现代数学译丛 4

最优化问题的扰动分析

〔法〕J.F.博南
〔美〕A.夏皮罗 著

张立卫 译

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学译丛 4

最优化问题的扰动分析

〔法〕J. F. 博南
〔美〕A. 夏皮罗 著
张立卫 译

科学出版社
北京

图字: 01-2007-3536 号

内 容 简 介

本书是最优化领域关于最优化问题的解如何依赖于参数扰动而变化,以及相关的一阶尤其是二阶最优性条件的最新成果的专著. 作者把很多在当前文献中不太常见的素材综合在一起, 形成一完整的理论体系. 本书给出了凸分析、对偶理论等有价值的若干专题的丰富素材, 很多素材在其他文献中没有出现过. 本书还详细地研究了最优化问题扰动理论在非线性半定规划和非线性半无限规划中的应用. 尤其, 本书既讨论了无穷维的优化问题,又讨论了有穷维的优化问题.

本书可供运筹学与控制论专业的研究生及从事相关学科研究的研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

最优化问题的扰动分析/〔法〕J. F. 博南,〔美〕A. 夏皮罗著. 张立卫 译.
—北京: 科学出版社, 2008
(现代数学译丛; 4)
ISBN 978-7-03-020429-5
I. 最… II. ①J… ②A… ③张… III. 最佳化–扰动–分析 IV. O224
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 064068 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
丽 源 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 6 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)
2008 年 6 月第一次印刷 印张: 37 3/4
印数: 1—3 000 字数: 709 000

定价: 88.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

中 文 版 序

本书的素材大致可以分为三部分. 第一部分给出所需的凸分析工具, 它们构成现代优化理论的基础. 具体地, 我们详尽地讨论了共轭对偶性、多值函数理论与微分学基础中的某些方面. 在第二部分, 这些工具被用于发展一阶与二阶最优性条件与参数最优化问题的最优值与最优解的扰动/变分理论. 本书最后几章处理这些一般性的结果在非线性规划、半定规划、半无限规划与最优控制中的应用. 对这些领域感兴趣的读者可以先阅读这些章节的内容.

尽管最近几年在随机规划与最优控制理论领域取得了有价值的进展, 我们相信本书仍然可以作为对优化理论感兴趣的学生和研究者一本有用的入门书.

我们期望本书的中文译本对这些素材在新一代学生中的传播起到帮助作用, 并带来最优化理论与应用的新的令人振奋的发展. 大连理工大学应用数学系张立卫教授在翻译过程中承担了大量的工作, 我们对此表示感谢, 同时感谢新加坡国立大学孙德锋教授的支持与鼓励.

J.F. 博南
INRIA and Ecole Polytechnique, France
A. 夏皮罗
Georgia Institute of Technology, USA
2007 年 8 月 20 日

中译本序

《最优化问题的扰动分析》一书由两位国际著名的优化专家 Bonnans 和 Shapiro 于 2000 年出版. 该书系统地介绍了优化和变分问题理论方面的最新成果. 其中, 对于非线性锥优化的阐述尤其深刻和全面. 该书是通向现代优化的入门工具, 对广大年轻的优化工作者具有十分重要的指导意义.

该书的中文版是由大连理工大学的张立卫教授历经数年几易其稿翻译而成. 该书的顺利出版必将帮助国内的优化研究迅速达到国际前沿并做出一系列领先的成果.

孙德锋
新加坡国立大学数学系
2007 年 10 月 20 日

译 者 序

本书的两位作者 Bonnans 教授和 Shapiro 教授对译者的翻译工作非常支持, 他们把最新的勘误表寄给译者并为中文译本欣然作序. 新加坡国立大学的孙德锋博士一直关注着本书的翻译和出版工作, 给译者持久的鼓励和支持, 并在百忙之中抽出时间为中文译本写序, 希望中文译本的出版对我国最优化的发展起到帮助作用. 我对以上三位专家表示感谢.

我的博士研究生任咏红、于洪霞、金丽、肖现涛、顾剑、李阳、王韵, 硕士研究生李洁、刘溪、王百青、于桂花等用 CTEX 录入中文译本的原稿, 对他们表示感谢.

由于译者水平所限, 译文的某些地方难免会有不妥之处, 欢迎广大读者批评和指正.

本书中译本的出版得到了国家自然科学基金 (基金项目编号 10771026) 的资助, 在此表示感谢. 最后, 尤其要感谢科学出版社对本书出版所给予的支持.

