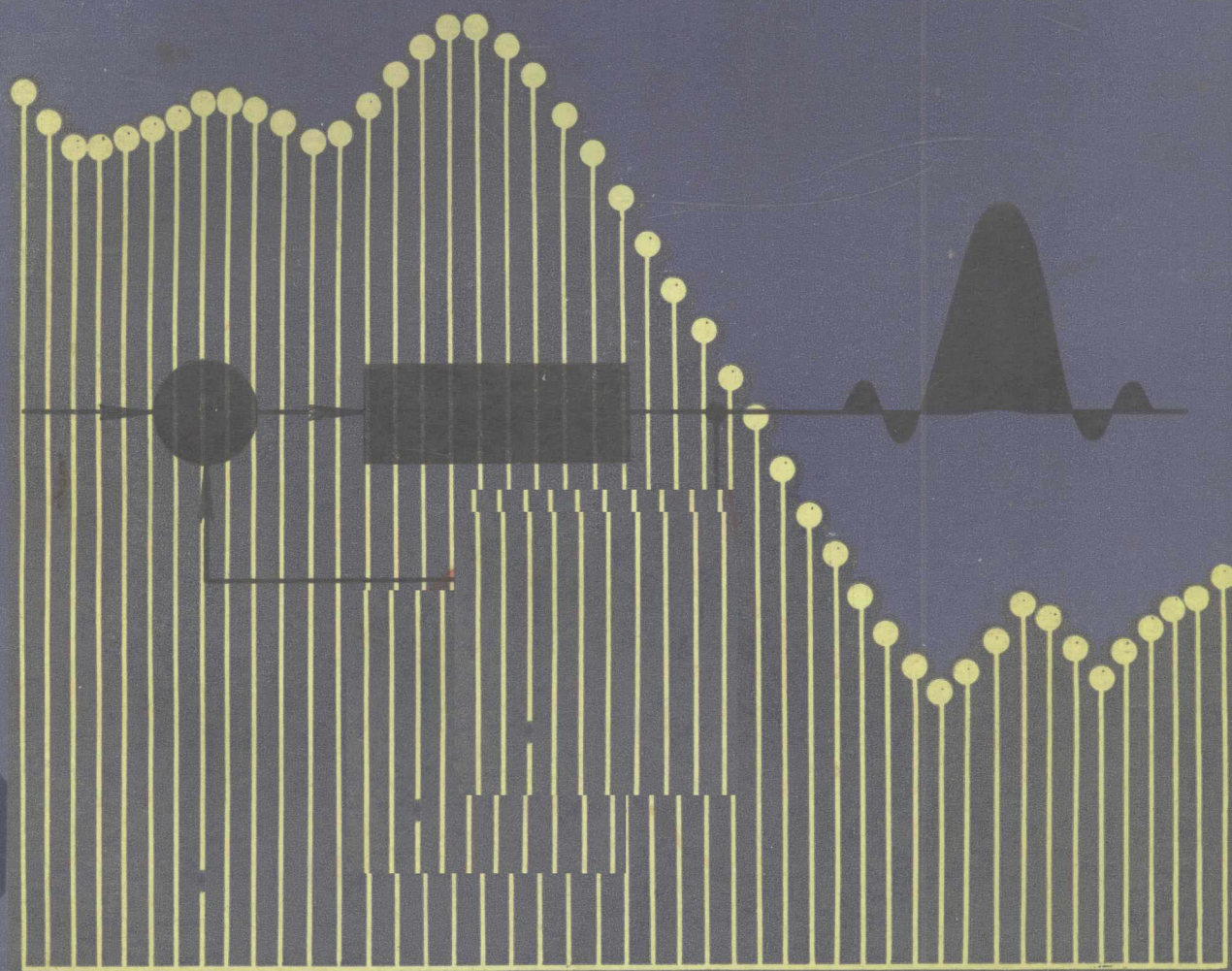


高等学校教材

信号与线性系统分析

吴大正 主编



XINHAO YU XIANXING XITONG FENXI

TN 911

3

高等学校教材

信号与线性系统分析

吴大正 主编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书根据1980年6月高等学校工科电工教材编审委员会扩大会议审定的《信号与系统教学大纲(草案)》写成。

全书包括:信号与系统、连续系统的时域分析、离散系统的时域分析、连续系统的频域分析、连续系统的复频域分析、离散系统的 z 域分析、系统函数和状态变量分析等八章。

本书承合肥工业大学芮坤生教授主审,可做为高等工业院校四年制无线电技术专业《信号与系统》课程的教材,也可供有关科技人员参考。

责任编辑 王忠民

高等学校教材
信号与线性系统分析
吴大正 主编

*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷一厂印装

*
开本 787×109: 1/16 印张 33.5 字数 765,000

1986年3月第1版 1987年4月第1次印刷

印数 8,901—17,510

书号 15010·0723 定价 5.05 元

前 言

本书是根据1980年6月高等学校工科电工教材编审委员会扩大会议审订的《信号与系统教学大纲(草案)》编写的。在吴大正主编的《信号与线性网络分析》一书的基础上,依据教学大纲的要求,删去了谐振电路、双口网络、传输线(它们已列入有关课程的教学大纲),并对信号与线性系统分析的内容进行了必要的修改和补充。更名为《信号与线性系统分析》。全书内容包括:信号与系统、连续系统的时域分析、离散系统的时域分析、连续系统的频域分析、连续系统的复频域分析、离散系统的 z 域分析、系统函数和状态变量分析等共八章。

随着大规模集成电路、计算机的迅速发展,数字技术已渗透到科学技术的各个领域。为了适应新的发展变化,目前,信号、电路与系统的研究重点普遍注意转向离散的、数字的方面。本书在编写时循着逐步更新的精神,在保持教学大纲内容和要求的基础上,对内容体系作了某些改变的尝试。将连续系统与离散系统并列进行研究。考虑到当前的实际情况,在具体安排上,仍分章先讨论连续的再讨论离散的,系统函数和状态变量分析两章则连续系统与离散系统一起讨论。这样,把系统(连续的和离散的)看作一个整体,从分析方法的角度,按时域分析、变换域分析和状态变量分析的次序划分章节,强调了连续系统与离散系统的共性,也突出了它们各自的特点。这将有利于基本概念和基本方法的理解与掌握。

