师范专科学校试用教材

数学分析

（下）

东北地区师专数学教材协编组
《数学分析》编写组

延边教育出版社

师范专科学校试用教材

数学分析

（下）

东北地区师专数学教材协编组
《数学分析》编写组

延边教育出版社

内 容 提 要

本书是编者根据原教育部1982年10月在昆明审订的师专数学专业教学大纲编写而成的。本书结合师专教学的实际，侧重基础理论的论述。叙述简明扼要，由浅入深，通俗易懂，范例较多，便于教学和阅读，可作为二、三年制师专数学专业试用教材，也可作高师数学专业函授教材及中学数学教师进修和各高校、成人高校有关专业学生学习的参考用书。

全书分上、中、下三册，下册内容为：多元函数微积分学与含参变量的积分。

责任编辑：徐贞淑　尹完柱

封面、插图：吕秀虎

师范专科学校试用教材

数学分析

（下）

东北地区师专数学教材协编组

《数学分析》编写组

*

延边教育出版社出版、发行

延边新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　9.125印张185千字

1987年12月第1版　1987年12月第1次印刷

ISBN　7-80509-478-0/O·9

书号：13092.12　印数：1——5,160册

定价：1.90元

目　　录

第十三章　多元函数微分学

第十四章　重积分

第十五章 曲线积分与曲面积分

第十六章 含参变量的积分

第十三章　多元函数微分学

在一元函数微分学里，我们由质点运动的瞬时速度和曲线的切线引入导数、微分等概念，并研究了应用导数和微分求函数的极值及计算近似值等方法，从而解决了在初等数学中许多难以解决的问题。

但是只研究一元函数的微分学是很不够的，由于客观实际问题十分复杂，在运动变化过程中，参与变化的量不止两个，而是有好几个，这就产生了需要涉及到多个自变量的函数——多元函数，把一元函数微分学的一些概念、定理和方法相应地推广到多元函数上来，这就是本章将要讨论的多元函数的微分学。

然而必须指明，尽管多元函数微分学是在一元函数微分学的基础上引导出来，两者之间有许多共同点，但它们也有一些差异点。因此，在学习多元函数微分学时，一定要充分注意到这些共同点和差异点，优其是差异点，这样，在分析对比中，去掌握新知识。

因为二元函数、三元函数以至一般的n元函数之间只有形式的不同，没有本质的区别，所以对多元函数微分学的讨论，为叙述方便与学习形象直观起见，便着重讲授二元函数就够了。待掌握二元函数的微分学的基本理论与方法后，读者不难把它推广到一般的多元函数上去。

§13.1 多元函数

既然研究多元函数重点放在二元函数上，而二元函数是在二维空间的平面点集上进行讨论的. 因此必须先研究平面点集的一些有关概念和性质.

一　平面点集

1. 平面点集与距离

我们将有序实数对(x,y)的集合，即

$$\{(x,y)\mid x\in \mathbf{R},\ y\in \mathbf{R}\}$$

称为二维空间，表为$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$或$\mathbf{R}^2$.

由于任意一个有序实数对(a,b)都对应着坐标平面上一个点$P(a,b)$；反之坐标平面上任意一个点$P(a,b)$都对应着一个有序实数对(a,b)，即二维空间$\mathbf{R}^2$与坐标平面上的所有点一一对应. 因此，我们认为二维空间$\mathbf{R}^2$的有序实数对与坐标平面上的点是同义的，两者不加区别. 于是可以把二维空间$\mathbf{R}^2$的子集说成是平面点集.

定义　平面上满足某个条件P的一切点构成的集合，称为二维空间$\mathbf{R}^2$中的一个**平面点集**E，简称**点集**E，记作

$$E=\{(x,y)\mid (x,y)\text{满足条件}P\}$$

例如，图13.1是以原点为心，以1为半径的圆的内部，构成一个点集，记作

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$$

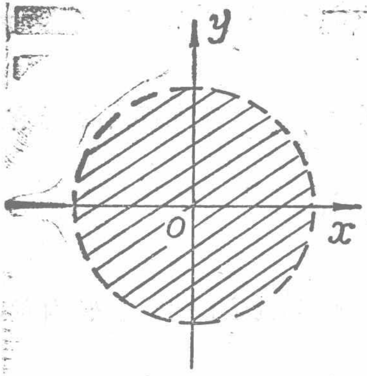

图 13.1

又如，$\{(x,0)\mid x\in\mathbf{R}\}$表示$x$轴上一切点的集．而

$$E_1=\{(x,y)\mid x>0,\ y>0\}$$

$$E_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\}$$

包含的点表示在坐标平面上，分别是图13.2(a)和图13.2(b)中带阴影的部分．其中E_1不带边界，E_2是带边界的．

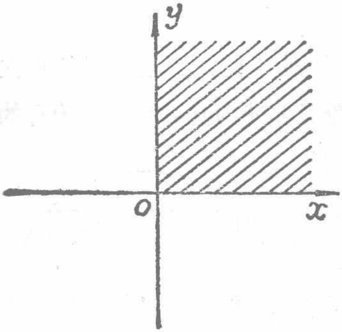

图 13.2(a)

