高等教育自学考试强化训练系列丛书

高等数学(一)试卷解答分析与预测

(1998～2003)

陈博文　杨永发　编著

○ 专家分析
○ 行家解答
○ 高手预测
○ 考生获益

南开大学出版社
天津

内 容 提 要

本书是为参加高等教育自学考试“高等数学（一）”科目考试的读者编写的考前强化训练复习用书。内容分为三部分：主要内容归纳与总结，试卷解答、分析与应试对策，预测试卷与解答。

第一部分在归纳总结主要内容的基础上给出了各章内容的考试指导和典型例题。考试指导以考试大纲特别是历年考试为依据，对读者复习提出了极具帮助意义的指导建议。典型例题选材得当，分析透彻，有助于读者提炼知识，强化记忆。

第二部分包括1998～2001年上半年全国高等教育自学考试“高等数学（一）”的全部试卷及详细的分析解答，特别是对于单项选择题，给出了选择理由的详尽分析，其中融汇了大量的知识点。

第三部分给出了2002～2003年的5套预测试卷及其分析解答，供读者演练时参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)试卷解答、分析与预测：1998～2003 / 陈博文，杨永发编著. —天津：南开大学出版社，2001.12
(高等教育自学考试强化训练系列丛书)
ISBN 7-310-01622-X

Ⅰ.高... Ⅱ.①陈...②杨... Ⅲ.高等数学—高等教育—自学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 053815 号

出版发行 南开大学出版社
地址：天津市南开区卫津路 94 号
邮编：300071 电话：(022)23508542

出版人 肖占鹏
承 印 天津宝坻第二印刷厂印刷
经 销 全国各地新华书店
版 次 2001 年 12 月第 1 版
印 次 2001 年 12 月第 1 次印刷
开 本 880mm×1230mm 1/32
印 张 12.75
字 数 362 千字
印 数 1—3000
定 价 19.00 元

前　言

本书是为参加高等教育自学考试“高等数学(一)”科目考试的考生准备的考前强化训练复习用书。

本书依据全国高等教育自学考试指导委员会经济管理类专业委员会1991年9月修订的《高等数学(一)自学考试大纲》编写，紧密配合全国高等教育自学考试指定教材《高等数学(一)微积分》(高汝熹主编，武汉大学出版社，1992年1月第一版，以下简称为“指定教材”)，对考生进行考前复习有较强的针对性和很好的参考价值。

和现有的高等教育自学考试“高等数学(一)”的其他参考书相比，本书具有如下特点：

●依据自学考试大纲，对每一章的主要内容进行了归纳和总结，给出了考试指导和典型例题。考试指导以大纲和历年考试情况为根据，详述了对各部分内容的要求，对复习应试提出了具体的指导建议。典型例题紧扣历年考试试卷，在试题的难度和广度上针对性极强，例题的分析注重结合考试实际，对读者总结知识、系统提高及复习应试都有很大的帮助。

●收集了自1998年上半年至2001年上半年全国高等教育自学考试“高等数学(一)”的全部试卷，并对每套试卷给出了详尽的分析、解答。其中最具特色的是对于单项选择题，不但给出正确答案，而且对选择的理由及相关知识进行了细致的分析，其中融汇了大量的知识点，对读者有较强的参考价值。同类内容在其他辅导参考书中还不多见。

●对1991年上半年以来的历年试卷的结构及内容进行了统计分析，以表格形式向读者清晰地展示了高等数学(一)试卷的结构、题型和主要内容的分布。

●给出了2002年～2003年的5套预测试卷，预测未来考试的发展动向，也可供读者进行强化训练之用。

●书末收录了2001年上半年的试卷评分标准，帮助考生进一步了解考试要求，把握答题分寸。

在本书编写过程中，得到了南开大学出版社李正明编审和作者的恩师、河北工业大学于慎根教授的极大鼓励和帮助，编者在此一并致以深深的谢意。

限于编者的水平，书中仍会有许多不足之处，编者热切地希望读者对书中的缺点和错误进行批评和指正，以便再版时进行修正。

编　者

2001 年初夏于天津

目　　录

第一部分　主要内容归纳与总结

第二部分 试卷解答、分析与应试对策

第三部分　预测试卷及解答分析

第 一 部 分

主要内容归纳与总结

第一章　函数及其图形

§1.1　主要内容

1.1.1　集合的概念及运算

1. 集合

集合就是指具有某个共同属性的一些对象的全体。构成集合的每一个对象称为该集合的**元素**。

含有有限个元素的集合称为**有限集**,含有无限多个元素的集合称为**无限集**。不含有任何元素的集合称为**空集**,记作 Φ。

2. 子集、集合的相等

设有集合 A 与 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,则称集合 A 是集合 B 的**子集**,用记号 $A\subset B$ 或 $B\supset A$ 表示。由此,任一集合都是其本身的子集。空集是任一集合的子集。