张立卫
大连理工大学应用数学系
2007 年 10 月 25 日

基本记号

基本集合与空间

$:=$	定义符号
$\equiv$	恒等于
$\varnothing$	空集
$\lvert I\rvert$	集合 I 的元素个数
$x \mapsto f(x)$	点 x 到 $f(x)$ 的映射
$\overline{\mathbb{R}}$	$=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ 增广实线
$\mathbb{R}^n$	n 维欧氏空间
$\mathbb{R}^n_+$	$=\{x\in\mathbb{R}^n : x_i \geqslant 0,\ i=1,\cdots,n\}$ 非负卦限
$\mathbb{R}^n_-$	$=-\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n : x_i \leqslant 0,\ i=1,\cdots,n\}$ 非正卦限
X, Y	Banach 或局部凸的拓扑向量空间
$\mathcal{S}^p$	$p\times p$ 对称矩阵构成的线性空间
$\mathcal{S}^p_+(\mathcal{S}^p_-)$	$p\times p$ 的正 (负) 半定矩阵构成的锥
$\mathcal{W}_r$	$\subset \mathcal{S}^p$ 秩为 r 的矩阵的集合
ℓ_2	满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2<\infty$, $\\|x\\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2}$ 与 $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i$, $x,y\in\ell_2$ 的序列 $x=(x_i)_{i=1}^{\infty}$ 构成的 Hilbert 空间
$L_2[0,1]$	平方可积的实值函数 $\psi(t)$ 的等价类构成的 Hilbert 空间, 其中 $\psi_1\sim\psi_2$ 的含义是对除了可能的零 Lebesgue 测度集合外的所有 $t\in[0,1]$, 均有 $\psi_1(t)=\psi_2(t)$, 且$\langle\psi,\phi\rangle=\int_0^1 \psi(t)\phi(t)\mathrm{d}t$
$L_P(\Omega,\mathcal{F},\mu)$	具有有限范数 $\\|\psi\\|_p:=\left(\int_\Omega \lvert\psi(\omega)\rvert^p \mathrm{d}\mu(\omega)\right)^{1/p}$ 的 $\mathcal{F}$ 可测函数 $\psi:\Omega\to\mathbb{R}$ 构成的 Banach 空间
$[L_p(\Omega)]_+$	$\subset L_p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 是几乎处处非负值函数的集合
$C(\Omega)$	定义于紧致度量空间 Ω 的赋予上确界范数 $\\|\psi\\|=\sup\limits_{\omega\in\Omega}\lvert\psi(\omega)\rvert$ 的连续函数 $\psi:\Omega\to\mathbb{R}$ 构成的 Banach 空间
$C^l(\Omega)$	l 次连续可微函数 $\psi:\Omega\to\mathbb{R}$ 的 Banach 空间, 其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$
$C^{1,1}(\Omega)$	$D\psi(\cdot)$ 是局部 Lipschitz 连续的可微函数 $\psi:\Omega\to\mathbb{R}$ 的空间
$\mathcal{D}(\Omega)$	在 Ω 上定义的具有紧致支撑的实值的 C^∞ 光滑函数的集合
$C_{00}(\Omega)$	在 Ω 中具有紧致支撑的连续函数的集合
$\mathcal{O}_{K,m}$	与在 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的拓扑相联系的桶集族

$\mathcal{O}_K$	与在 $C_{00}(\Omega)$ 上的拓扑相联系的桶集族
$W^{m,s}(\Omega)$	$=\{\psi\in L_s(\Omega): D^q\psi\in L_s(\Omega),$若$|q|\leqslant m\}$Sobolev 空间, 其中 $D^q\psi=\partial^{|q|}\psi/\partial x_1^{q_1}\cdots\partial x_l^{q_l}$ 且 $|q|=q_1+\cdots+q_l$
$W_0^{m,s}(\Omega)$	在 $W^{m,s}(\Omega)$ 中 $\mathcal{D}(\Omega)$ 的闭包
$W^{1,\infty}(\Omega)$	Lipschitz 连续函数 $\psi:\Omega\to\mathbb{R}$ 的 Banach 空间
$H^m(\Omega)$	Sobolev 空间$W^{m,2}(\Omega)$
$H^{-1}(\Omega)$	$H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间
$W^{-1,s'}(\Omega)$	$W_0^{1,s}(\Omega)$ 的对偶空间
$C_+(\Omega)$	空间 $C(\Omega)$ 中的非负值函数的集合
$C_-(\Omega)$	空间 $C(\Omega)$ 中的非正值函数的集合
$\mathcal{L}(X,Y)$	赋予算子范数 $\\|A\\|=\sup\limits_{x\in B_X}\\|Ax\\|$ 的线性的连续算子 $A:X\to Y$ 构成的空间
X^*	$=\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, X 的对偶空间
$B(x,r)$	$=\{x'\in X:\\|x'-x\\|<r\}$, 中心为 x 的半径为 $r>0$ 的开球
B_X	$=B_X(0,1)$, X 的单位开球
$\overline{B}_X$	X 的闭单位球
$[\\![x]\\!]$	$=\{tx:t\in\mathbb{R}\}$,由 x 生成的线性空间
2^X	X 的子集构成的集合
$\dim(X)$	线性空间 X 的维数
$\mathcal{P}_\Omega$	$=\{\mu\in C(\Omega)^*:\mu(\Omega)=1,\mu\succeq 0\}$, Ω上的概率测度的集合
$\mathrm{cap}(A)$	集合 A 的容量 (capacity)