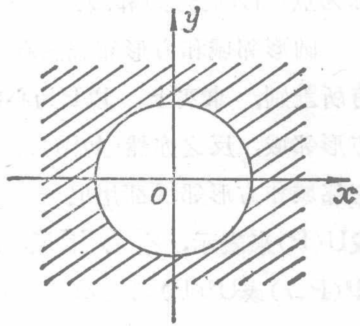

图 13.2(b)

定义 如果$P_1(x_1,y_1)$与$P_2(x_2,y_2)$是$\mathbf{R}^2$中任意两个点，那么非负数

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

称为点P_1与P_2的**距离**，表为$|P_1-P_2|$．

由平面几何知识可知，对$\mathbf{R}^2$中的任意三点P_1、P_2、P_3，它们之间的距离满足三角不等式，即

$$|P_1-P_2|\leqslant|P_1-P_3|+|P_3-P_2|$$

2. 邻域、内点及界点

1）邻域　对坐标平面上一点P(a,b)的邻域，给出下面的定义：

定义　以P(a,b)为心，以任意$r>0$为半径的圆内的所有点，即点集

$$\{(x,y)\mid\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\}$$

称为点P的r**(圆形)邻域**.

定义　以P(a,b)为心，以$2r(r>0)$为边长的正方形内的所有点，即点集

$$\{(x,y)\mid|x-a|<r,\ |y-b|<r\}$$

称为点P的r**(方形)邻域**.

圆形邻域和方形邻域没有本质上的不同，只是表示的形式有所差别．事实上，以P为心的圆形邻域内总存在以P为心的方形邻域，反之亦然(如图13.3)．圆形邻域和方形邻域都用记号U(P,r)或U(P)来表示，空心邻域用记号U^0(P,r)或U^0(P)来表示．我们还可以看到，数平面上邻域的定义，在形式上与数轴上的邻域的定义是一致的，只是因为两者所在的空间不同，一个是二维的，一个是一维的，所以，数轴上一点的邻域，是以这个点为中心的开区间，而数平面上一点的邻域，是以这点为中心的不带边界的圆盘(或正方形)．一般说，半径r较小，P的r邻域就可以用来准确表述“在P点附近”这一几何直观形象.

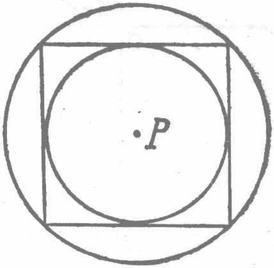

图　13.3

2）内点和界点

利用点的邻域的概念，还可以定义点集的内点和界点。

定义 设E是平面点集，P是平面上一点，

(1) 如果存在点P的某个r邻域$U(P,r)$，使$U(P,r)\subset E$，那么就说P是E的**内点**(如图13.4(a))；

(2) 如果在点P的任意邻域$U(P,r)$内，既有点属于E，同时又有点不属于E，那么就说点P是E的**界点**(如图13.4(b))。E的所有界点，称为E的**边界**。

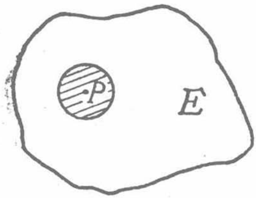

图 13.4(a)

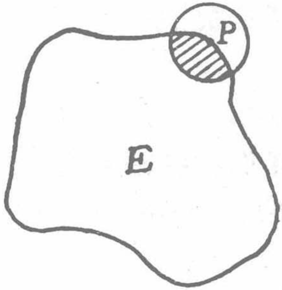

图 13.4(b)

例如，$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$是以原点为心的单位圆内部的点所构成的点集，E中任一点都是E的内点。

$F=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\}$是以原点为心的单位圆周和单位圆外部的所有点，单位圆外的任一点都是F的内点，而单位圆周上的点都是F的界点。

$G=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$是以原点为心半径分别是1与2的圆周和这两个圆周之间的圆环内部所有点，环内部的任意点都是G的内点，圆周$x^2+y^2=1$与$x^2+y^2=4$是G的边界。

3. 区域

定义 设E是平面点集

1）如果E(非空)中任意点都是内点，并且E内的任意两点都能用包含于E内的折线连接起来，那么称E是**开区域**.