信号与系统理论的发展愈来愈多地运用了现代数学的概念和方法。本书在基本理论和方法的阐述上,把物理问题与其数学表述和论证密切地结合起来,注意引入现代数学的概念,使这些理论和方法有较为坚实的数学基础,这对于深入准确地理解本书内容和进一步研究信号与系统理论都是有益的。此外,为了叙述和阅读的方便,将傅里叶级数、线性常微分方程和差分方程等数学内容也作了简要地叙述。将矩阵(主要是特征矩阵和矩阵函数)列为附录。对有些数学内容叙述的比较详细,这对于读者可能是方便的,但不必都作为课堂讲授内容。在使用本教材时,对于各章的顺序、内容的取舍等,请根据实际情况确定,不要受本书的约束。

为使读者能较好地理解基本概念和分析方法,精选了不少例题和习题。习题数量较多,请酌情选用,书末附有部分习题答案仅供参考。书中标有*号的段落,不属于基本要求,可供参考。

本书由吴大正主编,张永瑞、杨林耀、燕庆明同志参加了编写工作。在编写过程中,电路教研室的同志给予了许多支持和帮助。

芮坤生教授指导了本书的编写,提出了许多宝贵意见,并审阅了书稿。许多兄弟院校的老师提出了许多宝贵意见,在此一并表示衷心的感谢。我们还要感谢同学们和未见过面的读者,他们有意无意地给了我们许多启示,使我们从内容安排到具体叙述方法上都有所改进。

由于编者水平有限,定有不少错误和不妥之处,敬请读者赐教。

编 者

1985年3月于西北电讯工程学院

目 录

第一章 信号与系统	1
§ 1.1 绪论	1
§ 1.2 信号	3
一 连续信号与离散信号	3
二 信号的运算	6
三 信号的分类	8
§ 1.3 系统	10
一 系统模型	10
二 线性系统	13
三 非时变系统 因果系统	15
四 系统模拟与相似系统	16
§ 1.4 线性系统分析概述	21
习题	22
第二章 连续系统的时域分析	27
§ 2.1 线性连续系统的描述及其响应	27
一 系统的描述	27
二 微分方程的经典解	28
三 零输入响应与零状态响应	33
§ 2.2 阶跃函数和冲激函数	37
一 阶跃函数和冲激函数	38
二 冲激函数的性质	40
三 初始状态等效为信号源	44
§ 2.3 冲激响应和阶跃响应	46
一 冲激响应	46
二 阶跃响应	49
三 二阶系统的冲激和阶跃响应	51
§ 2.4 卷积积分	54
一 卷积积分	54
二 卷积的图解	57
三 卷积运算的规则	61
四 与冲激函数的卷积	65
§ 2.5 杜阿密尔积分	68
* § 2.6 卷积积分的数值计算原理	71
习题	73

第三章 离散系统的时域分析	79
§ 3.1 线性离散系统的描述及其响应	80
一 系统的描述	80
二 差分方程的经典解	82
三 零输入响应和零状态响应	87
§ 3.2 单位序列和单位响应	88
一 单位序列和单位阶跃序列	88
二 单位响应	89
§ 3.3 卷积和	94
一 卷积和	94
二 列表法	96
三 解析法	98
习题	100
第四章 连续系统的频域分析	104
§ 4.1 信号分解为正交函数	104
一 正交函数集	104
二 信号分解为正交函数	106
§ 4.2 傅里叶级数	108
一 周期信号的分解	108
二 奇、偶函数的傅里叶系数	112
三 傅里叶级数的指数形式	116
§ 4.3 周期信号的频谱	119
一 周期矩形脉冲的频谱	119
二 周期信号的功率	122
§ 4.4 非周期信号的频谱	127
一 傅里叶变换	127
二 奇异函数的傅里叶变换	132
§ 4.5 傅里叶变换的性质	136
一 线性	137
二 奇偶性	138
三 对称性	139
四 尺度变换	142
五 时移特性	143
六 频移特性	146

七 卷积定理.....	147	一 单边与双边拉普拉斯变换.....	245
八 时域微分和积分.....	150	二 双边拉普拉斯变换的性质.....	250
九 频域微分和积分.....	153	* § 5.6 反演积分.....	251
十 能量谱和功率谱.....	156	习题.....	258
§ 4.6 周期信号的傅里叶变换.....	159	第六章 离散系统的 z 域分析.....	266
一 正弦、余弦函数的傅里叶变换.....	159	§ 6.1 Z 变换.....	266
二 周期函数的傅里叶变换.....	160	一 从拉普拉斯变换到 Z 变换.....	266
§ 4.7 线性非时变系统的频域分析.....	163	二 Z 变换与逆变换.....	267
一 频域分析.....	163	三 收敛域.....	268
二 时域分析与频域分析.....	165	§ 6.2 Z 变换的性质.....	271
三 无失真传输.....	166	一 线性.....	271
四 理想低通滤波器的响应.....	167	二 移位特性.....	273
§ 4.8 抽样定理.....	172	三 序列乘 a^k (z 域尺度变换).....	276
一 信号的抽样.....	172	四 卷积定理.....	277
二 抽样定理.....	176	五 序列乘 k (z 域微分).....	280
习题.....	178	六 序列除 $k+m$ (z 域积分).....	282
第五章 连续系统的复频域分析.....	186	七 部分和.....	283
§ 5.1 拉普拉斯变换.....	186	八 初值定理和终值定理.....	284
一 从傅里叶变换到拉普拉斯变换.....	186	§ 6.3 逆 Z 变换.....	287
二 收敛条件.....	188	一 零级数展开.....	287
§ 5.2 拉普拉斯变换的性质.....	192	二 部分分式展开.....	288
一 线性.....	192	§ 6.4 z 域分析.....	297
二 尺度变换.....	193	一 差分方程的变换解.....	297
三 时移(延时)特性.....	194	二 系统函数.....	300
四 复频移(s 域平移)特性.....	196	三 s 域与 z 域的关系.....	303
五 时域微分(微分定理).....	197	四 系统的频域响应.....	304
六 时域积分(积分定理).....	198	* § 6.5 双边 Z 变换和反演积分.....	307
七 卷积定理.....	201	一 单边与双边 Z 变换.....	307
八 s 域微分和积分.....	204	二 反演积分.....	312
九 初值定理和终值定理.....	206	习题.....	314
§ 5.3 拉普拉斯逆变换.....	211	第七章 系统函数.....	320
一 逆变换表.....	211	§ 7.1 $H(s)$ 与连续系统特性.....	320
二 部分分式展开.....	212	一 $H(s)$ 的零点和极点.....	320
§ 5.4 复频域分析.....	219	二 零、极点与时域响应.....	321
一 微分方程的变换解.....	219	三 零、极点与频率响应.....	326
二 网络元件的 s 域模型.....	223	* 四 全通函数和最小相位函数.....	330
三 系统函数.....	228	* 五 波特图.....	333
四 自由与强迫响应 暂态与稳态响应.....	233	§ 7.2 $H(z)$ 与离散系统特性.....	340
五 拉普拉斯变换与傅里叶变换.....	241	一 零、极点与时域响应.....	341
* § 5.5 双边拉普拉斯变换.....	244	二 零、极点与频域响应.....	344

