高 等 数 学 教 程

GAODENG SHUXUE JIAOCHENG

第 一 卷

В. И. 斯米尔諾夫著
孙 念 增 譯

(修 訂 本)

人 民 教 育 出 版 社

本书第一卷原系根据1952年苏联国立技术理论书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的斯米尔诺夫(В. И. Смирнов)著"高等数学教程"(Курс высшей математики)第一卷第十一版译出，这次是按原书十六版修订的。

本书可作为我国综合大学，高等师范院校数学类、物理类各专业高等数学课程的参考书，也可供高等工业院校有关专业参考。

简装本说明

目前850×1168毫米规格纸张较少，本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷，定价相应减少20%。希鉴谅。

高 等 数 学 教 程

第 一 卷

В. И. 斯米尔诺夫著

孙 念 增 译

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

湖北省新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号13012·0328　开本787×1092 1/32　印张15

字数386,000　印数127,001—227,000　定价1.12元

1952年10月第1卷第1分册商务初版

1952年11月第1卷第2分册商务初版

1956年7月合订本第1版　1959年1月第2版

1979年4月湖北第16次印刷

原書第八版序

这一版与以前各版有着極其重大的区别，書中已删去了关于解析几何学的材料，因此也就不得不把其余的材料重加編排。特别是以前在这一卷中所講的关于微分学在几何上的应用，已完全收集在第二章§7里。其次，在第一卷里还安放了專講复数，多項式的主要性質，以及系統的函数积分法的一章；以前这是第二卷的第一章。

这里不談本書講述方面細微的补充和修改，只指出一些重要的增补。鑒于在各卷里必須碰到近代分析学中相当微妙而且复杂的問題，我們認为，在第一章§2末講極限論之后，講述了无理数理論以及这理論在証明極限存在准則与連續函数性質时的应用，乃是有用处的。就在那里，我們引入了初等函数的严格定义及其性質的討論。在專講多元函数的第五章中，我們引入了隐函数存在的証明。

本書的講述是这样安排的，使得大号字体的部分可以独立地閱讀。放在小号字体里的有各种举例，有某些个别的补充問題，还有我們在上面提到的种种理論材料，而第四章的最后几段則又含有性質比較复杂的补充理論材料。

菲赫金哥尔茨教授对本書的講述方面給我提了許多宝貴的意見，这些意見我已經在最后定稿时加以利用。我認为向他表示深切的感謝是自己愉快的义务。

B. 斯米尔諾夫

原書第十六版序

这一版主要正文与全書整个編排仍然沒有变更，但在講述方面作了一些修改，以求其更趋于严密与完备，特别是有关微积分学在几何的应用問題上。

B. 斯米尔諾夫

第一卷目次

第一章　函数关系与極限論

§1. 变量 ……………………………………………………………………… 1

1. 量及其測量(1)　2. 数(1)　3. 常量与变量(4)　4. 区間(4)　5. 函数概念(5)　6. 表示函数关系的分析法(7)　7. 隐函数(9)　8. 列表法(9)　9. 数的圖示法(10)　10. 坐标(12)　11. 圖形与曲綫方程(13)　12. 綫性函数(15)　13. 改变量。綫性函数的基本性質(16)　14. 等速运动的圖形(18)　15. 經驗公式(19)　16. 二次拋物綫(20)　17. 三次拋物綫(23)　18. 反比定律(24)　19. 冪函数(26)　20. 反函数(29)　21. 函数的多值性(30)　22. 指数函数与对数函数(33)　23. 三角函数(35)　24. 反三角函数(或圓函数)(39)

§2. 極限論。連續函数 ……………………………………………………… 41

25. 有序变量(41)　26. 无穷小量(42)　27. 变量的極限(47)　28. 基本定理(50)　29. 无穷大量(53)　30. 單調变量(54)　31. 極限存在的勾犀判別法(56)　32. 有函数关系的两个变量的同时变化(59)　33. 例(63)　34. 函数的連續性(65)　35. 連續函数的性質(67)　36. 无穷小量的比較,无穷大量的比較(71)　37. 例(72)　38. 数 e (73)　39. 未証明的命題(78)　40. 实数(79)　41. 实数的运算(82)　42. 数集的确界,極限存在的判別法(85)　43. 連續函数的性質(86)　44. 初等函数的連續性(89)

