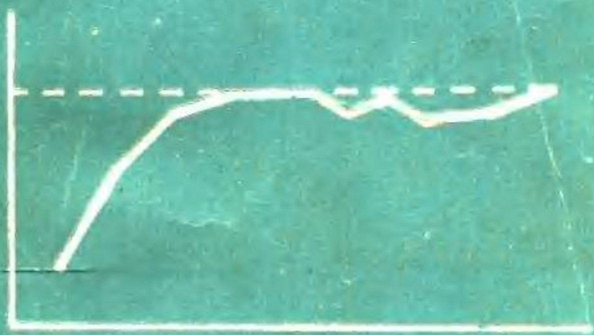
经济管理·计算机·工科类

应用模糊数学

汪培庄　韩立岩



北京经济学院出版社

应用模糊数学

汪培庄　韩立岩

北京经济学院出版社

1989年　北京

内 容 简 介

软科学与计算机科学是模糊数学的两大理论和应用前沿。本书力求使读者对模糊数学的原理和方法有一个完整的认识，既主要介绍用于软科学的理论和方法，也同时介绍用于计算机软件的模糊推理、控制方法以及实用模型。

全书分十章，涉及模型识别、聚类分析、综合评判、模糊统计、预测与决策、因素空间、推理与控制等。其中包括一些近几年来新的研究和应用成果，如度量、偏差、对比排序，落影、变权、推理渠道等。书中较多涉及经济管理内容。每章后配有习题。适宜作为经济管理、计算机及工科各有关专业本科生、研究生教材，也可供上述领域的研究人员和实际工作者阅读参考。

应 用 模 糊 数 学

YINGYONG MOHUSHU XUE

汪培庄　韩立岩

北京经济学院出版社出版

（北京市朝阳区红庙）

中国铁道出版社印刷厂印刷·激光照排

新华书店北京发行所发行

787×1092 毫米　32 开本　11.75 印张　284 千字

1989 年 8 月第 1 版　1989 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

印数：0 001—7 000

ISBN7-5638-0129-4／O·3

定价：4.95 元

写在前面

自 1965 年以来模糊数学（或称模糊集合与系统）已有二十多年的发展历史了。自诞生之日起模糊数学就以计算机科学和软科学作为研究和应用的两大前沿。本书侧重于后者，同时也涉及用于前者的方法和模型。其所以取名"应用模糊数学"即为了兼顾数学概念、方法与应用技术、模型这两个方面。本书力求使读者对模糊数学的原理和思想方法有一个完整的认识，同时又着眼于各种具有推广价值的实用方法、技术和模型。

本书是为经济、管理、贸易、财政和金融各专业，以及计算机和工科各专业的研究生和高年级本科生编写的；也适于从事经济管理和工程技术的研究人员和实际工作者参考阅读。作为阅读本书的准备，读者应具有微积分、线性代数和概率论初步等方面的基础知识；如果学习过离散数学的基础知识，那么阅读起来就更为方便。假若选作教材，大约需要 70 至 80 学时。如果时数紧张，可以有针对性地选读部分章节。对于数学要求不高的本科学生和初学者可以略去带 * 号的章节。对于数学程度较好的工科学生、经济信息和数量经济专业的学生以及研究生可以阅读全书。

根据汪培庄提供的手稿、论文、资料及总体思想，由韩立岩执笔写作了全书，增加了一些自己的研究成果；并从教学出发，对部分内容重新编排，对部分概念和定理重新表述、解释和证明；还增加了经济管理方面的内容与例题。本

书曾作为打印教材为北京经济学院的研究生、经济信息管理系 84、85 和 86 三级本科生所采用，收到同学们的许多宝贵意见和建议，在此表示深深的感谢。感谢罗承忠教授，他的《模糊集引论》是本书的主要参考书之一。同时感谢经济信息管理系和基础课部有关同志的大力支持；感谢王学军、贾岚、李蔚等同学使用微机为本书排版。由于作者水平的局限和时间的仓促，书中存在不少失误与不足，恳请读者批评指正。