§ 7.3 系统的稳定性	348	习题	445
一 系统的因果性	348	附录一 矩阵	451
二 系统的稳定性	349	Fl. A 向量	451
三 罗斯-霍尔维兹准则	355	Fl. B 矩阵	453
四 奈奎斯特准则	360	一 基本定义	453
五 离散系统的稳定性准则	364	二 矩阵的运算	454
§ 7.4 信号流图与系统模拟	368	三 逆矩阵	456
一 系统的方框图	368	四 联立线性方程组	458
二 信号流图	370	五 时间矢量和矩阵	459
三 梅森公式	374	Fl. C 特征矩阵	460
四 系统模拟	378	一 特征值和特征矢量	460
习题	387	二 凯莱-哈密顿定理	463
第八章 系统的状态变量分析	395	Fl. D 矩阵函数的计算	466
§ 8.1 状态方程	395	一 矩阵指数函数	466
一 状态变量与状态方程	395	二 化矩阵函数为多项式	469
二 动态方程的一般形式	397	三 化矩阵函数为成分矩阵	475
§ 8.2 状态方程的建立	399	四 化A为对角阵	479
一 网络状态方程的直观编写	399	附录二 卷积表	483
二 连续系统状态方程的建立	403	附录三 卷积和表	484
三 离散系统状态方程的建立	410	附录四 常用周期信号的傅里叶系数表	485
§ 8.3 连续系统状态方程的解	413	附录五 信号的傅里叶变换表	487
一 状态方程的时域解	413	表 1 能量信号	487
二 状态方程的变换解	419	表 2 奇异信号和功率信号	489
§ 8.4 离散系统状态方程的解	424	附录六 拉普拉斯逆变换表	490
一 状态方程的时域解	425	附录七 序列的Z变换表	493
二 状态方程的变换解	431	参考书目	496
* § 8.5 系统的可控制性和可观测性	434	习题答案	497
一 状态矢量的线性变换	434	索引	520
二 系统的可控制性	438		
三 系统的可观测性	441		
四 可控性、可观性与转移函数	442		

第一章 信号与系统

§ 1.1 绪 言

在近代,人们在研究自然界、社会和思维的规律时,普遍地引用了系统的概念、理论和方法。通常,系统是指由若干相互联系、相互作用的事物组合而成的具有某种功能的整体。太阳系、生态系统和动物的神经组织等可称为自然系统;供电网、运输系统、计算机网等可称为人工系统。电气的、机械的、机电的、声学的和光学的系统属于物理系统;而生物系统、化学系统、政治体制系统、经济结构系统、生产组织系统等属于非物理系统。本书将只讨论在无线电电子学领域中的电系统。

在无线电电子学领域中,常利用通信系统、控制系统和计算机系统进行信号的传输和处理。

电报是先将欲传送的电文(称之为消息)编成电码,使成为代表数字或字母的一系列电流或电压脉冲(称之为电信号,简称信号),再把这些电信号传送到接收端,在接收端将这些电信号译成电文。

电话是将欲传送的语言或音乐(消息)转换成与之相对应的电流或电压(信号),将它传送到接收端后,利用耳机或扬声器将电信号还原为声音。

传真和电视传送的消息是图象(电视还同时传送伴音),前者传送的是固定图象,如照片、图表、手稿等,后者传送的是活动图象,如舞台的演出、生产现场的实况等。发送端按一定规律将画面变换成相对应的电信号,将它传送到接收端后,再按一定规律转换为光,显映在感光纸(传真)或荧光屏(电视)上。

可见,一个通信系统应由发送设备、传输信道和接收设备三部分组成,如图 1.1-1 所示。发送设备将欲传送的消息转换成便于传输的电信号,在接收设备中将电信号还原为消息,发送设备

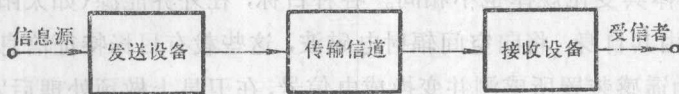


图 1.1-1 通信系统框图

与接收设备之间由传输信道沟通。传输信道有多种形式:有线通信主要用双导线、电缆(架空、地下、海底)等;无线通信、微波中继通信、卫星通信等以传播电磁波的空间为信道;新发展起来的光纤通信传输的是光信号,它的传输信道是光导纤维(简称光纤)或光缆。