2）如果E是由开区域加上它的边界所构成的点集，那么称E是**闭区域**.

例如，前面讲过的$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$是开区域；$F=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\}$和$G=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$都是闭区域.

开区域、闭区域或开区域加上它的部分界点的集合统称为**区域**。

由此可知，区域是具有连通性的，就是说，区域内的任意两点都可用完全落在该区域之内的折线连接起来。

定义 设E是一个平面点集，若存在原点O的某个邻域$U(o,r)$，使得

$$E\subset U(o,r)$$

那么称E是**有界集**(图13.5)，不是有界的集都称为**无界集**.

例如，圆$x^2+y^2\leqslant 1$是一个有界闭集，显然它也是一个有界闭区域；而$H=\{(x,y)\mid x\in R,y>0\}$则是一个无界集，显然它也是一个无界开区域.

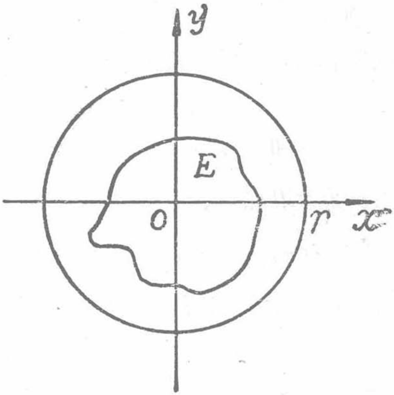

图 13.5

上述平面点集的一些概念完全可以推广到一般情况，扼要地叙述如下：

1）n个有序实数组$(x_1,x_2,\cdots\cdots,\ x_n)$的全体，即

$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_k\in\mathbf{R},\ k=1,2,\cdots,n\}$称为**$n$维空间**，表为$\mathbf{R}^n$，$\mathbf{R}^n$中任意一个有序实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示$n$维空间的一个点P，记作$P(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，其中$x_k(k=1,2,\cdots,n)$称为点P的第$k$个坐标。

2）$\mathbf{R}^n$中的任意两点$P(x_1,\ x_2,\ \cdots x_n)$与$Q(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$之间的距离定义为

$$|P-Q|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$$

$\mathbf{R}^n$中两点间的距离有下列性质：

（1）距离$d=|P-Q|\geqslant 0$，即d是非负数。

（2）$|P-Q|=0$的充要条件是$P=Q$（即$x_1=y_1,\ \ x_2=y_2,\ \cdots,\ x_k=y_k,\ \cdots,\ x_n=y_n$）。

（3）$|P-Q|=|Q-P|$。

（4）$\mathbf{R}^n$中的任意三点P_1、P_2、P_3，满足三角不等式

$$|P_1-P_2|\leqslant|P_1-P_3|+|P_3-P_2|$$

此外，$\mathbf{R}^n$中P点的r邻域记作

$$U(P,r)=\{Q\,|\,|P-Q|<r,\ Q\in\mathbf{R}^n\}$$

并可仿照平面点集的说法，用$\mathbf{R}^n$的邻域概念定义n维空间的内点、界点和边界，从而可定义n维空间的开区域、闭区域和有界区域等概念。又通常把三维空间的区域称为**体**。

二　坐标平面的连续性

为了讨论二元函数的极限与连续，需要研究坐标平面的连

续性，现将数直线的连续性推广到坐标平面上来，给出如下的一些定理：

1. 有界闭区域套定理

定理1 如果在坐标平面上有一列有界闭区域D_1，D_2，…，D_n，…，满足：

1）$D_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_n \supset \cdots$；

2）$\lim\limits_{n\to\infty} d(D_n)$①$=0$，

那么，坐标平面上存在唯一的一点P_0属于任意一个D_n（如图13.6）。

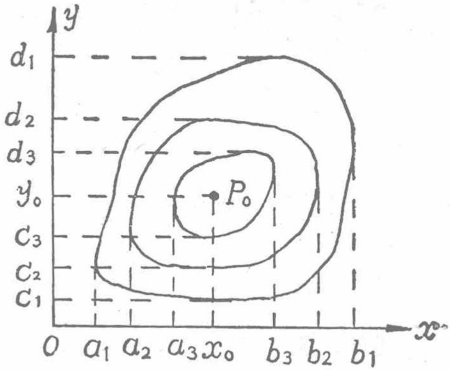

图 13.6

证法 证明这个定理的思路是：1）确定点P_0的所在，为此把有界闭区域D_n分别投影到x轴和y轴上，得到两个闭区间套，应用区间套定理分别得到x_0和y_0；2）证明$P_0(x_0, y_0)$是满足定理要求的点；3）证明P_0是唯一的。