作 者 谨 识

1988 年 *12* 月于北京

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

第一章　模糊集合及其运算

概念是科学的细胞。一些概念在特定的场合有明确的外延。例如，国家、男人、货币、经济法人等等。对于这些明确的概念，在现代数学里常常用（经典）集合来表示。但是，还有相当一部分概念在一些场合不具有明确的外延。例如，青年人。你能在年龄轴上划两道线，在两道线内就是青年人，在其外就截然不是青年人吗？人的生命是一个连续的过程，一个人从少年走向青年是一日一日积累的。同样，一个人从青年步入中年也是一个渐变的过程。在经济科学和管理科学中这样的概念也处处可见。比如，通货膨胀。如果说物价上涨率超过10%就意味着通货膨胀，那么9.99%的情形呢？就绝对不是吗？而物价上涨20%的情形与200%的情形又如何在外延上加以区别呢？好学生、高经济增长、大型企业、消费超前、市场占有、银根紧张等等，读者可以随口举出许许多多具有外延不分明特点的概念。这样的概念相对于明确的概念我们称之为不分明概念或者模糊概念。模糊概念在科学领域中处处可见，在社会科学中尤为突出。这是因为社会科学在以往是用人类的自然语言来叙述的，而人的自然语言又是以模糊为特征的。今天人类社会已进入信息时代，进入计算机时代，进入社会科学与数理科学大交融的时代。社会科学要求数学提供表达形式，尤以经济科学为先锋。经济科学以严格的定性描述和大量的定量分析而著称，这就为数学的大量引入提供了需要和可能。显然，模糊概念

的数学表达是必不可少的。但是传统的集合论在模糊概念面前显得软弱无力。于是，1965 年美国计算机与控制论专家扎德（L.A.Zadeh）教授提出了"模糊集合论"。

第一节　模糊集合

设 U 表示一些对象的集合，称之为论域。对于 U 的一个子集 A，我们可以用它的特征函数来表之。令

$$\chi_A(u)=\begin{cases}1 & u\in A\\ 0 & u\in A^C\end{cases}$$

其中 $A^C=U-A.\chi_A$ 是定义于 U 上取值于 $\{0,\ 1\}$ 的函数，称为集合 A 的特征函数。χ_A 明确表示了集合 A。对于 $u\in U$，若 $\chi_A(u)=1$，则说 u 是 A 中的元素；若 $\chi_A(u)=0$，则说 u 不是 A 中的元素。由此出发我们给出模糊集合的定义。

定义 1.1　设 U 是论域，U 上的一个模糊集合 A 由 U 上的一个实值函数

$$\mu_A:\ U\rightarrow[0,\ 1]$$

表示。对于 $u\in U$，$\mu_A(u)$ 称为 u 对 A 的隶属度，而 μ_A 称为 A 的隶属函数。

对我们来说模糊集合 A 是一个抽象的东西，而函数 μ_A 则是具体的，我们只能通过 μ_A 来认识和掌握 A。

为简便计，常常用$A(u)$来代替$\mu_A(u)$。

U上的模糊集合的全体记为$\mathrm{F}(U)$。

这样，对于论域 U 的一个元素 u 和 U 上的一个模糊子

集 A，我们不再是简单地问 u"绝对"属于还是不属于 A，而是问 u 在多大程度上属于 A。隶属度 $A(u)$ 正是 u 属于 A 的程度的数量指标。若 $A(u)=0$，则认为 u 完全不属于 A；若 $A(u)=1$，则认为 u 完全属于 A；若 $0<A(u)<1$，则说 u 在 $A(u)$ 的程度上属于 A。这时在完全属于 A 和完全不属于 A 的元素之间，呈现出中间过渡状态，或叫连续变化状态。这也正是我们所说的 A 的外延表现出不分明的变化层次，表现出模糊性。

例 1.1 以年龄为论域，取 $U=[0,200]$。扎德给出"年轻"的模糊集 Y，其隶属函数是

$$Y(u)=\begin{cases}1 & 0\leqslant u\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & 25<u\leqslant 200\end{cases} \tag{1.1}$$