雷达或称为无线电定位,它利用电磁波受物体反射的原理来测量空中、水面或陆地上各种目标的位置和运动参数。为要陆续不断地获得目标的各种信息就要使雷达天线不断地跟随目标运

动以使天线波束随时对准目标,这就需要天线位置(方位角,俯仰角)控制系统。将测量得到的目标位置(方位角,俯仰角)与天线位置的数据转换为电信号送到运算装置进行比较,当天线偏离目标方向时,运算装置输出误差电压,该误差信号经放大后加到电动机的电枢上,使之拖动天线向减小误差的方向运动,当天线转到对准目标的方向时,误差信号减小到零,加到电动机电枢上的电压也随之为零,天线停止运动。

为使导弹紧跟目标,可以用地面雷达测定导弹和目标的相对位置及其他运动参数。地面上的计算机根据雷达提供的数据计算出修正导弹航行所需的控制量,并将其转换为控制信号由地面发送设备发出,弹上接收机收到后再传送给有关执行机构,以控制导弹的航行。这种用电信号控制远处机件运行的自动化技术称为遥控。

图 1.1-2 是一般控制系统的框图,它由测量设备,运算装置,控制器与受控对象组成。在控制系统的运行过程中也伴随着信号的传输过程。实际应用中,常将物体运动的位移(或角位移)、速度等各种非电物理量转换成电信号以利传输。

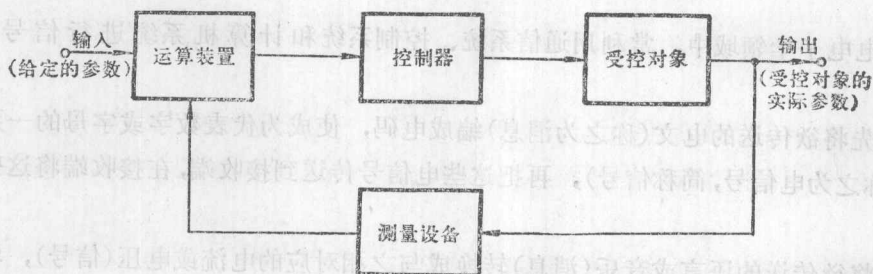


图 1.1-2 控制系统框图

在信号传输的过程中,不可避免地会混入噪声和干扰。当传输距离较远,信号微弱时,有用信号甚至会湮没在噪声和干扰之中,这就需要对接收到的信号进行处理,滤除混杂的噪声和干扰。有时需要将信号变换成容易分析与识别的形式,以便于估计和提取它的特征参量。近年来,由于高速电子计算机的运用,促进了信号处理技术的研究和发展,并运用于航天、气象、测地、地球资源考察等许多科学技术领域,例如月球的探测、矿藏的勘探,识别和测量农作物的种类和长势等。我们知道,各种目标物体(土地、水流、空气、农作物等)对电磁波反射、吸收、辐射的强度随波长而变化,不同的物体其变化规律也不相同。各种目标,在外界能源(如太阳光或遥感器辐射的电磁波)的照射下或由其自身,将向空间辐射电磁波,这些载有目标特征信息的电磁波被人造地球卫星或航天器上的遥感装置所感测并转换成电信号,在卫星上做预处理后发回地面,地面将收到的信号经过恢复、提纯、识别等处理后提供使用。

信号传输和信号处理有着密切的联系,但由于它们的不同特点而形成了相对独立的学科。信号分析与系统分析则是它们的共同基础理论。

在无线电电子学领域中,信号、网络与系统三者有十分密切的联系。离开了信号,网络与系统就失去了意义。信号作为被传输消息的表现形式,可看作是运载消息的工具,网络 and 系统则是为传输信号或对信号进行加工处理而由一些元、器件构成的某种组合。网络研究的问题是:一定

结构和参数的网络所具有的特性(称为网络分析);或者为实现某种特性,网络应具有的结构和参数(称为网络综合)。系统可能是某个具体的网络(如滤波器),也可能是多功能的复杂设备(如通信系统,数字信号处理系统、计算机控制的自动化系统等)。系统主要研究的问题是:对于给定的系统,研究系统对输入激励信号所产生的输出响应(系统分析);或者对于给定的信号形式与传输、处理的要求,研究系统所应具有的功能和特性并据此设计所需的系统(系统综合)。相对地说,系统所关心的是全局性问题,而网络所关心的是局部性问题。

系统和网络的含义虽然不完全相同,但由于大规模集成化技术的发展,制成了各种复杂的系统部件,使得系统、网络以及电路、器件这些名词有时很难区分。在讨论系统的基本理论时,所谓系统常常就是指网络本身,因此,就本书讨论的范围而言,“系统”与“网络”二者常可互相通用。

§ 1.2 信 号

如前所述,为了传送消息(语言、文字、图象或数据等),需要用适当的设备将消息转换为电信号。电信号简称信号*,它的基本形式是随时间变化的电流或电压。信号常可表示为时间的函数(或序列),该函数的图象称为信号的波形。顺便指出,本书在讨论与信号有关的问题时,“信号”与“函数”两个词常可互相通用。

一、连续信号与离散信号

信号的形式是多种多样的,它主要有两种结构:连续时间信号和离散时间信号。

连续时间信号

在连续的时间范围内有定义的信号称为连续时间信号,简称为连续信号。这里“连续”是指函数的定义域——时间,是连续的,至于信号的值域可以是连续的,也可以不是。下面数例都是连续时间信号。

例 1.2-1 正弦信号

$$f(t) = A \sin \pi t \quad (1.2-1)$$

如图 1.2-1 所示,其中 A 是常数。它的定义域 $(-\infty, \infty)$ **和值域 $[-1, 1]$ 都是连续的。

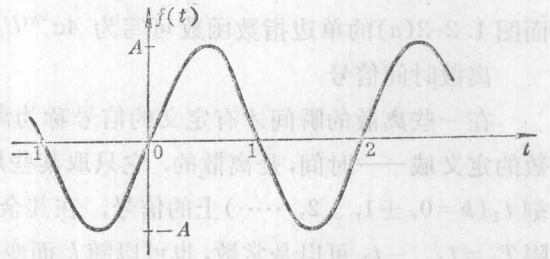


图 1.2-1 正弦信号 $f(t) = A \sin \pi t$

例 1.2-2 单边指数函数

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Ae^{-\alpha t}, & t > 0 \quad (\alpha > 0) \end{cases} \quad (1.2-2)$$

