

[美]L. K. 蒂莫西 B. E. 博纳 著

状态空间分析导论

上册

胡钦训 刘 颖 译

人 民 教 育 出 版 社

状态空间分析导论

上 册

[美] L. K. 蒂莫西 著
B. E. 博纳

胡钦训 刘颖 译

人民教育出版社

本书是根据 L. K. Timothy 与 B. E. Bona 所著的 *State Space Analysis: an introduction* 一书译出的。该书介绍了状态空间分析的初步知识，是从状态空间观点来阐明控制过程数学原理的一本较好的入门书。

译本分上、下两册出版。本书为上册，包括原书前五章及两个附录。主要内容为：系统的概念；有限维矢量空间，矩阵与线性算子，状态空间与状态方程；线性微分系统。

本书可作为应用数学、控制论及其他工科有关专业的师生的教学参考书，也可供应用数学工作者及有关工程技术人员参考。

状态空间分析导论

上册

[美] L. K. 蒂莫西 著
B. E. 博纳

胡钦训 刘颖 译

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

开本850×1168 1/32 印张6.5 字数150,000

1981年12月第1版 1983年6月第1次印刷

印数 00,001—9,000

书号 13012·0705 定价 0.87 元

译者的话

本书是从状态空间观点来阐明控制过程数学原理的一本较好的入门书。它的特点是精辟地用数学语言表达了状态空间理论的基本要点。此书在第三、四章提供了必要的数学基础理论，因此对于工程技术人员，读起来是方便的。它所提供的实际例题都是十分简单的，因而又适用于数学工作者。所以此书不但是一本较好的教材，而且对于对状态空间控制理论有兴趣的应用数学工作者与工程技术人员来说也是易读的参考书。因此我们认为有必要把此书介绍给国内广大读者。

1979年我们曾把此书作为常微分方程与控制专业研究生试用教材，教学双方都认为这是一本合适的教学用书。

对原书中印刷上的错误我们都尽力加以改正，有些定理漏了的条件都补上了。倘因此而引起错误，概由译者负责。

译者1981年国庆节于北京工业学院

序 言

本书的目的是介绍状态空间分析的初步知识。内容的一般论述从工程师观点看来也许是稍微严格些，可也不是从数学家的观点来处理的。在本书的写作上，我们试图用自然而又精确的数学语言表达状态空间理论的基本要点，也试图保持一定程度的数学严密性，但不是为了严密而严密。从数学上说，书中内容大约介于工程师的传统“应用”数学与数学家的“纯粹”数学之间。

我们认为关于这个内容的流行书籍不是写给“理论家”的（严格的数学）就是写给工程师的（数学手册）。因此我们力求使这本书能把理论家和实际工作者之间的空白沟通起来而不偏于那一方面。本书是为大学三、四年级和第一年研究生写的。

本书内容并不专对工程的某种特殊领域。我们着重于把数学概念与有关的动态系统相连系，不论后者在性质上是电学的、机械的还是化学的；从状态空间的观点研究动态系统的微分方程，而不管其起源。此外，采用的工程学科的例题都十分简单，我们不去阐述例如自动驾驶装置或原子核反应堆的控制问题等传统例子，这些复杂而深奥的例子使读者加重负担而且可能分散对数学概念的注意力。大量的练习题列在每章的后面，这些练习题从内容和难度上都各不相同。

本书的内容主要是讨论状态空间概念，并且在这方面几乎是自封的。换言之，我们认为这本教科书可以容易地作为系统理论的初级课本。虽然我们假定读者已经学过微分方程课程甚至一些拉普拉斯变换理论，但是并不要求这些科目中的某些深的知识。本书首先讨论的是和状态空间分析方法有关的概念与数学。例如第二、三章中介绍了应用于状态空间分析的基础数学。在这两章

中对线性空间与矩阵理论作了扼要而广泛的论述。在第二章“有限维矢量空间”中借助于几何的直观想法建立了线性空间的数学，对于状态空间分析这是基本知识。我们认为对线性空间的严密性必须预先有牢固的基础。