证明 设$X_n=\{x \mid (x,y)\in D_n\}$，即$X_n$是$D_n$在$x$轴上的投影。由于$D_n$是有界闭区域，所以$X_n$是有界的，令

$$a_n=\inf X_n,\quad b_n=\sup X_n$$

显然，$a_n<b_n$，且$0<b_n-a_n<d(D_n)$。由$D_n\supset D_{n+1}$，有$X_n\supset X_{n+1}$，

①$d(D_n)$表示有界闭区域D_n的直径，即$d(D_n)=\sup\{|P-Q| \mid P, Q\in D_n\}$。例如$D_n$是矩形，其直径就是对角线的长。

即

$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$，又因为$\lim\limits_{n\to\infty}d(D_n)=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$。根据闭区间套定理，存在唯一的点$x_0\in[a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$。

同理，设$Y_n=\{y|(x,y)\in D_n\}$，即Y_n是D_n在y轴上的投影，令

$$c_n=\inf Y_n,\qquad d_n=\sup Y_n$$

则存在唯一的$y_0\in[c_n,d_n]$，$n=1,2,\cdots$。

这样，由x_0，y_0确定了一个点(x_0,y_0)。

2）现在证明点$P_0(x_0,y_0)$是要找的点，即证明$P_0(x_0,y_0)\in D_n$，$n=1,2,\cdots$。

用反证法。

假设点P_0不属于某个D_k，因为D_k是有界闭区域，所以P_0既不是D_k的内点，也不是D_k的边界点，于是必有$r>0$，使方形邻域

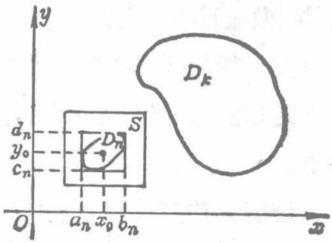

图 13.7

$S=\{(x,y)||x-x_0|<r,\ |y-y_0|<r\}$中没有$D_k$的点，如图13.7所示，$D_k$与S不相交。

已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}d_n=y_0$，所以当$n$充分大时，必有

$[a_n,b_n]\subset(x_0-r,\ x_0+r)$与$[c_n,\ d_n]\subset(y_0-r,\ y_0+r)$，

即$D_n\subset$矩形$R[a_n\leqslant x\leqslant b_n;\ c_n\leqslant y\leqslant d_n]\subset S$（如图13.7）。从而导出$D_k$与$D_n$不相交。这样就和定理给出的条件1）相矛盾，于是$P_0(x_0,y_0)$一定属于任一个$D_n$。

3）最后证明点P_0的唯一性。

如果还有一点$Q\in D_n$，$n=1, 2, \cdots$。已知P_0与Q都属于D_n，有

$$|P_0-Q|\leqslant d(D_n), \quad n=1, 2, \cdots.$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}d(D_n)=0$，故有

$$|P_0-Q|=0, \text{即} Q=P_0 \quad \square$$

2. 聚点定理

先把聚点的概念推广到平面点集上。

定义 设E是一平面点集，P是一定点(不一定属于E)。对于任意的$r>0$，点P的r邻域(圆或方)含有E的无穷个点，那么P叫做集E的一个**聚点**。

例如任何区域或闭区域的内点和边界点都是它的聚点。

定理2 如果E是一个有界的无穷点集，那么E至少有一个聚点。

证明 首先找到一点P_0，然后证明P_0就是E的一个聚点。

1）寻找满足要求的P_0点。为此设E是一个有界无穷点集，可确定一个闭正方形$D_1\supset E$；通过D_1的中心把D_1分成四个相等的正方形，其中至少有一个闭正方形D_2含有E的无穷多个点（否则E是一个有限点集）；再通过D_2的中心把D_2分成四个相等的小正形方，其中至少又有一个闭正方形D_3含有E的无穷多个点(如图13.8)。如此无限地继续下去，便得到一列闭正方形

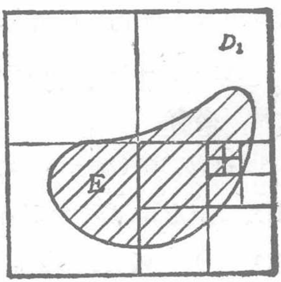

图 13,8