如图 1.2-2(a) 所示,其中 A 是常数。它的定义域为 $(-\infty, \infty)$, 其函数的值也可在 0 到 A 间取任意值,因而也是连续的,但在 $t=0$ 处,函数有间断点(不连续点)。

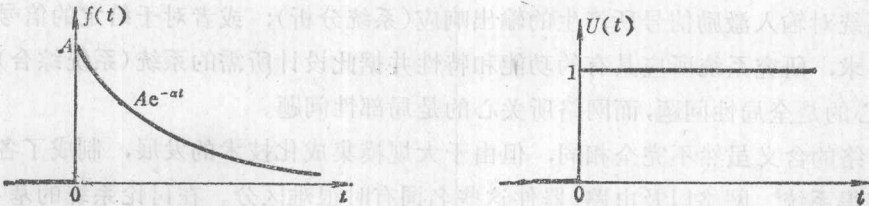
例 1.2-3 单位阶跃函数

* 广义而言,信号还应包括光、声信号等,本书只讨论电信号。

** 区间 $t_1 < t < t_2$ 称为开区间,它不含边界点 t_1 和 t_2 ,简记作 (t_1, t_2) 。例如:区间 $(-\infty, \infty)$ 的意思是 $-\infty < t < \infty$ 。包括边界点的区间 $t_1 \leq t \leq t_2$,称为闭区间,简记为 $[t_1, t_2]$ 。

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (1.2-3)$$

如图 1.2-2(b) 所示。其定义域为 $(-\infty, \infty)$ ，但在 $t=0$ 处有间断点。函数的值只取 0 或 1。



(a) 单边指数信号

(b) 单位阶跃信号

图 1.2-2

一般可以不定义间断点处的函数值，这并不影响分析的结果。为了使函数定义更加完整，且与高等数学相一致，我们规定：若函数 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 处有间断点，则函数在该点的值等于其左极限 $f(t_0^-)$ 与右极限 $f(t_0^+)$ 之和的 $\frac{1}{2}$ ，即

$$f(t_0) = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2} \quad (1.2-4)$$

式中 $f(t_0^-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t_0 - \epsilon)$ ， $f(t_0^+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t_0 + \epsilon)$ *。这样，单位阶跃函数在 $t=0$ 处的值等于 $\frac{1}{2}$ 。于是单位阶跃函数的定义可写为

$$U(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (1.2-5)$$

而图 1.2-2(a) 的单边指数函数可写为 $Ae^{-at}U(t)$ 。

离散时间信号

在一些离散的瞬间才有定义的信号称为离散时间信号，简称离散信号。这里“离散”是指函数的定义域——时间，是离散的，它只取某些规定的值。就是说，离散信号是定义在一些离散时刻 $t_k (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 上的信号，在其余的时间，函数没有定义。时刻 t_k 和 t_{k+1} 之间的间隔 $T_k = t_{k+1} - t_k$ 可以是常数，也可以随 k 而变化。我们只讨论 T_k 等于常数的情况。若令相继时刻 t_k 与 t_{k+1} 之间的间隔为 T ，则离散信号只在均匀离散时刻 $t = \dots, -2T, -T, 0, T, 2T, \dots$ 时有定义，它可以表示为 $f(kT)$ 。为了方便，不妨把 $f(kT)$ 简记为 $f(k)$ 。这样的离散信号也常称为序列。下面数例都是离散时间信号。

例 1.2-4 序列 $f(k)$ 可写成闭合形式的表示式，也可逐个列出 $f(k)$ 的值。通常，把对应某序号 k 的数值称为在第 k 个样点的“样值”。序列

* 符号 def……可读作“定义为……”或“按定义等于……”。

$$f_1(k) = \begin{cases} 0, & k < -1 \\ 1, & k = -1 \\ 2, & k = 0 \\ 0.5, & k = 1 \\ -1, & k = 2 \\ 0, & k \geq 3 \end{cases}$$

列出了诸样点的值,其图形如图 1.2-3(a)所示。序列

$$f_2(k) = \begin{cases} (-1)^k, & k < 0 \\ 2^{-k} + k, & k \geq 0 \end{cases}$$

是闭合形式,其波形如图 1.2-3(b)所示。

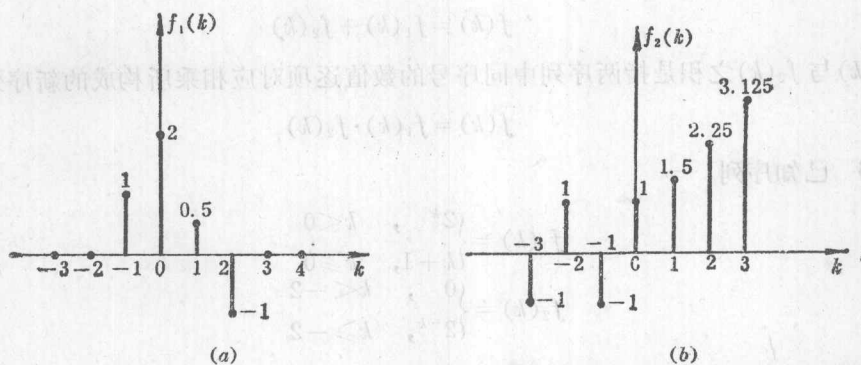


图 1.2-3 离散时间信号

例 1.2-5 单边指数序列

$$f(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ e^{-\alpha k}, & k \geq 0 \quad (\alpha > 0) \end{cases} \quad (1.2-6)$$