第二章　导数概念及其应用

§3. 一阶导数与一阶微分 …………………………………………………… 94

45. 导数概念(94)　46. 导数的几何意义(96)　47. 簡單函数的导数(98)　48. 复合函数与反函数的导数(101)　49. 导数公式表与例題(106)　50. 微分概念(108)　51. 几个微分方程(111)　52. 誤差的估計(113)

§4. 高阶导数与高阶微分 …………………………………………………… 114

53. 高阶导数(114)　54. 二阶导数的力学意义(117)　55. 高阶微分(118)　56. 函数的差分(119)

§5. 应用导数概念研究函数 ………………………………………………… 121

57. 函数增減性的判別法(121)　58. 函数的極大值与極小值(125)　59. 作圖(131)　60. 函数的最大值与最小值(134)　61. 費尔馬定理(140)　62. 罗尔定理(141)　63. 拉格朗日公式(142)　64. 勾犀公式(145)　65. 定未定式(146)　66. 未定式的各种类型(148)

§ 6. 二元函数 ……………………………………………………………………151

67. 基本概念(151) 68. 二元函数的偏导数与全微分(153) 69. 复合函数与隐函数的导数(156)

§ 7. 导数概念的几何应用 ……………………………………………………157

70. 弧的微分(157) 71. 凸性,凹性与曲率(159) 72. 渐近綫(162) 73. 作圖(165) 74. 曲綫的参变式(167) 75. 范·德·瓦尔方程(171) 76. 曲綫的奇点(173) 77. 曲綫的綫素(177) 78. 悬鏈綫(179) 79. 旋輪綫(180) 80. 圓外旋輪綫与圓内旋輪綫(182) 81. 圓的漸伸綫(185) 82. 極坐标曲綫(186) 83. 螺綫(188) 84. 蚶綫与心臟綫(190) 85. 卡西尼卵形綫与双紐綫(192)

第三章 积分概念及其应用

§ 8. 积分学的基本問題与不定积分 ……………………………………………194

86. 不定积分概念(194) 87. 定积分为和的極限(197) 88. 定积分与不定积分的連系(203) 89. 不定积分的性質(207) 90. 最簡积分表(209) 91. 分部积分法則(209) 92. 换元法則。例(211) 93. 一阶微分方程的例(215)

§ 9. 定积分的性質 ……………………………………………………………218

94. 定积分的基本性質(218) 95. 中值定理(221) 96. 原函数的存在性(224) 97. 間断的被积函数(226) 98. 无穷限(229) 99. 定积分的换元法則(231) 100. 分部积分法則(233)

§ 10. 定积分概念的应用 ………………………………………………………235

101. 面积的計算(235) 102. 扇形的面积(238) 103. 弧長(240) 104. 利用横断面計算体积法(247) 105. 迴轉体的体积(249) 106. 迴轉体的側面积(250) 107. 重心的确定。古鲁金定理(253) 108. 定积分的近似計算;矩形公式与梯形公式(258) 109. 切綫公式与波恩賽公式(259) 110. 辛卜森公式(260) 111. 上限为变量的定积分之計算法(265) 112. 作圖法(267) 113. 摆动很密的曲綫下之面积(269)

§ 11. 关于定积分的补充知識 …………………………………………………270

114. 补充概念(270) 115. 达尔补定理(272) 116. 黎曼意义下的可积函数(277) 117. 可积函数的性質(281)

第四章 級数及其在近似計算中的应用

§ 12. 无穷級数理論的基本概念 …………………………………………………285

118. 无穷級数的概念(285) 119. 无穷級数的基本性質(287) 120. 正項級数。收斂性的判别法(289) 121. 勾犀判别法与达朗倍尔判别法(291) 122 勾犀积分判别法(294) 123. 交錯級数(297) 124. 絕对收斂級数(299) 125. 收斂性的一般判别法(301)