Y的图象为

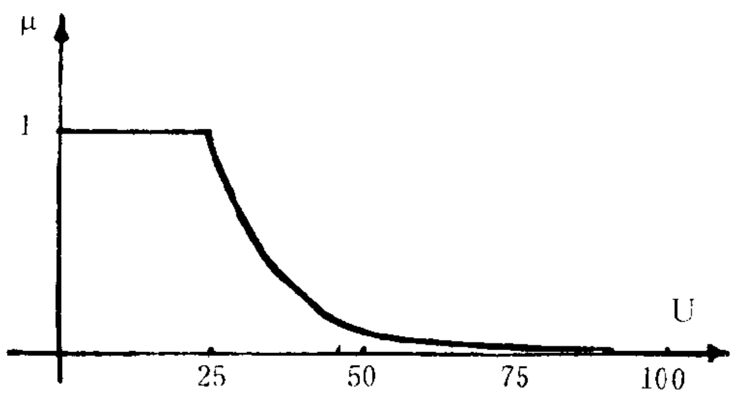


图1－1.

我们看到，年龄对"年轻"的隶属度呈现出连续的变化，Y 的外延是不分明的，模糊的。这样刻划更符合人的意识。

当论域 U 为有限点集，即 $U=\{u_1,\cdots,u_n\}$ 时，U 上的模糊集可以用向量来表示

$$A=(\ \mu_1,\cdots,\mu_n\ ),$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

这里$\mu_i = A(u_i)$ ，$i = 1,\cdots,n$。

一般地，若一向量的每个坐标都在[0,1]之中，则称其为模糊向量。

例 1.2 考察几个企业 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。令 $U = \{a_1,\cdots,a_n\}$。以 μ_i 记 a_i 的生产成本中活劳动所占比重，那么

$$A = (\mu_1,\cdots,\mu_n)$$

即可表示劳动密集型企业的模糊集。

如果将一个模糊集 A 的隶属函数限于取值 0 或 1，则 A 实际上是一个普通集合。因此，普通集合是模糊集合的特例，或者说模糊集合是普通集合的拓广。用符号表之，

$$\mathbf{P}(U) \subseteq \mathbf{F}(U),$$

其中$\mathbf{P}(U) = \{A : A \subseteq U\}$,称为$U$的幂集.

为符号上的简便，在本书里普通集与模糊集均以 A 表示，从上下文读者是可以看出 A 是普通集还是真模糊集。

实数域 R 上的模糊集在应用中常见，我们将一些隶属函数的具体形式收于书后附录。

第二节　模糊集的格运算

这一节我们将普通集合论中集合间的关系与运算推广到模糊集中去。

设 U 为论域、$\mathbf{P}(U)$ 为 U 上的幂集。对于集合 A，$B \in \mathbf{P}(U)$ ，我们有

$$A \subseteq B:\ \forall u\in A \Rightarrow u\in B; \tag{1.2}$$

$$A \supseteq B:\ B\subseteq A; \tag{1.3}$$

$$A = B:\ A\subseteq B\text{且}B\subseteq A; \tag{1.4}$$

$$A\bigcup B = \{u\in U:\ u\in A\text{或者}u\in B\}; \tag{1.5}$$

$$A\bigcap B = \{u\in U:\ u\in A\text{且}u\in B\}; \tag{1.6}$$

$$A^{C} = \{u\in U:\ u\notin A\}; \tag{1.7}$$

$$A - B = \{u\in U:\ u\in A\text{且}u\notin B\}. \tag{1.8}$$

设T是任意指标集，则

$$\bigcap_{t\in T}A_t = \{u\in U:\ \forall t\in T,\ \text{有}u\in A_t\}; \tag{1.9}$$

$$\bigcup_{t\in T}A_t = \{u\in U:\ \exists\, t\in T,\ \text{有}u\in A_t\}. \tag{1.10}$$