如图 1.2-4(a)所示。其序列值可能取 $[0, 1]$ 区间的任何值。

单位阶跃序列

$$U(k) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases} \quad (1.2-7)$$

如图 1.2-4(b)所示。其序列值只取 0 或 1。

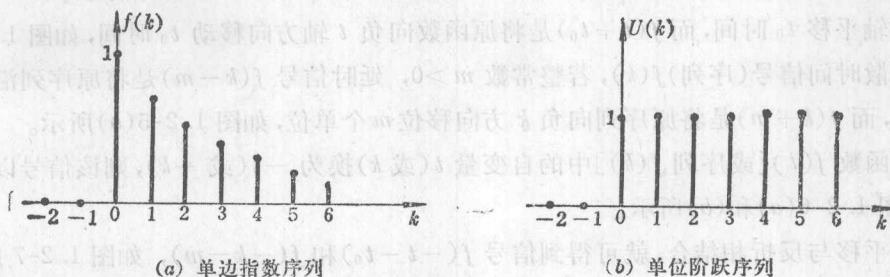


图 1.2-4

如上所述,信号的自变量(时间)的取值可以是连续的或离散的,信号的幅度(函数值)的取值也可以是连续的或离散的。时间和幅值均为连续的信号常称为模拟信号,时间和幅值均为离散的信号常称为数字信号。在实际应用中,连续信号与模拟信号两个名词常常不予区分,离散信号与数字信号两个名词也常互相通用。一般,在研究理论问题时常用“连续”、“离散”二词,而讨论具体的实际问题时常用“模拟”、“数字”二词。

二、信号的运算

在系统分析中,常遇到信号(连续的或离散的)的某些基本运算——加、乘、平移、反折等。连续时间信号的加、乘法运算,读者比较熟悉,勿需多说。

序列 $f_1(k)$ 与 $f_2(k)$ 之和(瞬时和)是指两序列中同序号的数值逐项对应相加所构成的新序列

$$f(k) = f_1(k) + f_2(k) \quad (1.2-8)$$

序列 $f_1(k)$ 与 $f_2(k)$ 之积是指两序列中同序号的数值逐项对应相乘所构成的新序列

$$f(k) = f_1(k) \cdot f_2(k) \quad (1.2-9)$$

例 1.2-6 已知序列

$$f_1(k) = \begin{cases} 2^k, & k < 0 \\ k+1, & k \geq 0 \end{cases}$$

$$f_2(k) = \begin{cases} 0, & k < -2 \\ 2^{-k}, & k \geq -2 \end{cases}$$

试求 $f_1(k)$ 与 $f_2(k)$ 之和, $f_1(k)$ 与 $f_2(k)$ 之积。

解 $f_1(k)$ 与 $f_2(k)$ 之和为

$$f_1(k) + f_2(k) = \begin{cases} 2^k, & k < -2 \\ 2^k + 2^{-k}, & k = -1, -2 \\ k+1 + 2^{-k}, & k \geq 0 \end{cases}$$

$f_1(k)$ 与 $f_2(k)$ 之积为

$$f_1(k) \cdot f_2(k) = \begin{cases} 2^k \times 0 & = 0, & k < -2 \\ 2^k \times 2^{-k} & = 1, & k = -1, -2 \\ (k+1) \times 2^{-k} & = k2^{-k} + 2^{-k}, & k \geq 0 \end{cases}$$

平移也称为移位。对于连续时间信号(函数) $f(t)$, 若常数 $t_0 > 0$, 延时信号 $f(t-t_0)$ 是将原函数沿正 t 轴平移 t_0 时间, 而 $f(t+t_0)$ 是将原函数向负 t 轴方向移动 t_0 时间, 如图 1.2-5(a) 所示。对于离散时间信号(序列) $f(k)$, 若整常数 $m > 0$, 延时信号 $f(k-m)$ 是将原序列沿正 k 轴移动 m 个单位, 而 $f(k+m)$ 是将原序列向负 k 轴方向移动 m 个单位, 如图 1.2-5(b) 所示。

如果将函数 $f(t)$ [或序列 $f(k)$] 中的自变量 t (或 k) 换为 $-t$ (或 $-k$), 则该信号以纵坐标为轴反折, 如图 1.2-6(a) 和 (b) 所示。

如果将平移与反折相结合, 就可得到信号 $f(-t-t_0)$ 和 $f(-k-m)$, 如图 1.2-7 所示, 类似地, 也可得到信号 $f(-t+t_0)$ 和 $f(-k+m)$ 。需要注意, 为画出这类信号的图形, 应先平移[将

