徐友鹏 编

概率论与数理统计

上海交通大学出版社

专科学校、业余大学及职工大学教学用书

概率论与数理统计

徐友鹏 编

上海交通大学出版社

内 容 简 介

本书内容分十章：随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、二维随机变量、大数定律与中心极限定理简介、样本及其分布、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析。每章后面均附有一定数量的习题，书末有习题答案。

本书编写时力求深入浅出、条理清晰、突出重点、通俗易懂、联系实际，便于学生掌握和自学。

本书适用于专科学校、业余大学和职工大学的学生，可作为上述学校的教材，也可供工程技术人员及企业或经济管理人员参考之用。

概率论与数理统计

上海交通大学出版社出版

（淮海中路1984弄19号）

新华书店上海发行所发行

常熟市印刷二厂印装

开本787×1092毫米 1/32 印张9.375 字数206000

1987年12月第1版 1988年2月第1次印刷

印数：1—18000

ISBN7—313—00071—5/TB1 科技书目：161—292

定价：2.25元

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，它发展迅速、应用广泛。目前，概率统计无论对工程技术人员，还是对企业或经济管理人员，都愈来愈成为他们必备的数学工具。很多专科学校、业余大学与职工大学都已把概率统计列为必修课程。然而，目前适合上述学校学生学习的概率统计教材还为数不多。

本书是在我校自编《概率论与数理统计》讲义的基础上，参照原机械工业部专科学校数学协作组 1984 年制订的《工程数学教学大纲》及上海市高等工业专科学校数学协作组 1986 年制订的《概率论与数理统计课程教学基本要求》编写而成。

本书在编写过程中注意到了以下几个方面：

(1) 本书适用的对象是专科学校、业余大学与职工大学的学生，也可供工程技术人员及企业或经济管理人员参考之用；

(2) 本书教学时数约需50～60学时。少学时的专业可删去打星号的内容，必要时也可删去第四章(二维随机变量)，这对以后学习数理统计部分的内容影响不大。作为一种弥补，教材§2-5 中对随机变量的独立性作了简要的介绍；

(3) 考虑到上述学校注重应用的特点，教材在内容的安排和概念的引入等方面都尽可能联系直观背景；

(4) 针对上述学校学生的特点，本书在照顾到必要的系统性的前提下，以基本概念和基本运算为主，不追求过深的数学

理论。文字通俗易懂，深入浅出，突出重点，便于自学，并注意联系实际。在例题、习题的配备上，注意到难易适中、份量适当。

本书由上海交通大学工业管理工程系主任黄洁纲教授主审。在编写过程中，得到了上海机械专科学校数学教研室同志们的帮助，其中王绍智副教授审阅了全稿，并提出了宝贵意见。在此，向他们表示衷心的感谢。

编　者

1986年12月

目　录

第一章 随机事件及其概率

在生产实践、科学实验和日常生活中，我们会遇到各种各样的现象。有一类现象，在一定的条件下必然会发生（或必然不会发生）。例如：

（1）在标准大气压下，纯水加热到100℃必然沸腾；

（2）导体通电必然发热；

（3）从100个全是正品的产品中抽检一个产品，必然得正品。

这种在一定条件下必然会发生（或必然不会发生）的现象称为**确定性现象**。

还有一类现象，在一定的条件下可能发生也可能不发生。例如：

（1）抛一枚硬币，可能出现正面（国徽朝上），也可能出现反面（币值朝上）；

（2）从一批含一定数量次品的产品中任意抽取4件检验，所得次品数可能是0，也可能是1，2，3或4；

（3）掷一粒骰子，出现的点数可能是1，2，3，4，5，6中的某一个；

（4）某电话总机在某一段时间间隔内接到的呼唤次数可能是0，1，2，3，…（一切非负整数）中的一个；

（5）日光灯的使用寿命可能是任意的非负实数。

这种在一定条件下具有多种可能结果，究竟发生哪种结果事先无法确定的现象，称为**随机现象**。

人们经过长期实践并深入研究之后，发现随机现象虽然就每次试验或观测来说具有不确定性，但在大量重复试验或观测下，它的结果却呈现出某种规律性。例如：在相同的条件下，多次重复抛一枚硬币，出现正面或反面的次数大致相等；对同一批产品进行大量重复抽样检查，可以观测到该产品的次品率，等等。这种在大量重复试验或观测中所呈现的规律性，称为**统计规律性**。概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的数学学科，是近代数学的重要组成部分。

概率统计起源于17世纪，并于19世纪末随着大工业生产和自然科学的发展而蓬勃发展起来。到了20世纪30年代，由于概率论公理系统的建立，使得概率统计的发展进入了新的阶段，理论上不断完善，应用上日益广泛和深入。目前，概率统计的应用，已几乎遍及所有科学技术领域和国民经济的各个部门之中。