必需的数学的绝大部分已包含在第二、三章中。如果要学习这两章的整个内容大约需要一个季度。可是我们要指出，这两章的内容并非在以后学习中都是必需的。对于全书各章也是一样的。这就是说，有些小节可以越过而不失连贯性。有些内容在以后的学习中是必要的，读者也可以把这些内容的学习推迟到需要的时候。例如第二章的 § 2.7 与 § 2.10 可以越过而不失连贯性。第三章中读者可推迟或越过 § 3.6, § 3.7 及 § 3.13。

一般说来，这本书的广泛的内容需要不少于两个季度的学习。如果教师认为第二、三章的内容是学习状态空间分析必须预先具备的，可以把第四到九章的绝大部分内容安排在一个季度内。

参考书以著者字母为序列在每章之后，在书中引用参考书处以方括号列出著者姓名及发表年代，例如 [Murdock, 1957]。方括号是提醒读者注意，这里是表示参考文献，标出年代是避免含混。

我们感谢在 Autonetics，洛杉矶加州大学分部和犹他大学的同事和学生们对本书的准备工作提出的建议和批评。尽管本书还有许多缺点，我们认为这种友好的意见已使本书成为一本较为易读的书。

L.K. 蒂莫西

B.E. 博 纳

目 录

序言	1
第一章 预备知识	1
1.1 引言	1
1.2 系统概念	1
1.3 结束语	7
第二章 有限维矢量空间	9
2.1 引言	9
2.2 标量与数域	9
2.3 线性空间的基本概念	10
2.4 n 维空间	11
2.5 矢量空间的抽象定义	15
2.6 线性相关、基底与维数	16
2.7 子空间与超平面	22
2.8 内积空间	25
2.9 复内积空间	32
2.10 正交空间与正投影	33
第三章 矩阵与线性算子	44
3.1 历史梗概	44
3.2 矩阵与矩阵代数	44
3.3 秩与逆	52
3.4 线性型与线性算子	58
3.5 基底变换与相似性	64
3.6 伴随算子	67
3.7 值域与零空间	69
3.8 特征矢量与不变子空间	71
3.9 对角形化	76

3.10	矩阵函数	79
3.11	二次型	81
3.12	矩阵范数	84
3.13	矩阵微积分	85
第四章	状态空间与状态方程	98
4.1	引言	98
4.2	状态	98
4.3	记号与定义	102
4.4	线性系统	106
4.5	时不变性	110
4.6	脉冲响应与传递函数	114
4.7	状态方程	117
	互反微分系统	120
	一般微分算子系统	127
	部分分式展开	132
4.8	多输入多输出系统	139
4.9	结束语	144
第五章	线性微分系统	151
5.1	引言	151
5.2	解空间与基函数	151
5.3	微分系统	157
5.4	状态的判定	161
5.5	线性时变微分系统	162
	自由系统	162
	强迫响应	166
5.6	时不变系统	169
	矩阵指数式	170
	自由系统	171
	强迫响应	174
5.7	脉冲响应函数矩阵与传递函数矩阵	174
5.8	结束语	178
附录 I	拉氏变换简表	183
附录 II	方框图与信流图	184

第一章 预备知识

1.1. 引言

本章首先打算介绍给读者的是有关系统的分析与设计的直观概念与想法。我们给出系统概念的有点叙述性的描述并且列出要研究的系统的类型。

1.2. 系统概念

系统这个术语是全书经常使用的。我们不想给出系统的一个明确且精密的定义。相反，下面这个有点明显且直观的定义对于我们的需要来说就是足够的了：一个物理系统 S 定义为诸物理元素或对象之间的一个关系，而一个抽象系统 S 定义为一个数学过程。这个定义是有点含糊的，但是对我们的目标来说是适当的，因为系统的概念对读者的掌握来说首先是一个直观的想法。下面的例子说明物理系统的概念。

例 1.2-1 考察图 1.2-1 所示的系统 S_1 与 S_2 。系统 S_1 在性质上是力学的，对应的元素是原动力、弹簧、质量及缓冲器。系统 S_2 在性质上是电学的，对应的元件是电源、电阻、电容及电感。描述这些元件互相关联及互相作用的数学模型分别为

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + r \frac{dy}{dt} + ky = f$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = v$$