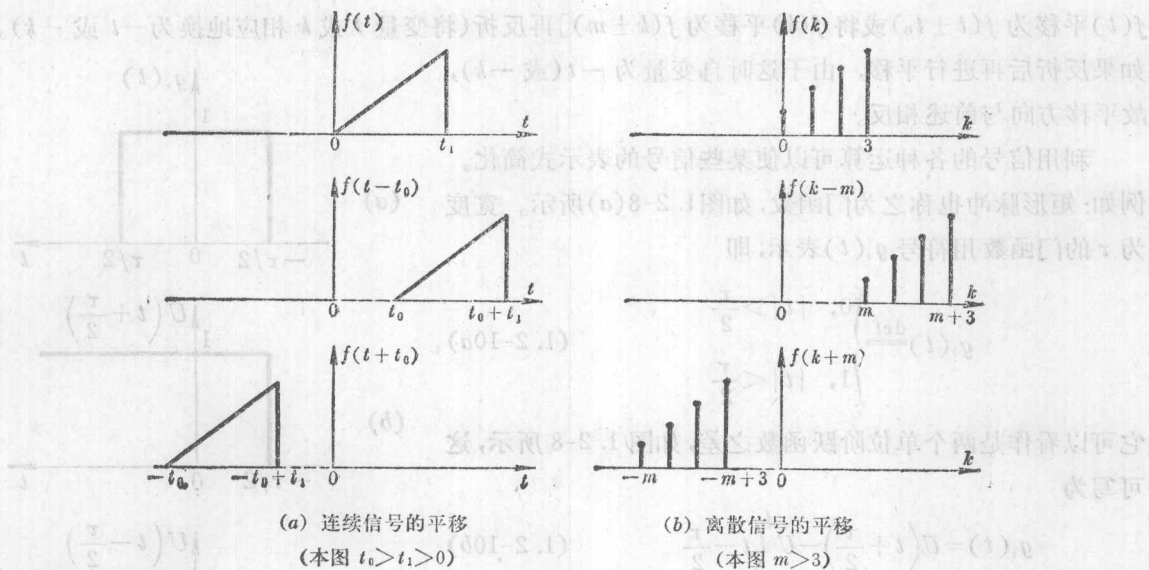


图 1.2-5 信号的平移

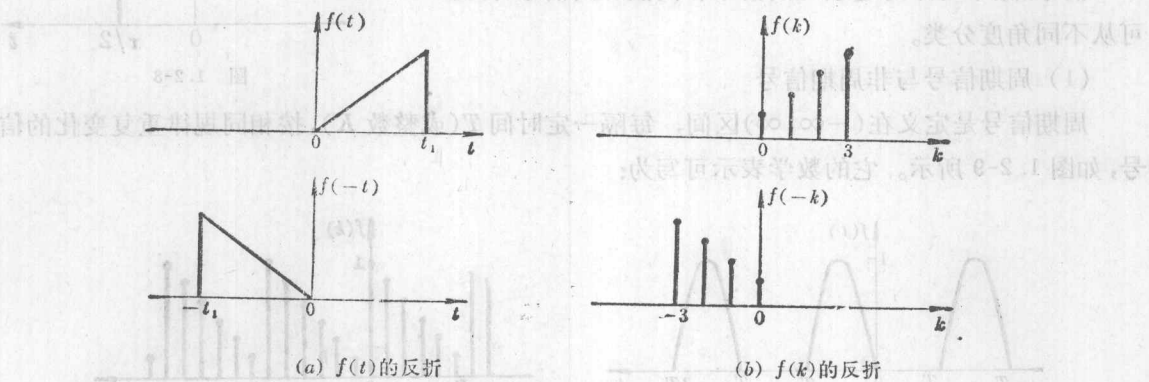


图 1.2-6 信号的反折

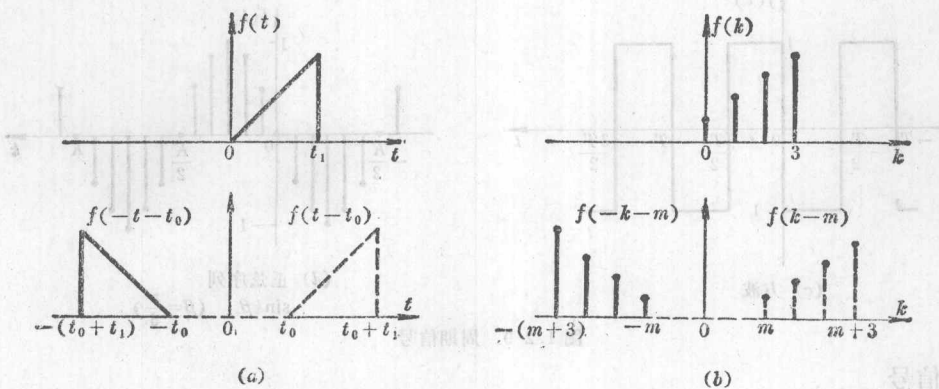


图 1.2-7

$f(t)$ 平移为 $f(t \pm t_0)$ 或将 $f(k)$ 平移为 $f(k \pm m)$ 再反折(将变量 t 或 k 相应地换为 $-t$ 或 $-k$)。如果反折后再进行平移, 由于这时自变量为 $-t$ (或 $-k$), 故平移方向与前述相反。

利用信号的各种运算可以使某些信号的表示式简化。例如: 矩形脉冲也称之为门函数, 如图 1.2-8(a) 所示。宽度为 τ 的门函数用符号 $g_\tau(t)$ 表示, 即

$$g_\tau(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \\ 1, & |t| < \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (1.2-10a)$$

它可以看作是两个单位阶跃函数之差, 如图 1.2-8 所示, 这可写为

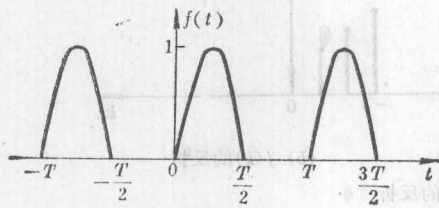
$$g_\tau(t) = U\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - U\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (1.2-10b)$$

三、信号的分类

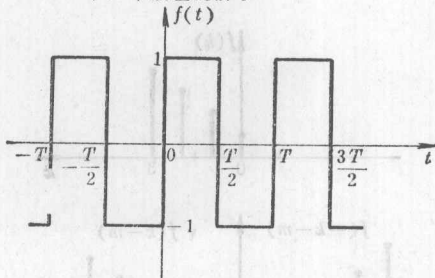
信号, 除了可分为连续时间信号和离散时间信号外, 还可从不同角度分类。

(1) 周期信号与非周期信号

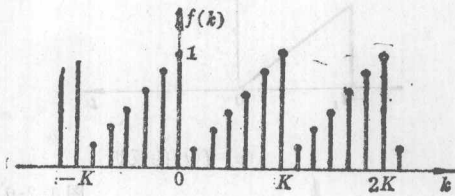
周期信号是定义在 $(-\infty, \infty)$ 区间, 每隔一定时间 T (或整数 K), 按相同规律重复变化的信号, 如图 1.2-9 所示。它的数学表示可写为:



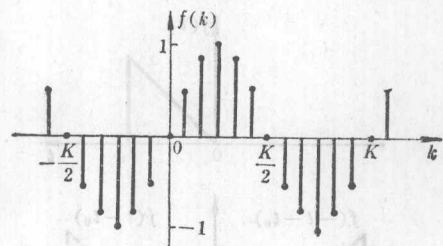
(a) 半波整流信号



(c) 方波



(b) 锯齿序列



(d) 正弦序列
 $\sin k\beta \quad (\beta = \frac{\pi}{6})$

图 1.2-9 周期信号

对于连续信号

$$f(t) = f(t + mT) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2-11a)$$

对于离散信号

$$f(k) = f(k+mK) \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2-11b)$$

满足以上关系式的最小 T (或 K) 值, 称为该信号的重复周期, 简称周期。只要给出周期信号在任一周期内的函数式或波形, 便可确知它在任一时刻的数值。不具有周期性的信号称为非周期信号。

图 1.2-9(d) 是正弦序列

$$f(k) = \sin k\beta$$

式中 β 称为正弦序列的角频率, 它反映了序列值周期性重复变化的速率, 例如 $\beta = \frac{2\pi}{10}$, 则序列值每 10 个单位重复一次正弦包络的数值。图 1.2-9(d) 画出了 $\beta = \frac{\pi}{6}$ 的情况, 它每经过 12 个单位循环一次, 即周期 $K=12$ 。显然, 仅当 $\frac{2\pi}{\beta}$ 为有理数时, 正弦序列才具有周期性, 如果 $\frac{2\pi}{\beta}$ 为整数时, 则周期 $K = \frac{2\pi}{\beta}$; 若 $\frac{2\pi}{\beta}$ 不是有理数, 则正弦序列不是周期性的, 不过, 这时仍称 β 为角频率。

(2) 实信号与复信号

物理可实现的信号都是时间的实函数, 其在各时刻的函数值均为实数, 例如: 单边指数信号、正弦信号(正弦信号与余弦信号二者相位差 $\frac{\pi}{2}$, 我们统称为正弦信号)等, 统称为实信号。

虽然实际上不能产生复信号, 但为了理论分析的需要, 常常利用复信号, 在连续信号中最常用的是复指数信号。

复指数信号可表示为

$$f(t) = e^{st}, \quad -\infty < t < \infty \quad (1.2-12)$$

式中复数 $s = \sigma + j\omega$, σ 是 s 的实部, 常记作 $\text{Re}[s]$; ω 是 s 的虚部, 常记作 $\text{Im}[s]$ 。根据尤拉公式, 上式可展开为

$$f(t) = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} \cos \omega t + j e^{\sigma t} \sin \omega t \quad (1.2-13)$$

可见, 一复指数信号可分解为实、虚两部分, 它们分别是增长(或衰减)的余弦、正弦信号。指数因子的实部 σ 表征了余弦和正弦函数的振幅随时间变化的情况。若 $\sigma > 0$, 它们是增幅振荡; 若 $\sigma < 0$, 则是衰减振荡; 当 $\sigma = 0$ 时是等幅振荡信号。指数因子的虚部 ω 表示余弦和正弦函数的角频率。当 $\omega = 0$ 时, 复指数信号就成为实指数信号。如果 $\sigma = \omega = 0$, 则式中 $f(t) = 1$, 这时就成为直流信号。可见, 它概括了许多常用信号。

复指数信号的重要特性之一是: 它对时间的微分和积分仍然是复指数信号。

类似地, 离散信号也有复信号。

(3) 能量信号与功率信号

为了知道信号能量或功率的特性, 常常研究信号(电流或电压)在一单位电阻上所消耗的能量或功率。信号 $f(t)$ 在一单位电阻上的瞬时功率为 $|f(t)|^2$, 在区间 $-T < t < T$ 的能量为

在区间 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 的平均功率为

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt$$

信号能量定义为在时间区间 $(-\infty, \infty)$ 信号 $f(t)$ 的能量,用字母 E 表示,即

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1.2-14)$$

信号功率定义为在时间区间 $(-\infty, \infty)$ 信号 $f(t)$ 的平均功率,用 P 表示,即

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1.2-15)$$

由于被积函数是 $f(t)$ 的绝对值平方,所以信号能量 E 和功率 P 都是非负实数,即使 $f(t)$ 是复函数亦然。

若信号 $f(t)$ 的能量 $0 < E < \infty$ (这时 $P=0$),则称其为能量有限信号,简称为能量信号;若信号 $f(t)$ 的功率 $0 < P < \infty$ (这时 $E = \infty$),则称其为功率有限信号,简称功率信号。单个矩形脉冲、单边指数信号 $e^{-\alpha t} \cdot U(t)$ ($\alpha > 0$)等都是能量有限信号,而阶跃信号、周期信号等是功率有限信号。

离散信号有时也需要讨论能量,序列 $f(k)$ 的能量定义为

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)|^2 \quad (1.2-16)$$

(4) 确知信号和随机信号

确知信号(也称为规则信号)可以表示为一个确定的时间函数(或序列),当给定某一时间值时,函数有确定的数值。前面讨论的各种信号都是确知信号。实际上,由于种种原因,在信号传输的过程中存在着某些“不确定性”或“事先不可预知性”。譬如,在通信系统中,收信者在收到所传送的消息之前,对信息源所发出的消息总是不可能完全知道的,否则通信就没有意义了。此外,“携带”消息的信号在传输和处理的各个环节中不可避免地要受到各种干扰和噪声的影响,使信号失真(畸变),而这些干扰和噪声的具体情况总是不可能完全确知的。这类“不确定性”和“事先不可预知性”统称为随机性。所以,严格来说,一般的信号都是随机信号。研究随机信号要用概率、统计的观点和方法。虽然如此,研究确知信号仍是十分重要的,这是因为它是一种理论上的科学抽象,是研究随机信号的重要基础。本书只讨论确知信号。

§ 1.3 系 统

一、系统模型

要分析任何一个物理系统,首先要建立该系统的模型。所谓模型就是系统基本特性的数学抽象,它以数学表示式或用具有理想特性的符号组合成图形来表征系统的特性。然后用数学方