§1-1 随机事件

一、随机试验

人们是通过试验去研究随机现象的。在概率论中，**试验**作为一种广泛的术语，它包括各种各样的科学实验，甚至对某一事物的某个特征的观测也可以认为是一种试验。下面我们举例来加以说明。

例1 抛一枚硬币，观察正面、反面出现的情况。

例2 从一批含一定数量的次品的产品中任意抽取4件，检查次品的个数。

例3 掷一粒骰子，观察出现的点数。

例 4 在某一段时间间隔内，记录某电话总机接到的呼唤次数。

例 5 在一批日光灯中任意抽取 1 只，测试其寿命。

上面我们举了五个关于试验的例子，这些试验具有以下两个共同特点：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，究竟出现哪个结果，在试验之前无法预知。

在概率论中，我们把具有上述两个特点的试验叫做**随机试验**，简称**试验**，用记号 E 来表示。我们可以将例 1 中的试验记为 E_1，例 2 中的试验记为 E_2，…。

二、随机事件的概念

1. 随机事件

在随机试验中，可能发生也可能不发生的事情，叫做**随机事件**，简称**事件**。事件通常用大写拉丁字母 A、B、… 表示。例如，在抛硬币试验中，“出现正面”是随机事件；在掷骰子试验中，“出现 2 点”、“出现偶数点”也都是随机事件；在 100 件产品中，有 10 件是次品，90 件是正品，如果从中任取一件，则“取到正品”与“取到次品”都是随机事件。

2. 基本事件

在一随机试验中，它的每一个可能出现的结果都是一个随机事件，它们是这个试验的最简单的随机事件。我们称这些简单的随机事件为**基本事件**。

例如，在抛硬币试验中的“出现正面”与“出现反面”；掷骰子试验中的“出现 1 点”、“出现 2 点”、…、“出现 6 点”等等都

是基本事件。

我们把能够分解为两个或多个基本事件的随机事件，叫做**复合事件**。

例如，在掷骰子试验中，“出现偶数点”这一事件是复合事件，因为它可以分解为：“出现 2 点”、“出现 4 点”及“出现 6 点”这样三个基本事件。

3．必然事件与不可能事件

在随机试验中，必然会发生的事件叫做**必然事件**；不可能发生的事件叫做**不可能事件**。

例如，在掷骰子试验中，“点数不大于 6 ”是必然事件；“点数大于 6 ”是不可能事件。

从本质上讲，必然事件与不可能事件都不是随机事件，但我们还是把它们当作特殊的随机事件，这对今后分析问题和解决问题是有好处的。

必然事件与不可能事件通常分别用字母 S 和 ϕ 表示。

三、样 本 空 间

为了描述一个随机现象，就得通过随机试验考察随机现象的各种可能发生的结果。

我们把随机试验 E 的一切可能发生的试验结果所组成的集合，叫做试验 E 的**样本空间**，记为 S。S 中的元素就是试验 E 的基本事件。基本事件也称为**样本点**。

如果用 S_1、S_2、…、S_5 分别表示例 1、例 2、…、例 5 中随机试验的样本空间，那末

$$S_1 = \{出现正面，出现反面\};$$

$$S_2 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\};$$

$$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$
$$S_4 = \{0, 1, 2, \cdots\};$$
$$S_5 = \{t \mid 0 \leqslant t < +\infty\}。$$

一个随机试验的样本空间可以是有限集（如S_1），也可以是可数集(如S_4)，也可以是不可数集(如S_5)。认识一个随机现象，很重要的一点是要搞清楚其样本空间是什么。

引进了样本空间的概念后，我们就可以从集合论的角度来描述随机事件。例如：

在掷骰子试验中，事件A_1："出现偶数点"，即
$$A_1 = \{2, 4, 6\};$$
在抽检产品的试验中，事件A_2："次品数小于2"，即
$$A_2 = \{0, 1, 2\};$$
在日光灯的寿命试验中，事件A_3："寿命不低于1000小时"，即
$$A_3 = \{t \mid t \geqslant 1000\}。$$

由上述例子我们可以知道：随机试验E的任意一个事件都是其样本空间S的子集，它是由一个或若干个基本事件组成。这时，事件发生，当且仅当这个子集中的一个基本事件发生。此外，我们还应知道：必然事件就是样本空间S；不可能事件就是空集ϕ。

四、事件之间的关系及运算

在客观世界里，同一随机试验中的许多事件，往往存在着一定的关系。对于事件之间相互关系的研究，将有助于我们去认识和分析比较复杂的事件。下面，我们来介绍事件之间的关系及运算。

1．包含关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，或称事件 A **包含于**事件 B，记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$。例如：

在掷骰子试验中，设事件 A 表示“出现偶数点”，事件 B 表示“不少于 2 点”，则 $B \supset A$。

2．相等关系

如果事件 $A \supset B$，并且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B **相等**，记作 $A = B$。例如：