§ 13. 泰勒公式及其应用 ………………………………………………………302

126. 泰勒公式(302) 127. 泰勒公式的其他形状(306) 128. 泰勒級数与麦克劳林級数(307) 129. e^x 的展开式(308) 130. $\sin x$ 与 $\cos x$ 的展开式(310) 131. 牛頓二項式(312) 132. $\log(1+x)$的展开式(318) 133. $\operatorname{arc\,tg} x$ 的展开式(322) 134. 近似公式(325) 135. 極大值,極小值与扭轉点(326) 136. 定未定式(328)

§14. 級数理論的补充知識 ……330

137. 絕对收斂級数的性質(330) 138. 絕对收斂級数的乘法(332) 139. 枯莫尔判別法(333) 140. 高斯判別法(335) 141. 超越几何級数(337) 142. 二重級数(339) 143. 变項級数。一致收斂級数(344) 144. 一致收斂函数序列(347) 145. 一致收斂序列的性質(349) 146. 一致收斂級数的性質(352) 147. 一致收斂的判別法(353) 148. 冪級数。收斂半徑(356) 149. 亞貝尔第二定理(357) 150. 冪級数的微分法与积分法(358)

第五章 多元函数

§15. 函数的导数与微分 ……362

151. 基本概念(362) 152. 关于極限的取法(363) 153. 一阶偏导数与全微分(366) 154. 尤拉定理(368) 155. 高阶偏导数(369) 156. 高阶微分(371) 157. 隐函数(374) 158. 例(375) 159. 隐函数的存在性(377) 160. 空間曲綫与曲面(379)

§16. 泰勒公式。多元函数的極大值与極小值 ……382

161. 泰勒公式推广到多元函数的情形(382) 162. 函数的極大值与極小值的必要条件(384) 163. 二元函数極大值与極小值的討論(385) 164. 例(389) 165. 关于求函数的極大值与極小值的补充知識(391) 166. 函数的最大值与最小值(392) 167. 相对極大值与極小值(393) 168. 补充知識(396) 169. 例(399)

第六章 复数,高等代数初步与函数的积分法

§17. 复数 ……402

170. 复数(402) 171. 复数加减法(405) 172. 复数乘法(406) 173. 复数除法(408) 174. 乘方(409) 175. 开方(412) 176. 指数函数(414) 177. 三角函数与双曲綫函数(416) 178. 悬鏈綫(420) 179. 对数(425) 180. 正弦量与矢量圖(426) 181. 例(428) 182. 曲綫的复数式(431) 183. 諧和振动的复数式表示法(434)

§18. 多項式的基本性質及其根的計算 ……435

184. 代数方程(435) 185. 多項式的因式分解(436) 186. 重根(438) 187. 和那氏法則(440) 188. 最高公因式(443) 189. 实多項式(444) 190. 方程的根与系数的关系(445) 191. 三次方程(446) 192. 三次方程的解的三角式(449) 193. 反复法(452) 194. 牛頓法(456) 195. 簡單插补法(457)

§ 19. 函数的积分法 ……………………………………………………………………459

196. 有理分式的部分分式(459) **197** 有理分式的积分法(461) **198.** 含有根式表达式的积分(464) **199.** $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ 型的积分(465) **200.** $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ 型的积分(468) **201.** $\int e^{ax}[P(x)\cos bx+Q(x)\sin bx]dx$ 型的积分(470)

第一章 函数关系与極限論

§1. 变量

1. 量及其測量 在精确自然科学中，数学分析具有基本重要性。其他每門科学只着重于研究我們周圍世界的某些特定方面，而数学所要探討的，則是可供科学研究的一切現象所固有的最一般性質。

量及其測量的概念是基本概念之一。量的特性就在于它可以被測量，也就是，可以用某种方法，与取作單位量的同类某特定量来作比較。比較的方法隨着所論量的性質而定，而这比較的步驟則叫做測量。測量的結果得出抽象的数，它表示所論量与單位量之比。

任何自然規律都告訴我們量之間的关系，或者更确切地說，都給出表示这些量的諸数之間的关系。数学研究的对象也正就是数以及数之間的各种关系，而不管引出这些数与这关系的那些量或規律的具体性質是什么。