矩阵与向量

$\langle\alpha,x\rangle$	线性泛函 $\alpha\in X^*$ 在 $x\in X$ 处的值
$x\cdot y$	$=\sum\limits_{i=1}^n x_iy_i$ 两个有限维向量 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 的数积
A^{T}	矩阵 A 的转置
$\mathrm{rank}(A)$	矩阵 A 的秩
$\mathrm{vec}(A)$	矩阵 A 的列拉直得到的向量
$A^\dagger$	矩阵 A 的 Moore-Penrose 伪逆
$\mathrm{trace}A$	$=\sum\limits_{i=1}^p a_{ii}$, $p\times p$ 矩阵 A 的迹
$A\cdot B$	$=\mathrm{Tr}(AB)$, 两个对称矩阵 $A,B\in\mathcal{S}^p$ 的数积
$A\otimes B$	A 与 B 的 Kronecker 积
$\lambda_{\max}(A)$	对称矩阵 $A\in\mathcal{S}^p$ 的最大特征值
$A\succeq 0(A\preceq 0)$	矩阵 $A\in\mathcal{S}^p$ 是正 (负) 半定的
I_p	$p\times p$ 单位矩阵

集合上的运算

$\mathrm{Sp}(S)$	$=\mathbb{R}_+(S-S)$ 由集合 $S\subset X$ 生成的线性空间
$\mathbb{R}_+(S)$	$=\{tx : x\in S, t\geqslant 0\}$ 集合 $S\subset X$ 生成的锥
$\mathrm{cl}(S)$	集合 $S\subset X$ 的拓扑包, 若 X 是 Banach 空间, 闭包是关于范数 (即强) 拓扑取的
$\mathrm{int}(S)$	$=\{x\in S:$ 存在x的邻域V满足$V\subset S\}$, 集合 S 的内部
$\mathrm{bdr}(S)$	(也记为 ∂S)$=\mathrm{cl}(S)\setminus\mathrm{int}(S)$, 集 S 的边界
$\mathrm{ri}(S)$	$=\{x\in S:$ 存在 x 的邻域 V 满足 $V\cap(x+L)\subset S\}$(其中 $L:=\mathrm{cl}\,\mathrm{Sp}(S)$) 凸集 S 的相对内部
$\mathrm{core}(S)$	$=\{x\in S:\forall x'\in X,\exists\varepsilon>0,\forall t\in[-\varepsilon,\varepsilon], x+tx'\in S\}$
$\mathrm{dist}(x,S)$	$=\inf\limits_{z\in S}\|x-z\|$, $x\in X$到集合 $S\subset X$ 的距离
$\mathrm{Haus}(S,T)$	$=\max\left\{\sup\limits_{x\in S}\mathrm{dist}(x,T),\sup\limits_{x\in T}\mathrm{dist}(x,S)\right\}$, 集合 S 与 T 间的 Hausdorff 距离
$S^{\perp}$	$=\{\alpha\in X^*:\langle\alpha,x\rangle=0,\forall x\in S\}$, 集合 $S\subset X$ 的直交补
S^{∞}	$=\{h\in X:\exists x\in S,\forall t\geqslant 0, x+th\in S\}$, 凸集 S 的回收锥
$\sigma(\alpha,S)$	$=\sup\limits_{x\in S}\langle\alpha,x\rangle$, 集合 S 的支撑函数
$I_S(\cdot)$	集合 S 的指示函数
$\mathrm{conv}(S)$	集合 S 的凸包
$\mathrm{diam}(S)$	$=\sup\limits_{x,x'\in S}\|x-x'\|$, 集合 S 的直径
C^-	$=\{\alpha\in X^*:\langle\alpha,x\rangle\leqslant 0,\forall x\in C\}$, 锥 $C\subset X$ 的极 (负对偶), 其中 X 与 X^* 是成对的空间
$\mathrm{lin}(C)$	凸锥 C 的线子空间
$a\preceq_C b$	由锥 C 引导的序关系, 即 $b-a\in C$
$a\vee b$	a 与 b 的最小上界
$a\wedge b$	a 与 b 的最大下界
$[a,b]_C$	$=\{x: a\preceq_C x\preceq_C b\}$, 相对于序关系 "$\preceq_C$" 的区间
$G\,\overline{\pitchfork}_x\,W$	意味着映射 G 在点 x 处与流形 W 横截的相交