下面，我们将上述关系与运算推广到模糊集之中。

定义1.2　设A，B是U上的二模糊集。

（Ⅰ）A与B的并记为$A\bigcup B$，其隶属函数为

$$(A\bigcup B)(u) = A(u)\vee B(u) \tag{1.11}$$

其中“$\vee$”表示二者比较后取大值。

（Ⅱ）A与B的交记为$A\bigcap B$，其隶属函数为

$$(A\bigcap B)(u) = A(u)\wedge B(u) \tag{1.12}$$

其中“$\wedge$”表示二者比较后取小值。

（Ⅲ）A的余模糊集记为A^{C}，其隶属函数为

$$A^{C}(u) = 1 - A(u) \tag{1.13}$$

（Ⅳ）如果$A(u)\leqslant B(u)$，$\forall u\in U$，则说A被B包含，记为$A\subseteq B$。

（Ⅴ）如果$A\subseteq B$，则说B包含A，记为$B\supseteq A$。

（Ⅵ）$A=B$当且仅当$A\subseteq B$且$A\supseteq B$。

设T是任意给定的指标集，$\forall t\in T$，A_t是U上的模糊集。

（Ⅶ）$\{A_t\}_{t\in T}$ 的并记作 $\bigcup_{t\in T}A_t$，其隶属函数为

$$(\bigcup_{t\in T}A_t)(u)=\bigvee_{t\in T}A_t(u) \tag{1.14}$$

其中“$\vee$”表示取上确界。

（Ⅷ）$\{A_t\}_{t\in T}$ 的交记作 $\bigcap_{t\in T}A_t$，其隶属函数为

$$(\bigcap_{t\in T}A_t)(u)=\bigwedge_{t\in T}A_t(u) \tag{1.15}$$

其中“$\wedge$”表示取下确界。

如果我们把普通集合看作模糊集合的特例，那么，马上可以看出普通集合按定义 1.2 的关系和运算与集合论中相应的关系和运算是完全一致的。因此，模糊集的上述关系与运算是对普通集合情形的推广。

例如，A，B 是 U 的二子集，χ_A，χ_B 为相应的特征函数。那么

$u\in A\bigcup B\Rightarrow u\in A$ 或者 $u\in B$。因而若 $\chi_{A\cup B}(u)=1$，则有 $\chi_A(u)=1$ 或者 $\chi_B(u)=1$；若 $(A\bigcup B)(u)=0$，则有 $\chi_A(u)=0$ 且 $\chi_B(u)=0$。这就证明了

$\chi_{A\cup B}(u)=\chi_A(u)\vee\chi_B(u)$ ，$u\in U$

这正是定义1.2中并的运算。

模糊集之间的关系与运算表明了它们之间的相互作用。具体之，模糊集的并、交、余和包含，依次表示了模糊概念的析取、合取、否定（排斥）和蕴含。这在实际问题中是有重要意义的。

例 1.3 设某种商品有 8 个不同的商标，商标构成的论域为

$$U=\{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_8\}.$$

$A=(0.8,\ 0.6,\ 0.4,\ 0.7,\ 0.6,\ 0.5,\ 0.4,\ 0.3)$

表示“商誉高”，

$$B=(0.7, 0.4, 0.6, 0.8, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7)$$

表示“价格合理”。那么，“价格合理且商誉高”为

$$A\cap B=(0.7, 0.4, 0.4, 0.7, 0.4, 0.5, 0.4, 0.3)$$

而“价格合理或商誉高”为

$$A\cup B=(0.8, 0.6, 0.6, 0.8, 0.6, 0.5, 0.6, 0.7).$$

例 1.4 设 $U=[0, 200]$，Y 如例 1.1 所给，令 O 表示“年老”，依扎德其隶属函数为

$$O(u)=\begin{cases}0 & 0\leqslant u\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50<u\leqslant 200\end{cases}\tag{1.16}$$

