殊方向的变化率。而沿其他一般方向函数的变化率，就是下面要讨论的方向导数问题。

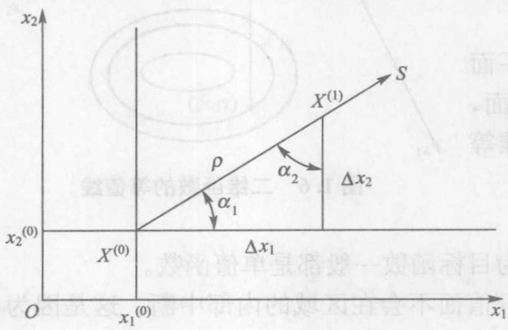

图 1.7 方向导数的几何意义

2. 方向导数

设二维函数$f(\boldsymbol{X})=f(x_1,\ x_2)$，在$\boldsymbol{X}^{(0)}$点引一方向$\boldsymbol{S}$，与$x_1$轴和$x_2$轴之夹角分别为$\alpha_1$、$\alpha_2$，如图 1.7 所示。在$\boldsymbol{S}$方向上任取一点$\boldsymbol{X}^{(1)}=[x_1^{(0)}+\Delta x_1\quad x_2^{(0)}+\Delta x_2]^{\mathrm{T}}$。$\boldsymbol{X}^{(0)}$和$\boldsymbol{X}^{(1)}$点之间的距离

$$\rho=\sqrt{(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2}$$

由此可得，目标函数在$\boldsymbol{X}^{(0)}$处沿$\boldsymbol{S}$方向的平均变化率为

$$\frac{\Delta f(x_1,\ x_2)}{\rho}=\frac{f(x_1^{(0)}+\Delta x_1,\ x_2^{(0)}+\Delta x_2)-f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)})}{\rho}$$

当$\rho\to 0$时，如果上式极限存在，则称此极限为函数$f(\boldsymbol{X})$在点$\boldsymbol{X}^{(0)}$处沿$\boldsymbol{S}$方向的方向导数，记作

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{X}^{(0)})}{\partial \boldsymbol{S}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_1^{(0)}+\Delta x_1,\ x_2^{(0)}+\Delta x_2)-f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)})}{\rho} \tag{1-12}$$

显然，方向导数是函数在某点沿给定方向的变化率，所以，可以把它看成偏导数的推广，并可用偏导数来表示，即式(1-12)可化成以下形式：

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{X}^{(0)})}{\partial \boldsymbol{S}}=\lim_{\rho\to 0}\Big[\frac{f(x_1^{(0)}+\Delta x_1,\ x_2^{(0)}+\Delta x_2)-f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}+\Delta x_2)}{\Delta x_1}\cdot\frac{\Delta x_1}{\rho}$$

$$+\frac{f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}+\Delta x_2)-f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)})}{\Delta x_2}\cdot\frac{\Delta x_2}{\rho}\Big]$$