切　　集

$T_S(x)$	$=\limsup\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{S-x}{t}$, 集合 S 在点 $x\in S$ 处的余 (bouligand) 切锥
$T_S^i(x)$	$=\liminf\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{S-x}{t}=\{h\in X:\mathrm{dist}(x+th,S)=o(t);t\geqslant 0\}$, 集合 S 在点 $x\in S$ 处的内切锥
$T_S^c(x)$	集合 S 在 $x\in S$ 处的 Clarke 切锥
$\mathcal{R}_S(x)$	$=\{h\in X:\exists t>0, x+th\in S\}$, 凸集 S 在点 $x\in S$ 的雷达锥
$T_S(x)$	$=\mathrm{cl}[\mathcal{R}_S(x)]=T_S^i(x)$, 凸集 S 在点 $x\in S$ 处的切锥

$T_S^2(x,h)$	$=\limsup\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{S-x-th}{\frac{1}{2}t^2}$，集合 S 在点 $x\in S$ 处沿方向 h 的外二阶切集
$T_S^{i,2}(x,h)$	$=\liminf\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{S-x-th}{\frac{1}{2}t^2}$，集合 S 在点 $x\in S$ 处沿方向 h 的内二阶切集
$T_S^{i,2,\sigma}(x,h)$	$=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\dfrac{S-x-t_nh}{\frac{1}{2}t_n^2}$，与序列 $\sigma=\{t_n\}$, $t_n\downarrow 0$ 相联系的序列二阶切集
Σ	收敛于零的正数序列 $\sigma=\{t_n\}$ 的集合
$N_S(x)$	$=[T_S(x)]^-$集合 $S\subset X$, 在 $x\in S$ 处的法锥
$N_S(x)$	$=\{\alpha\in X^*:\langle\alpha,z-x\rangle\leqslant 0,\forall z\in S\}$，凸集 S 的法锥
$PN_S(x)$	S 在 x 处的追近法向量的集合
$PN_S^\delta(x)$	S 在 x 处的 δ 追近法向量的集合

函数与算子

f	$X\to\overline{\mathbb{R}}$, 增广实值函数
$\mathrm{dom}f$	$=\{x\in X:f(x)<+\infty\}$，函数 f 的定义域
$\mathrm{gph}f$	$=\{(x,f(x)):x\in X\}\subset X\times\mathbb{R}$，函数 f 的图
$\mathrm{epi}f$	$=\{(x,\alpha):\alpha\geqslant f(x),x\in X\}\subset X\times\mathbb{R}$，函数 f 的上图
$\mathrm{lsc}f(x)$	$=\min\{f(x),\liminf\limits_{x'\to x}f(x')\}$，$f$ 的下半连续包
$\mathrm{cl}f(x)$	函数 f 的闭包
$\mathrm{conv}f$	函数 f 的凸包
$\mathrm{lev}_{\leqslant\alpha}f$	$=\{x\in X:f(x)\leqslant\alpha\}$，函数 f 的水平集
$f^*(x^*)$	$=\sup\limits_{x\in X}\{\langle x^*,x\rangle-f(x)\}$，函数 f 的共轭
$\hat{f}_\varepsilon(\cdot)$	函数 f 的 Moreau-Yosida 正则化
$f\diamond g(u)$	$=\inf\limits_{x\in X}\{f(u-x)+g(x)\}$, 增广实值函数 $[f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}]$ 的下卷积
$f\circ g$	映射 $g:X\to Y$ 与映射 (增广实值函数)$f:Y\to Z$ 的复合, 即 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$\lambda^\perp$	$=\ker\lambda=\{y\in Y:\langle\lambda,y\rangle=0\}$，$\lambda\in Y^*$ 的零空间
$\mathcal{N}(Q)$	$=\{x\in X:Q(x)=0\}$，二次形式 $Q:X\to\mathbb{R}$ 的零空间
$A^*:$	$Y^*\to X^*$, 连续的线性算子 $A:X\to Y$ 的伴随算子, 即对所有的 $x\in X$ 与 $\lambda\in Y^*$, $\langle A^*\lambda,x\rangle=\langle\lambda,Ax\rangle$
$\prod_S(x)$	$=\operatorname*{argmin}\limits_{z\in S}\|x-z\|$，点 x 到 S 上的集值度量投影
$P_S(x)$	$\in\prod_S(x)$，点 x 到 S 上的度量投影
$\triangle y$	$=\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial^2y}{\partial\omega_i^2}$，Laplace 算子
$\delta(\omega)$	在点 ω 处的质量 1 的测度 (Dirac 测度)