因此，每个量都有測量它的抽象数与之对应。但这抽象数完全要取决于所选的單位量或尺度。單位量增大，用以測定所給量的那个数就減小，反之，用較小的單位，就得到較大的数。

选擇尺度要看所論量的性質与測量时的情况而定。在測量同一类量的时候，尺度的大小也可在很大的范圍內变动，——以測量長度为例，在精确的光学研究中，用一埃之長（一毫米的千万分之一，10^{-10}m）作單位；而在天文学中普遍用的長度單位叫做光年，就是一年內光所經过的距离（一秒鐘光大約走 300000 km）。

2. 数 測量結果得到的数，可以是整数（若考慮的量是單位量的

整数倍），分数（若存在另一新單位，被測量的量与原單位量都是新單位量的整数倍，——簡單地說，就是被測量的量与單位量可以通約），以及无理数（上述的公共單位不存在时，就是被測量的量与單位量不可以通約）。

例如，在初等几何学中証明了，正方形的对角綫与它的边長不可以通約，所以若我們用边長作單位，来測量正方形的对角綫，則所得的数 $\sqrt{2}$ 是无理数。用直徑長作單位，測量圓周的長，所得的数 π 也是无理数。

为要弄淸楚无理数的概念，可以应用十进制小数。由算术知道，任一有理数可以表示成有限位小数或循环无穷位小数（純循环或混循环）的形式。例如，由十进制除法法則，用分母除分子，我們得到：

$$\frac{5}{33}=0.151515\cdots=0.(15)。$$

$$\frac{5}{18}=0.2777\cdots=0.2(7)。$$

反之，由算术我們也知道任一十进制循环小数表示一个有理数。

測量与所用單位量不可以通約的量时，我們可以先計算被測量的量包含若干單位量，再看剩余的量包含若干个十分之一的單位量，再看新的剩余量包含若干个百分之一的單位量，如此繼續作下去。用这方法測量与單位量不可以通約的量时，就作成一个不循环的无穷位小数。任一无理数对应一个这样的无穷位小数；反之，任一不循环的无穷位小数对应一个无理数。若在这个无穷位小数中只取前几位，則得到所对应无理数的一个較小的近似値。例如，用普通法則开平方到三位小数，得到：

$$\sqrt{2}=1.414\cdots。$$

数 1.414 与 1.415 就各是 $\sqrt{2}$ 的，准确到千分之一的，較小的与較大的近似値。

利用十进制小数，可以比較无理数彼此之間的大小，以及无理数与

有理数之間的大小。

在很多場合，必須考慮帶有不同正負号的量（温度高于或低于零度，直綫运动中正的或負的速度等等）。这样的量分别用正数或負数来表达。若 a 及 b 是正数，而 $a>b$，则 $-a<-b$。任一正数或零必大于任一負数。如此全部有理数与无理数按大小排列成一定的順序。所有这些数組成实数集合。

注意，在用十进制小数表示实数时，我們可用循环节是 9 的无穷位小数来替代任一有限位小数。例如，$3.16=3.1599\cdots$。若不用有限位小数，则实数与无穷位小数恰好成一一对应，就是任一实数对应一个确定的无穷位小数，而任一无穷位小数对应一个确定的实数。負数对应冠有負号的无穷位小数。

在实数范圍內，除去用零除以外，四种演算都可以实行。任一实数的奇次根永远有一个确定的值。正实数的偶次根有两个值，只是符号相反。負实数的偶次根，在实数范圍內沒有意义。至于实数以及它們的演算的严格理論，在[**40**]的小号字中再講。

将表达一个已知量的数，取 + 号，叫做这个量的算术值或絕对值。一个数 a 所表达的量的絕对值，也可以說是这个数 a 的絕对值，記作 $|a|$。如此，我們就有：

$$\text{若 } a \text{ 是正数，} \qquad |a|=a;$$

$$\text{若 } a \text{ 是負数，} \qquad |a|=-a。$$

不难証明，和的絕对值 $|a+b|$，仅当 a 与 b 同号时，与各項絕对值的和 $|a|+|b|$ 相等；否則 $|a+b|$ 較小；所以

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|。$$

例如，$+3$ 与 -7 的和的絕对值等于 4，而各項絕对值的和是 10。

同样可証，

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|,$$

上式中設 $|a|\geqslant|b|$。

积的絕对值等于各因数絕对值的积，商的絕对值等于除数的绝对值除被除数的絕对值之商

$$|abc|=|a|\cdot|b|\cdot|c|,\quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}。$$