其中 m, r, k 及 f 对应于 S_1 的质量、缓冲器的摩擦系数、弹性常数及 S_1 的原动力；而 L, R, C 及 v 对应于 S_2 的电感、电阻、电容及 S_2 的电源。记号 y 、 i 及 t 对应于位移、电流及时间。

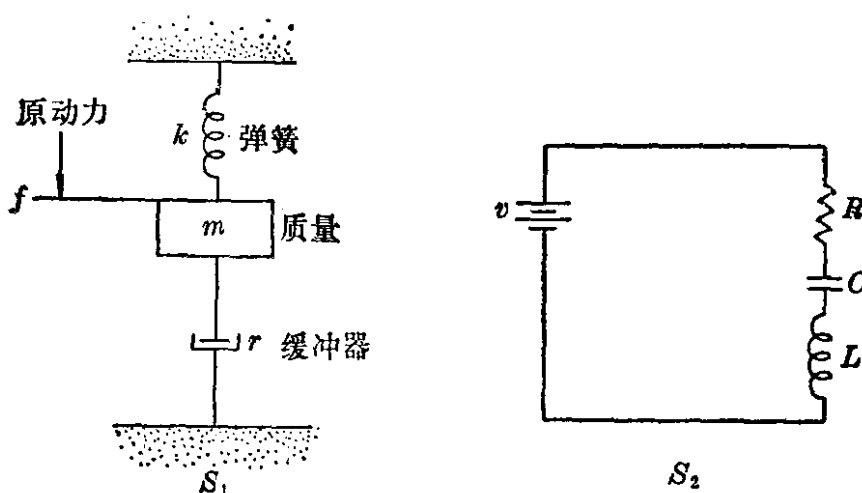


图 1.2-1 两个物理系统的例子, S_1 与 S_2 .

系统的概念是相当广泛的, 它并不限于如上所述的简单力学及电学装置; 这个概念同样可用于更深奥复杂的系统, 例如汽车与导弹, 也可用于其它领域, 例如生物学、社会学、商业甚至于农业, 在农业中就遇到灌溉系统. 我们所采用的观点一般来说是数学的. 我们不打算列出各种系统的众多的数学模型, 而是把这个方面的问题留给各种专家们. 然而在例 8.2-1 中我们描述了一个抽象系统并建立了适当的数学模型. 读者无疑会遇到或关心这个系统, 因为它在商业界是经常会出现的.

本书几乎完全专门致力于动态系统. 我们仍不会给出动态系统一个确切的并公理化的定义[Kalman, 1963]. 对我们的目标来说, 动态系统是一个系统, 其输入与输出是用微分(或差分)方程组关联起来的.

让我们把上述的动态系统的定义和原因与结果的观点即因果律联系起来. 考察宏观质点系在一组力的作用下的运动, 若现在的位置和动量以及现在与未来的力均为已知时, 则根据牛顿力学, 质点系的未来的运动就完全确定了. 未来的力对现在是没有影响的(非预期系统), 且系统如何达到它现在的状态也是不重要的.

依据定义，对质点系的输入是力。系统的输出可定义为能直接观测的任何变量(位置或动量)。系统的运动自然是由牛顿力学所导出的一组微分方程所描述。质点的位置和动量完全确定了系统的运动，它们描述着系统的状态。直观地说，系统的状态是关于系统的过去的现在信息的最小量，它能使我们预料过去对将来的影响。用于描述系统状态的变量称为状态变量。

状态及状态变量的概念在本书中是要充分地阐述的。用这些概念来分析系统需要足够的有限维矢量空间或抽象线性代数以及有关的矩阵论的数学知识。这些内容将在第二章及第三章中介绍之。

现在介绍控制系统的概念。在控制系统工程师的口语中，一个控制系统被认为包含两个基本部分，即被控系统(也称为装置)和控制器，如图 1.2-2 所示。由被控系统(装置)与控制器所构成的“组合系统”通常称之为控制系统。