$\mu \geqslant 0$	意味测度 μ 是非负值的
$\mathrm{supp}(\mu)$	测度 μ 的支撑
$\lvert\mu\rvert$	测度 μ 的全变差
$[a]_+$	$=\max\{0,a\}, a\in\mathbb{R}$
$\forall$	对任意的
$\exists$	存在

多值函数

$\Psi:$	$X\to 2^Y$, 多值函数 (点到集合映射), 它将 X 映到 Y 的子集构成的集合上
$\mathrm{dom}\Psi$	$=\{x\in X:\Psi(x)\neq\varnothing\}$, Ψ 的定义域
$\mathrm{range}(\Psi)$	$=\Psi(X)=\{y\in Y:y\in\Psi(x),x\in X\}$, Ψ 的值域
$\mathrm{gph}(\Psi)$	$=\{(x,y)\in X\times Y:y\in\Psi(x),x\in X\}$, Ψ 的图
$\Psi^{-1}(y)$	$=\{x\in X:y\in\Psi(x)\}$, Ψ 的逆多值函数
$\limsup\limits_{x\to x_0}\Psi(x)$	$=\{y\in Y:\liminf\limits_{x\to x_0}[\mathrm{dist}(y,\Psi(x))]=0\}$, 多值函数 Ψ 在 x_0 处的上集合极限
$\liminf\limits_{x\to x_0}\Psi(x)$	$=\{y\in Y:\limsup\limits_{x\to x_0}[\mathrm{dist}(y,\Psi(x))]=0\}$, 多值函数 Ψ 在 x_0 处的下集合极限

极限与导数

$r(h)=o(h)$	意味着当 $h\to 0$ 时 $r(h)/\lVert h\rVert\to 0$
$r(h)=O(h)$	意味着对 $0\in X$ 的邻域中的所有 h, $r(h)/\lVert h\rVert$ 是有界的
$\nabla f(x)$	$=\left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$, 函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在 $x\in\mathbb{R}^n$ 处的梯度
$\nabla^2 f(x)$	$=\left[\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right]_{i,j=1}^n$, 函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在 $x\in\mathbb{R}^n$ 处的二阶偏导数构成的 Hesse 阵
$Dg(x):$	$X\to Y$, 映射 $g:X\to Y$ 在点 $x\in X$ 处的 (Gâteaux,Hadamard 或 Fréchet, 依赖于上下文) 导数
$D^2g(x):$	$X\to\mathcal{L}(X,Y)$, 映射 g 在点 x 处的二阶导数
$D^2g(x)(h,h)$	$=[D^2g(x)h]h$, 对应于 $D^2g(x)$ 的二次型
$D_xg(x,u)$	映射 $g:X\times\mathcal{U}\to Y$ 的偏导数
$g'(x,d)$	$=\lim\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{g(x+td)-g(x)}{t}$, 映射 $g:X\to Y$ 在点 x 处沿方向 d 的方向导数
$f'_+(x,d)$	$=\limsup\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{f(x+td)-f(x)}{t}$, 函数 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 的上方向导数
$f'_-(x,d)$	$=\liminf\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{f(x+td)-f(x)}{t}$, 函数 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 的下方向导数

$f''(x;d,w)$ $= \lim\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{f\left(x+td+\frac{1}{2}t^2w\right)-f(x)-tf'(x,d)}{\frac{1}{2}t^2}$， 函数 f 的二阶方向导数