在掷骰子试验中，事件“出现偶数点”与事件“不出现奇数点”，便是两个相等的事件。

3．事件的和

“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”这一事件称为事件 A 与事件 B **的和**，记作 $A \cup B$。

以抽检产品的试验为例，设事件 A 表示“$2 \leqslant$ 次品数 $\leqslant 4$”，事件 B 表示“$1 \leqslant$ 次品数 $\leqslant 3$”，那末

$A \cup B$ 表示事件“$1 \leqslant$ 次品数 $\leqslant 4$”。

从它们所包含的基本事件来看：

$A = \{2, 3, 4\}$，$B = \{1, 2, 3\}$，而 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$。可见，$A \cup B$ 所包含的基本事件是 A 与 B 所含的基本事件的全部（重复的只算一次）。

一般来说，“事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生”这一事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和，记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ $\left(简记为 \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right)$；“事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生”这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和，记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$

(简记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$)。

4．事件的积

"事件A与事件B同时发生"这一事件称为事件A与事件B的**积**，记作$A\cap B$，简记为AB。事件AB是由事件A与B的所有公共的基本事件所组成的。

我们仍以抽检产品的试验为例，并设

A="$2\leqslant$次品数$\leqslant 4$"，B="$1\leqslant$次品数$\leqslant 3$"，那末AB="$2\leqslant$次品数$\leqslant 3$"。

类似地，可以定义"事件A_1，A_2，…，A_n同时发生"这一事件为事件A_1，A_2，…，A_n的积，记作$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$或$A_1A_2\cdots A_n$ (简记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$)；还可以定义"事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$…同时发生"这一事件为事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…的积，记作$A_1\cap A_2\cap\cdots A_n\cap\cdots$或$A_1A_2\cdots A_n\cdots$ (简记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$)。

5．事件的差

"事件A发生而事件B不发生"这一事件称为事件A与B的**差**，记作$A-B$。

6．事件的互不相容

如果两个事件A与B在一次试验中不可能同时发生，即

$$AB=\phi,$$

则称事件A与B**互不相容**(或**互斥**)。

如果n个事件A_1，A_2，…，A_n中任意两个事件都不可能同时发生，即

$$A_iA_j=\phi(1\leqslant i<j\leqslant n),$$

则称这n个事件是**互不相容**的(或**互斥**的)。

显然，对于一个随机试验来说，它的各个基本事件之间是互不相容的。

7. 事件的对立

在一次试验中，若事件A与B中必然有一个发生，且仅有一个发生，即

$$A \cup B = S, \quad AB = \phi,$$

则称事件A与事件B**对立(或互逆)**，并称事件B是A的**对立事件(或逆事件)**，同样，A也是B的对立事件(或逆事件)，记作

$$B = \overline{A} \text{或} A = \overline{B}。$$

例如，在掷骰子试验中，事件A："出现偶数点"＝{2，4，6}的对立事件是$\overline{A}$："出现奇数点"＝{1，3，5}；事件B："点数不小于3"＝{3，4，5，6}的对立事件是$\overline{B}$："点数小于3"＝{1，2}。

从这个例子可以看到：

事件A的对立事件$\overline{A}$是由样本空间S中的一切不属于A的基本事件所组成的，即$\overline{A} = S - A$。

根据对立事件的定义，显然有：

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad \overline{S} = \phi, \quad A \cup \overline{A} = S。$$

以上事件的各种关系可用图1-1表示。

从上面的讨论可以看到，概率论中事件之间的关系与集合论中集合之间的关系是一致的。

随机事件的运算也和集合的运算一样，满足以下规律：

(1) 交换律

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$

(2) 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

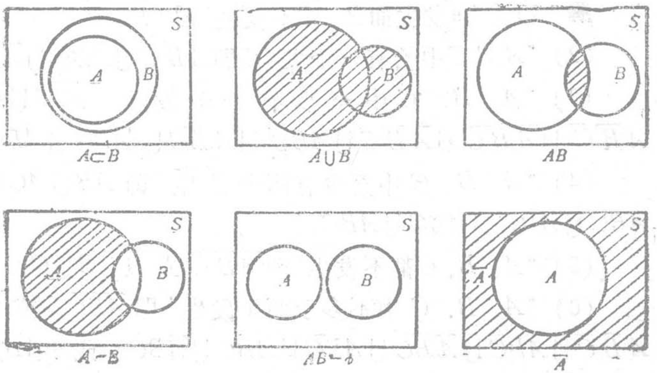

图 1-1

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

(3) 分配律

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C);$$

(4) 对偶律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}。$$

例6　设 A、B、C 是三个事件，试用 A、B、C 表示下列事件：

(1) "A 发生而 B、C 不发生"；

(2) "A、B、C 中恰有一个发生"；

(3) "A、B、C 中至少有一个发生"；

(4) "A、B、C 中至少有两个发生"；

(5) "A、B、C 都不发生"；

(6) "A、B、C 中不多于两个发生"。