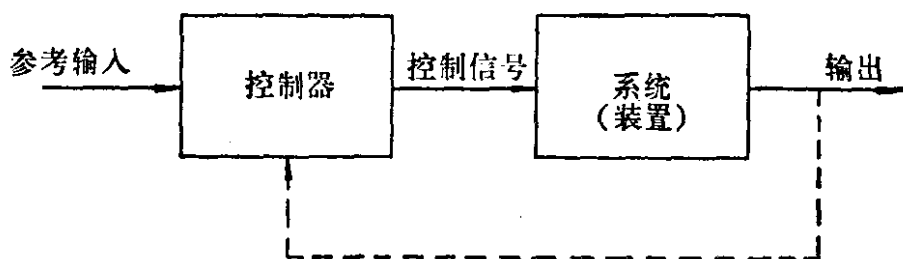


图 1.2-2 控制系统的两个部分。

一般区分控制系统为开环或闭环。闭环系统也常称为反馈系统或反馈控制系统。在开环系统中，控制器命令装置按照参考输入“动作”。如图 1.2-2 的虚反馈线在开环系统中是不存在的。换言之，系统的输出不能以任何直接方式用以控制装置。

今考察闭环系统。如图 1.2-2 所指出的参考指标与系统的输出均送入控制器。控制器使系统的输出与参考指标相比较，并强迫或命令系统按照这两种信号之差(在某种意义下)为最小来“动作”。从控制器出来的信号(称为指令或控制)依赖于系统(装置)

的输出信号,因此“组合系统”称为反馈系统。

反馈系统的概念不仅可用于机器上,也可用于各种被控动态过程。作为一个例子,考察保险公司的业务。管理处确定保险人保险率及股东红利的意义上可认为是控制器。在这时参考指标是最大红利和最小保险率。反馈来源于保险人和股东。管理处以利润和公司关于保险率的竞争形势为依据评价反馈信息,必要时可以调整保险率并发出新的指示。

人和动物的器官功能是反馈过程的另外一些例子。例如,就人的眼睛来说,虹膜张开能使光线经过晶状体映入视网膜上。当视网膜上光线太强了,这个信号反馈到虹膜,它就调节张开的程度以接收适量的光线。

谈到电动机,传统地说,人就是控制器。例如在车床的操纵上,当人去调整一些变量,如车床的速率以及切削刀具的角度与深度时,人就起到了控制器的作用。(这个例子是开环系统或者闭环系统的说明。)今天,更复杂的机器已被设计出来,它们承担控制器的作用。一个数字计算机就能按程序发出命令使车床调整速率和使切削工具变动角度与深度。在车床上由计算机把毛坯的形状与模型(参考物)相比较,当形状与模型一致时,计算机命令系统进行下一步操作。

如前面例子中所指出的,反馈原理是任一个动态过程成功控制的基础。我们生活在一个有活力的世界上;人要出生,成长与死亡;我们要筹办中学和大学;要组织社团和政党;要建造桥梁、公路与机器。这一切活动的成功的操作依赖于反馈原理。人作为控制器与被控系统之间信息的流通在这一切活动中是能被认识的。我们看到的是人根据系统相对于某个理想来说不完全的性能不断调整此系统的控制。

适用于机器及电子设备上的各种不同观点的反馈原理的形式化,发表在英国的马克斯韦尔[1868],美国的米诺尔斯基[1922],

苏联的马尔金[1929]及美国的尼奎斯特[1932]的著作中。首先研究简单系统,该系统有一个输入,一个输出,以及一个反馈信号,如图 1.2-3 所示。在这里,输入信号表达输出所要求的或理想的性质。输出与输入比较,其差形成一个误差信号。误差信号送入补偿方块,它有反应并发出一个控制信号给系统。希望的是系统运行使得误差信号趋于零。