3. 常量与变量 数学中所討論的量分为二类：常量与变量。在給定的問題中，不变的，保持一个值的量叫做常量；在給定的問題中，由于某种緣故，取不同值的量叫做变量。

由这定义显見，常量与变量的概念，要看現象是在什么情况下来研究的。同一的量，在某种情况下可以認为是常量；而在別的情况下，就可能是变量。

例如，測量物体的重量时，要認清，称量是在地球表面上同一地方举行，还是在不同的地方举行；若在同一地方称量，则确定重量的重力加速度是常量，于是各种物体間的不同重量只与它們的質量有关；若在不同的地方称量，則因为重力加速度依賴于地球轉动的离心力，就不能把它算做常量；据此，設称量时不用杠杆做的秤，而用彈簧秤，則同一物体在赤道上比在两極輕些。

同样，在較粗略的技术計算中，一个樞軸的長度可以算作是不变的量；若比較精确些，当必須考慮到温度变化的作用时，樞軸的長度就成了变量，自然，全部計算也就大为复杂了。

4. 区間 測量变量时，有很多不同情况。有的变量可以取任一实数值，沒有任何限制（例如，由一定时刻开始計算，时間 t 可取任一实数值，可正可負）；有的只取限于某一不等式的值（例如，絕对温度 T°，須 $>-273°C$）；还有的变量只能取某些值，而不能任意取值（如只取整数——某城居民数，定积气体內分子数——或只取有理数等）。

我們講几种在理論研究与实际应用中，測量变量时最常見的情况。

a, b 为二已知实数，若变量 x 可以取适合条件 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全部的实数值，則說 x 在区間 $[a,b]$ 上变化。这种包含两端的区間，常叫做閉

区間。若变量 x 能取区間 (a, b) 中，除两端外，全部的数值，即 $a<x<b$，則說 x 在区間 (a, b) 內变化。这种不含两端的区間叫做开区間。此外，x 变化的范圍也可能是一端閉一端开的区間：$a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$。

若 x 的变化范圍，由不等式 $a\leqslant x$ 确定，則說 x 在一个左端閉右端开的区間 $[a, +\infty)$ 上变化。同样的，对不等式 $x\leqslant b$，我們有左端开右端閉的区間 $(-\infty, b]$。若 x 可以取任一实数值，則說 x 在一个两端开的区間 $(-\infty, +\infty)$ 上变化。

5. 函数概念 在实际問題中，要考虑的常常不仅是一个变量，而是同时有几个变量。

例如，就一公斤的空气来講，确定它的情况的变量，就有它所受的压力 $p(\mathrm{kg/m^2})$，所占的容积 $v(\mathrm{m^3})$，以及它的溫度 $t°\mathrm{C}$。現在假設空气的溫度保持在 $0°\mathrm{C}$；t 就是个常量，等于 0，只剩下 p 与 v 两个变量。若改变压力 p，則容积 v 也被改变，例如若空气被压縮，則容积减小。在这里，我們可以随意改变压力 p（至少在技术許可的范圍內），所以我們把 p 叫做自变量；显然，对每一个压力的值，气体应占有一个完全确定的容积；于是应該有一个定律，用这定律，对每一个 p 的值，可以找到对应于它的 v 的值。这就是著名的波义耳—馬瑞特定律。它說，气体，当溫度不变时，容积与压力成反比。

应用这定律到一公斤的空气上，可求得 v 与 p 之間的关系如方程

$$v=\frac{273\times 29.27}{p}.$$

在这情形下，变量 v 叫做自变量 p 的函数。

由这个特例推广，理論上講，我們可以說，自变量的特性就是：有一个它可能取的值的集合，在这个集合中我們可以随意为它选擇任何一个值。例如自变量 x 的值的集合，可能是某个区間 (a, b) 或是这区間的內部，就是自变量 x 能取滿足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 或 $a<x<b$ 的任意一