两集合 A 和 B 如果含有相同的元素,则称集合 A 与集合 B **相等**,记为 $A=B$。

集合 $A=B$ 的充要条件是 $A\subset B$ 且 $A\supset B$。

3. 集合的运算

由集合 A 与集合 B 中所有元素汇总构成的集合称为集合 A 与 B 的**并**,记为 $A\cup B$。即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}。$$

由所有既属于集合 A 又属于集合 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的**交**,记为 $A\cap B$。即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}。$$

若集合 A 是集合 B 的子集，则所有属于 B 但不属于 A 的元素构成的集合称为集合 A 关于集合 B 的**补集**，记为 A_B^C。即

$$A_B^C=\{x\,|\,x\in B \text{ 且 } x\overline{\in} A\}。$$

当没有必要指出集合 B 时，为方便起见，也常把 A_B^C 记为 A^C。

集合的运算满足以下运算规律：

(1)交换律

$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2)结合律

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3)分配律

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4)对偶律

$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$,

$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$。

1.1.2 区间和邻域

1. 区间

介于某两个实数 a、$b(a<b)$之间的全体实数称为**区间**，而实数 a、b 称为区间的**端点**。有限区间有

开区间：$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$。

闭区间：$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$。

半开半闭区间：$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$。

无穷区间有五种，分别是：$(-\infty,b)=\{x\,|\,-\infty<x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x\,|\,-\infty<x\leqslant b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$，$(a,+\infty)=\{x\,|\,a<x<+\infty\}$，$[a,+\infty)=\{x\,|\,a\leqslant x<+\infty\}$。

2. 邻域

点 x_0 的 $\delta(\delta>0)$**邻域**，是指以 x_0 为中心的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，也就是满足$|x-x_0|<\delta$ 的全体实数所组成的集合。点 x_0 称为该邻域

的**中心**，正数 δ 称为该邻域的**半径**。

1.1.3 函数

1. 映射

若两个集合 X 和 Y 间的一种对应关系 f 满足如下条件：

(1)对于第一个集合 X 中的每一个元素，都能按某种规则与第二个集合 Y 的某个元素对应；

(2)对于第一个集合 X 中的每一个元素，第二个集合 Y 中与它对应的元素只有一个。

则称这样的对应关系 f 为从 X 到 Y 的**映射**，并记为 $f:X\to Y$。

2. 函数

若 X 和 Y 都是实数集合(简称数集)，则两实数集合之间的映射 $f:X\to Y$ 称为**函数**。习惯上，称 X 为函数 f 的**定义域**，记为 D_f，并记函数 f 为

$$y=f(x),x\in D_f。$$

3. 函数的单调性

设有函数 $y=f(x),x\in D_f$。若对于任意两点 x_1、$x_2\in D_f$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在 D_f 内(**严格**)**单调增加**。反之，若对于任意两点 x_1、$x_2\in D_f$，当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在 D_f 内(**严格**)**单调减少**。单调增加和单调减少函数统称为**单调函数**。

4. 函数的有界性

若存在两个数 A 和 B，使对于一切 $x\in D_f$，恒有 $A\leqslant f(x)\leqslant B$，则称函数 $y=f(x)$在 D_f 内是**有界函数**，否则就称为**无界函数**。

易见，函数 $y=f(x)$在 D_f 上有界的充要条件是存在正数 M，使对一切 $x\in D_f$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$。

5. 函数的奇偶性

设有函数 $y=f(x),x\in(-\infty,+\infty)$，那么

(1)若对于任何 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$为**偶函数**。

(2)若对于任何 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为**奇函数**。

实际上，上面定义中的函数 $f(x)$ 的定义域不一定非要为 $(-\infty,+\infty)$ 不可，一般要求关于原点对称即可。

6. 函数的周期性

设有函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，若存在 $\omega\neq 0$，使对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $f(x+\omega)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，ω 为 $f(x)$ 的一个周期。习惯上，人们常把一个函数的最小正周期（如果这个最小正周期存在的话）叫做函数的**周期**。

7. 复合函数

设有两个实数集上的映射

$$f: y=f(u), u\in D_f,$$
$$g: u=g(x), x\in D_g,$$

如果映射 g 的值域 R_g 包含在映射 f 的定义域 D_f 中，也就是说 $R_g\subset D_f$，于是

$$y=(f\cdot g)(x)=f(g(x)), x\in D_g$$

也是一个函数。此函数称为 f 和 g 复合而成的**复合函数**，u 称为**中间变量**。

8. 反函数

设 $y=f(x)$ 为给定的一个函数，如果对其值域 R_f 中的任一值 y，都可以通过关系 $y=f(x)$ 在其定义域 D_f 中确定惟一的一个 x 与它对应，则得到一个定义在 R_f 上的以 y 为自变量、x 为因变量的新函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为

$$f^{-1}: Y\rightarrow X(\text{即函数 } x=f^{-1}(y))。$$

习惯上，又把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$。此时其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=D_f$。