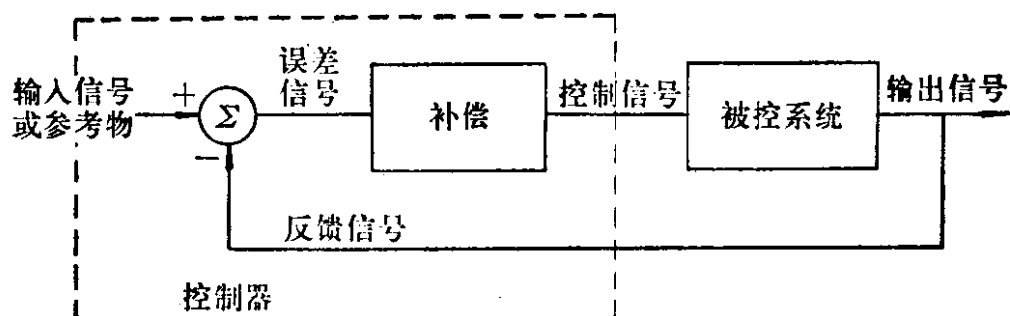


图 1.2-3 一个简单的闭环控制系统。

反馈原理的这种形式化的目标是要建立设计原理使得作为控制器的人能用机器或电子设备来替代。于是就进入了自动化年代。为了合成控制器,必须建立协调的系统的设计原理。从 1932 年到 1950 年左右,对于如图 1.2-3 所示的简单控制系统巨大的发展完成了。它可分为线性的或非线性的,连续的或样本数据的。它可按确定输入与随机输入来分析。模拟技术与模拟计算机及数字计算机一同发展起来。在硬设备的结构可实现性方面对控制器的综合与设计受到了注意。

由于控制系统领域的工艺的发展及数字计算机的诞生,认识、分析与综合了更复杂的系统,也考察了多输入与多输出系统。为了对这些问题建立系统的方法,从 1950 年以来对控制系统的分析与综合的推广作了重大的努力。特别是梅逊[1953]引进了信号流图技术;卡尔曼与裴特拉姆[1958]指出并强调了控制系统动态的状态空间表示法的效用以及庞特里亚金[1956]与贝尔曼[1957]引进一般最优化综合技术。介绍这些一般的近代分析技术给读者是我

们的目的。

在本书中,分析与设计的一般问题细分起来如图 1.2-4 所列. 我们考察与装置分析有关的三个基本论题:

1. 数学模型. 确定系统的一个适当的数学描述(模型).
2. 可控制性. 确定是否可能用一个命令或控制信号来影响装置的所有状态变量.
3. 可观测性. 从易测定的输出,假如可能的话,要计算装置的所有状态变量.

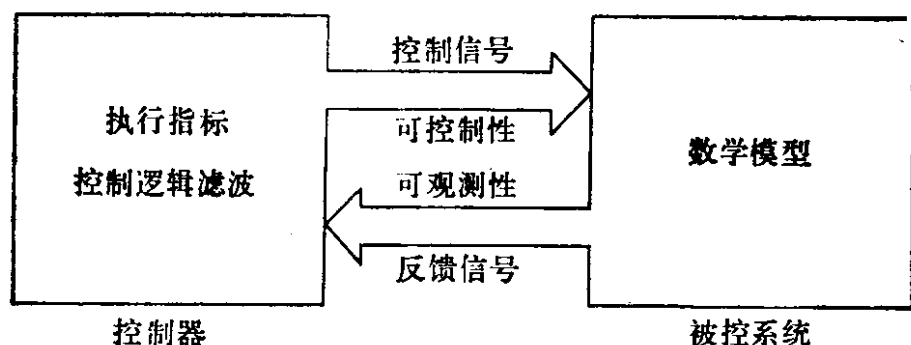


图 1.2-4 一个一般的控制系统。

控制器的设计与分析通常包含下列项目的考察:

4. 执行指标. 要求执行的指标必须定好. 这样的指标的 例子如最少时间、最短距离、最小能量或这些指标的组合。

5. 容许控制信号. 规格或要求必须定好,用来鉴定容许控制信号。

6. 控制逻辑. 4,5 两项定好以后,综合一个最优控制或接近最优控制. 这就是一个最好的或接近最好的控制可从容许控制中挑选出来使得系统从某个初态“运动”到某个所要求的终态,而执行指标在某种意义上是被满足的. 图 1.2-5 说明几条可能的途径,沿着它们控制器可命令装置来运动。