个值。也有时 x 可以取任一整数值。上述例中，p 起着自变量的作用，而 v 是 p 的函数。現在給函数一个理論的定义。

定义 若对于自变量 x 的任何一个确定的值（在可能取的值的集合內），对应的量 y 有确定的值，y 就叫做自变量 x 的函数。

若 y 是 x 的函数，确定于区間 (a, b) 上，則对于 x 在这区間上的任何一个值，对应的 y 有确定的值。

两个量中，x 或 y 那个算作自变量，常是看怎样方便。上例中我們也可以随意改变容积 v，每次都确定一个压力 p，因此我們可把 v 算作自变量而把压力 p 看作 v 的函数。由上面的方程解 p，就得到由自变量 v 表达函数 p 的公式：

$$p=\frac{273\times 29.27}{v}。$$

上面关于两个变量的叙述，不难推广到随便几个变量的情形，并且我們可以分别出自变量与因变量或函数。

回到我們的例，假設温度不总是 0°C，而是可以变的。波义耳—馬瑞特定律就应当换成較复杂的克拉波朗关系式：

$$pv=29.27(273+T),$$

这里指出，研究气体的状态时，p，v 与 T 中只有两个可以随意改变，若是給定了两个的值則第三个的值就完全确定了。例如若取 p 与 T 作自变量，v 就是它們的函数：

$$v=\frac{29.27(273+T)}{p},$$

或者把 v 与 T 算作自变量，p 就是它們的函数。

看另一个例，由三角形的边長 a，b，c 表达面积 S，有公式

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 p 是三角形的半周

$$p=\frac{a+b+c}{2}。$$

三边 a, b, c 可以随意改变，只須每边大于其余两边之差而小于其和。如此变量 a, b, c 是限于不等式的自变量，而 S 是它們的函数。

我們也可以随意取三角形的两个边，如 a, b, 与面积 S；应用公式

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,$$

求 a, b 两边的夹角 C，这里 a, b, S 是自变量，C 是函数。而 a, b, S 应該限于不等式

$$\sin C=\frac{2S}{ab}\leqslant 1。$$

注意，在这例中，我們得到 C 的两个值。因为 C 可以取作一个銳角或是一个鈍角，都可能使

$$\sin C=\frac{2S}{ab}。$$

这里我們得到多值函数的概念，它的詳細情形以后再講。

6. 表示函数关系的分析法 任一自然律，給出一个現象与另一个現象的关系，于是建立一个量与量之間的函数关系。

函数关系的表示法很多，最重要的有三种：(1) 分析法；(2) 列表法；(3) 圖示法或几何法。

如果一个量与量之間的函数关系，用一个含有这些量与各种数学演算（如加，減，乘，除，取对数等。）的方程来表示，我們說这是用分析法表示函数。作理論研究时，总是用分析法表示函数，亦卽，在建立基本前提之后，利用数学分析得出結果来，这結果是个数学公式的形式；以天体力学为例，在各种运动中，它們的位置与相互的作用都是由一个基本定律——万有引力定律——得来的。

若某函数（卽因变量）可以由自变量通过数学演算来直接表达，则叫做显函数。显函数的例子，有如定溫下，用压力 p 作自变量，气体容积 v 的表达式（一元显函数）：

$$v=\frac{273\times 29.27}{p}。$$

或用边長作自变量,三角形面积 S 的表达式(三元显函数):

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}。$$

再如

$$y=2x^2-3x+7 \tag{1}$$

是一个自变量 x 的显函数。

有时用自变量表达一个函数的公式,不很容易或者不可能写出来。我們就簡写作:

$$y=f(x)。$$

这个写法标記出,y 是自变量 x 的函数,f 用作記 y 对 x 的关系的符号。自然,别的字母也可以用来替代 f。若要考虑 x 的几个不同的函数,则須用不同的字母来記对 x 的关系:

$$f(x),\quad F(x),\quad \varphi(x)\text{等等。}$$

这里写的符号,不仅用于分析法表示的函数,而且也用于[5]中所定义的最一般的函数关系。

用类似的記法,多元函数写成:

$$v=F(x, y, z)。$$

这里 v 是变量 x, y, z 的函数。

給自变量以特殊值,完成 $f, F, \cdots$ 中所指出的演算,就得到函数的特殊值。例如 $x=\frac{1}{2}$ 时,函数(1)的值是

$$y=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\times\frac{1}{2}+7=6。$$