若函数 $y=f(x)$，$x\in D_f$ 是严格单调增加（或减少）的，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$，$x\in R_f$ 存在，且此反函数也是严格单调增加（或减少）的。

§1.2 考试指导与典型例题

1.2.1 考试指导

函数是高等数学研究的主要对象，因而在学习过程中应予以足够的重视。读者在本章的首要任务是要弄清集合、函数等基本概念(包括复合函数、反函数及函数的几种特性等)，掌握集合的表示方法和运算法则。

从历次考试看，完全属于本章内容的试题约占总分的5%，主要出现在单项选择题中，内容常涉及集合的运算，函数的定义域，函数的表达式，函数的单调性、奇偶性、周期性及有界性判断，复合函数、反函数的概念，求函数值，比较函数的异同，判断函数类型等等。另外，需求函数等几个常用的经济函数往往出现在应用题当中或与应用题有关，读者应给予应有的重视。分段函数是在初等数学中没有出现过的内容，但它在澄清许多重要的概念方面地位独特，须着重理解。

此外，有些内容尽管可能不会出现在考题中，但对学习以后各章的内容有较大影响，也应特别注意。这里提醒读者注意以下三点：一是基本初等函数的表达式、定义域、值域、图形和简单性质要熟练掌握；二是要能正确地分析复合函数的复合过程，能够正确地把一个复合函数分解为一些基本初等函数；三是要学习和体会把实际问题简化、抽象，归纳出函数关系的方法。

1.2.2 典型例题

例 1 设集合 $A=\{x\mid 2\leqslant |x|\leqslant 4\}$，$B=\{x\mid x+3>0\}$，求 $A\cup B$、$A\cap B$、$A\cap B^C$，并把它们用区间表示出来。

解 如图 1-1 所示。

$A\cup B=\{x\mid x\geqslant -4\}=[-4,+\infty)$；

$A\cap B=\{x\mid -3<x\leqslant -2$ 或 $2\leqslant x\leqslant 4\}=(-3,-2]\cup[2,4]$；

$A\cap B^C=A\cap\{x\mid x\leqslant -3\}=\{x\mid -4\leqslant x\leqslant -3\}=[-4,-3]$。

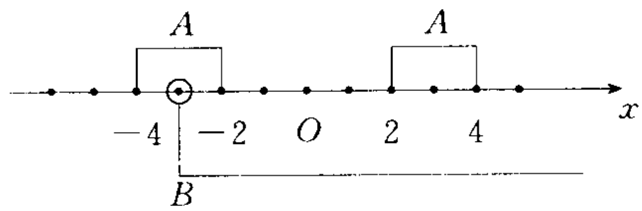

图1-1

在分析这样的题目时，可以借助于图形。在分析过程中，要特别留意区间的端点。

例 2 设有集合 $E_1=\{x|x(x^2-1)=0\}$，$E_2=\{x|x(x-1)\neq 0\}$，$E_3=\{x|e^x(x^2-1)\neq 0\}$，$E_4=\{x|x^2(x^2-1)=0\}$，则下列结果正确的是(　　)。

(A)$E_1\cap E_2=\Phi$　　　　(B)$E_1\cap E_3=\Phi$

(C)$E_1\cap E_4=\Phi$　　　　(D)$E_1=E_4$

解 $E_1=\{-1,0,1\}$，$E_2=\{0,1\}$，$E_3=\{-1,1\}$，$E_4=\{-1,0,1\}$，易知，(D)是正确的。

例 3 函数 $y=\dfrac{x-3}{\ln x}+\sqrt{9-x^2}$ 的定义域为(　　)。

(A)$[-3,3]$　　　　(B)$(0,+\infty)$

(C)$(0,1)\cup(1,3]$　　　　(D)$(0,3]$

解 由于对数函数 $\ln x$ 的定义域为 $x>0$，同时由分母不能为零知 $\ln x\neq 0$，即 $x\neq 1$。由根式内要非负可知 $9-x^2\geqslant 0$，即要有 $x>0$、$x\neq 1$ 与 $x^2\leqslant 9$ 同时成立，从而其定义域为 $(0,1)\cup(1,3]$，即应选(C)。

例 4 设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，$a>0$，问 $f(x^2)$、$f(\sin x)$、$f(x+a)$ 和 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域各是什么？

解 要使 $x^2\in[0,1]$，须 $-1\leqslant x\leqslant 1$，故 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$。

要使 $\sin x\in[0,1]$，须 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，故 $f(\sin x)$ 的定义域为

$$[2k\pi,(2k+1)\pi],k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

要使 $x+a\in[0,1]$，须 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$，因而 $f(x+a)$ 的定义域为 $[-a,1-a]$。

要使 $x+a\in[0,1]$ 且 $x-a\in[0,1]$，须 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$ 且 $a\leqslant x\leqslant 1+a$。因 $a>0$，故须 $a\leqslant x\leqslant 1-a$。当 $a\leqslant 1-a$，即 $0<a\leqslant 1/2$ 时，$f(x+a)+$