于是“年轻或年老” $Y\cup O$ 的隶属函数为

$$\begin{aligned}(Y\cup O)(u)&=Y(u)\vee O(u)\\ &=\begin{cases}1 & 0\leqslant u\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 25<u\leqslant u^{*}\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & u^{*}<u\leqslant 200\end{cases}\end{aligned}$$

其中 $u^{*}=\dfrac{1}{2}(75+5\sqrt{29})=50.96291$，若 u 取整数值，则 $u^{*}=51$。

“不年老” O^{C} 的隶属函数为

$$\begin{aligned}O^{C}(u)&=1-O(u)\\ &=\begin{cases}1 & 0\leqslant u\leqslant 50\\ 1-\left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50<u\leqslant 200\end{cases}\end{aligned}$$

在集合论中，集合的格运算有许多良好的性质:

(1) 幂等律

$$A \bigcup A = A, \quad A \bigcap A = A. \tag{1.17}$$

(2) 交换律

$$A \bigcup B = B \bigcup A, \quad A \bigcap B = B \bigcap A. \tag{1.18}$$

(3) 结合律

$$(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C),$$

$$(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C). \tag{1.19}$$

(4) 吸收律

$$(A \bigcap B) \bigcup B = B, \quad (A \bigcup B) \bigcap B = B. \tag{1.20}$$

(5) 分配律

$$A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C),$$

$$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C). \tag{1.21}$$

(6) 复原律

$$(A^C)^C = A. \tag{1.22}$$

(7) 两极律

$$A \bigcup U = U, \quad A \bigcap U = A, \tag{1.23}$$

$$A \bigcup \phi = A, \quad A \bigcap \phi = \phi. \tag{1.24}$$

(8) 对偶律（*De—Morgan*律）

$$(A \bigcup B)^C = A^C \bigcap B^C, \quad (A \bigcap B)^C = A^C \bigcup B^C. \tag{1.25}$$

(9) 补余律

$$A \bigcup A^C = U, \quad A \bigcap A^C = \phi. \tag{1.26}$$

幂集 **P**(U) 加上并、交、余运算由于满足上述算律，称之为布尔代数。

以上九种算律究竟有哪些在 **F**(U) 中仍然成立呢?

命题 1.1 在(**F**(U), $\bigcup$, $\bigcap$, c)中，以上 (1) 至

(8) 的所有算律均成立，而 (9) 补余律不再成立。

证明：在算律 (1) 至 (8) 中仅证 (8)，其余留作习题。

$\forall u \in U$,

$(A \bigcup B)^C(u) = 1 - (A \bigcup B)(u)$

$= 1 - (A(u) \vee B(u))$

$= (1 - A(u)) \wedge (1 - B(u))$.

最后一个等号成立，是因为，若设 $A(u) \leqslant B(u)$，则 $1 - (A(u) \vee B(u)) = 1 - B(u)$ ，同时 $1 - A(u) \geqslant 1 - B(u)$ ，因而，$1 - B(u) = (1 - A(u)) \wedge (1 - B(u))$ 。

于是，$(A \bigcup B)^C(u) = A^C(u) \wedge B^C(u)$ 。

根据刚刚证明的等式，我们有

$$(A^C \bigcup B^C)^C = (A^C)^C \bigcap (B^C)^C = A \bigcap B,$$

进而 $\quad A^C \bigcup B^C = (A \bigcap B)^C.$

这里两次使用了 (6) 复原律。

最后通过反例说明补余律不成立。

取 $U = \{a, b\}$ ，$A = (0.5,\ 0.7)$，$A^C = (0.5,\ 0.3)$，但是

$$A \bigcup A^C = (0.5,\ 0.7) \neq U,$$

$$A \bigcap A^C = (0.5,\ 0.3) \neq \phi. \quad ■$$

根据命题 1.1，我们称 **F(U)** 关于 $\bigcup$，$\bigcap$，c 作成一个软代数 (Soft Algebra)。

以上介绍的模糊集的并、交运算是由扎德提出的，称为格运算，它是普通集合格运算的直接推广。

然而推广的方式不是唯一的。下面列举几种其它的推广方式。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com