$f_-^{\downarrow}(x,h)$ $= \mathrm{e}-\liminf\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{f(x+th)-f(x)}{t}$， 下方向上图导数

$f_+^{\downarrow}(x,h)$ $= \mathrm{e}-\limsup\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{f(x+th)-f(x)}{t}$， 上方向上图导数

$f_-^{\downarrow\downarrow}(x;h,w)$ $= \mathrm{e}-\liminf\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{f\left(x+th+\frac{1}{2}t^2w\right)-f(x)-tf_-^{\downarrow}(x,h)}{\frac{1}{2}t^2}$，下二阶方向上图导数

$f_+^{\downarrow\downarrow}(x;h,w)$ $= \mathrm{e}-\limsup\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{f\left(x+th+\frac{1}{2}t^2w\right)-f(x)-tf_+^{\downarrow}(x,h)}{\frac{1}{2}t^2}$， 上二阶方向上图导数

$d^2f(x|\alpha)(h)$ $:= \liminf\limits_{\substack{t\downarrow 0\\ h'\to h}} \dfrac{f(x+th')-f(x)-t\langle\alpha,h'\rangle}{\frac{1}{2}t^2}$， 函数 f 在点 x 处关于 $\alpha\in X^*$ 的二阶次导数

$\partial f(x)$ $=\{x^*\in X^*: f(y)-f(x)\geqslant\langle x^*,y\rangle,\forall y\in X\}$， 函数 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 的次微分

最优化问题

val(P) 问题 (P) 的最优值

Φ 问题 (P) 的可行集

$\mathcal{S}$(P) 问题 (P) 的最优解集

$L(x,\lambda)$ $=f(x)+\langle\lambda,G(x)\rangle$， 问题 (P) 的 Lagrange 函数

$L^g(x,\lambda)$ $=\alpha f(x)+\langle\lambda,G(x)\rangle$， 广义的 Lagrange 函数

$L^s(x,\lambda)$ $=\langle\lambda,G(x)\rangle$， 奇异的 Lagrange 函数

$\Lambda(x)$ x 处的 Lagrange 乘子的集合

$\Lambda^g(x)$ x 处的广义 Lagrange 乘子的集合

$\Lambda^s(x)$ x 处的奇异 Lagrange 乘子的集合

$\Lambda_N^g(x)$ $=\{(\alpha,\lambda)\in\Lambda^g(x):\alpha+\|\lambda\|=1\}$， x 处的正规化的广义 Lagrange 乘子的集合

$I(x)$ $=\{i: g_i(x)=0, i=q+1,\cdots,p\}$，在 x 处的起作用的不等式约束的集合

$I_+(x,\lambda)$ $=\{i\in I(x):\lambda_i>0\}$

$I_0(x,\lambda)$ $=\{i\in I(x):\lambda_i=0\}$

$\triangle(x)$ $=\{\omega\in\Omega: g(x,\omega)=0\}$， x 处的起作用的约束 $g(x,\omega)\leqslant 0,\ \omega\in\Omega$ 的集合

$C(x)$ 在点 x 处临界方向的集合 (临界锥)

$C_\eta(x)$	在点 x 处的近似临界锥
(P_u)	以 $u \in U$ 为参数的最优化问题
$\Phi(u)$	参数化问题 (P_u) 的可行集
$v(u)$	$= \mathrm{val}(\mathrm{P}_u) = \inf\limits_{x\in\Phi(u)} f(x,u)$，$(\mathrm{P}_u)$ 的最优值 (边际 (marginal)) 函数
$\mathcal{S}(u)$	$= \mathcal{S}(\mathrm{P}_u) = \operatorname*{argmin}\limits_{x\in\Phi(u)} f(x,u)$，$(\mathrm{P}_u)$ 的最优解集
$\bar{x}(u)$	$\in \mathcal{S}(u)$ (P_u) 的最优 (ε 最优) 解
$L(x,\lambda,u)$	(P_u) 的 Lagrange 函数
$L^g(x,\lambda,u)$	(P_u) 的广义 Lagrange 函数
$L^s(x,\lambda,u)$	(P_u) 的奇异 Lagrange 函数
$\Lambda(x,u)$	问题 (P_u) 的 Lagrange 乘子的集合
$\Lambda^g(x,u)$	问题 (P_u) 的广义 Lagrange 乘子的集合

目　录