一般来講,$x=x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的值記作 $f(x_0)$。多元函数可以类推。

不要把[5]中所給的函数的一般定义,与 y 的通过 x 的分析表达式相混。函数的一般定义中,只說是有一个法則,当变量 x 在它的可取値的集合中任取一值时,对应的 y 有确定的值。幷没有假設 y 要有通过 x 的分析表达式。还須注意,在自变量 x 的不同的变动区域,可用不同

的分析表达式定义函数。例如我們在区間 $(0, 3)$ 上作一个函数 y 如下：$0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=x+5$；而 $2<x\leqslant 3$ 时，$y=11-2x$。于是当 x 取区間 $(0, 3)$ 上任一值时，对应的 y 有确定的值，所以 y 是一个函数。

7．**隐函数** 若一个函数沒有通过自变量的直接的分析表达式，而只有一个方程表示函数的值与自变量的值的关系，就叫隐函数。例如，若变量 y 与变量 x 适合方程

$$y^3-x^2=0,$$

則 y 是自变量 x 的隐函数；从另一方面看，也可以把 x 算作是自变量 y 的隐函数。

几个自变量 $x, y, z, \cdots$ 的隐函数 v 一般由方程

$$F(x, y, z, \cdots, v)=0$$

确定。

只有当这方程对 v 可解，而 v 能表現成 $x, y, z, \cdots$ 的显函数

$$v=\varphi(x, y, z, \cdots)$$

时，才能計算这个函数的值。

上例中，y 可以通过 x 表达成

$$y=\sqrt[3]{x^2}。$$

但是，要得到函数 v 的各种性質，不一定要解这方程；常是就确定它的方程来考察隐函数就足够了。

例如，气体的容积 v 是压力 p 与溫度 T 的隐函数，由方程

$$pv=R(273+T)$$

确定。

三角形中 a, b 二边的夹角 C 是 a, b 与面积 S 的隐函数，由方程

$$ab\sin C=2S$$

确定。

8．**列表法** 函数的分析表示法主要是在作理論研究时用，就是在研究一般定律时用。但在实际上要求出各种函数的某些特殊值时，分

析表示法常不很方便,因为需要每次作所有必要的計算。

为方便起見,在实际应用中,对于最常用的函数,常将自变量的許多特殊值与对应的函数的特殊值列成表。

例如,在实用中常見的有下列諸函数的表:

$y=x^2, \frac{1}{x}, \sqrt{x}, \pi x, \frac{1}{4}\pi x^2, \log_{10} x, \log_{10}\sin x, \log_{10}\cos x$ 等,此外,还有很有用的較复杂的函数的表:如貝塞尔函数表,橢圓函数表等。也有多元函数的表,最簡單的如乘法表,就是 x 与 y 取整数值时,函数 $z=xy$ 的值的表。

有时,要用来計算函数值的那些自变量的特殊值,在表上沒有,而表上只有与它临近的值。为要在这种情形下用表,有各种的插补法,中学里用的对数表,就是其中一种(逐差法)。

列表法的重要性,在于它可以用来表示不知道分析表达式的那种函数;在做实驗时,就需要用列表法。任何实驗研究的目的,在于找出我們所不知道的函数关系,因此任何实驗的結果总是列成一个表,表示这实驗中所研究的量的各个值的关系。

9. 数的圖示法 講函数关系的圖示法时,我們先由一个变量的圖示法开始。

任何一个数 x 可以用某个綫段来表示。为此只要在选定了單位長后,作一个長度等于給定的数 x 的綫段就成了。如此,任何一个量,不仅可以用数来表达,也可以用綫段作它的几何表示。

圖 1.

为使这方法也可表示負数,我們在一条标明方向的直綫上取綫段(圖 1)。其次,用符号 $\overline{AB}$ 表示任意綫段,并把 A 叫做綫段的起点,B 叫做終点。

若由 A 到 B 的方向与直綫的方向一致,則这綫段表示一个正数。若由 A 到 B 的方向与直綫的方向相反,則这綫段表示一个負数(圖 1 中 $\overline{A_1B_1}$)。至于所考慮的数的絕对值,則由表示这个数的綫段的長度