7. 滤波. 通常,控制器制定依赖于系统的状态的控制信号,因而包含在控制器中是一个由被观测的输出计算、估计或确定系

统的状态的装置。

8. 稳定性。闭环系统的稳定性必须确定。稳定性的考察当然影响到控制器的设计。

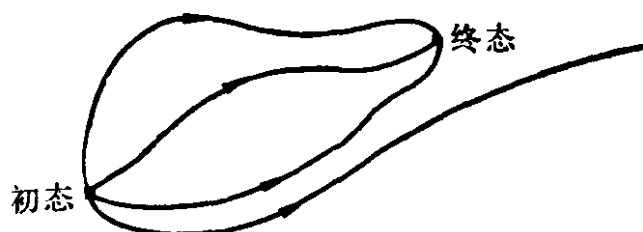


图 1.2-5 系统从初态运动到终态的可能途径。

本书的目的只处理控制系统问题的分析方面。从 4 到 7 所指的设计方面以及数学模型的论题都不加考虑。关于稳定性、可控制性及可观测性诸分析论题在第七章和第九章中将从介绍性课程的观点来处理。

1.3. 结束语

在这一章我们介绍了系统概念的一些直观思想。我们承认这个定义是含糊的，但是觉得在系统理论的介绍性课程中是够用的。在以后各章将涉及在状态空间中分析系统的性态或运动的问题。我们将不详细讨论适当的系统模型的确定问题，而宁可留给各自的专家们去列出他的系统的数学模型。

控制系统的分析与设计本身就是一个反馈过程。分析与设计从某些合适的，但或许是近似的和不适当的模型开始，作了适当的分析与鉴定之后，这个模型可得到改进。于是分析导向更进一步的设计与分析。

提出并阐明用于设计与评价一个广泛控制系统类的现代解析工具是本书的主要目的。

参考书目

- Bellman, R. E.: *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
- Kalman, R. E.: *Mathematical Description of Linear Dynamical Systems*, *SIAM J. Controls*, 1963.
- Kalman, R. E. and J. E. Bertram: *General Synthesis Procedure for Computer Control of Single and Multi-loop Linear Systems*, *Trans.*

- AIEE*, vol. 77, pt. II, pp. 602-609, 1958.
- Malkin, I. G.: The Problem of Existence of Lyapunoff's Functions, *Izv. Kazansk. Phy. Math. Soc.*, vol. 4, 1929-1930, and vol. 5, 1931.
- Mason, S. J.: Feedback Theory: Some Properties of Signal Flow Graphs, *Proc. IRE*, vol. 41, no. 9, pp. 1144-1156, September, 1953.
- Mason, S. J.: Feedback Theory: Further Properties of Signal Flow Graphs, *Proc. IRE*, vol. 44, no. 7, pp. 920-926, July, 1956.
- Maxwell, J. C.: On Governors, *Proc. Roy. Soc. London*, vol. 16, pp. 270-283, 1868.
- Minorsky, N.: Directional Stability and Automatically Steered Bodies, *J. Am. Soc. Naval Engrs.*, vol. 34, p. 280, 1922.
- Nyquist, H.: Regeneration Theory, *Bell System Tech. J.*, vol. 11, pp. 126-147, January, 1932.
- Pontryagin, L. S., et al.: On the Theory of Optimal Processes, *Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R.*, vol. 110, no. 1, pp. 7-10, 1956.

第二章 有限维矢量空间

2.1. 引言

本书极大部分致力于线性系统的研究。其理由是双重的：分析技术得到了充分的发展和了解；且许多物理系统的动态用线性近似来描述就满足要求了。因此线性系统及其有关的分析技术的研究对于状态空间技术的初步研究提供一个方便的起点，并且对进一步的研究建立了必要条件。第二章和第三章介绍数学的基本原理，它用于描述和分析多输入多输出复杂的线性系统。

无疑学生对“矢量”这个词是熟悉的。与它有关的几何观念是有向线段——一个矢量有大小与方向。用自由矢量描述的物理量包括力、速度和加速度。一般来说，这些矢量都设想在二维空间或三维空间中，如在解析几何和力学中一样。

在下列各节中我们推广矢量的定义并介绍矢量空间的概念。我们从像与力这样的自由矢量相联系的基本的几何观念出发来创立理论，并且为了易于一般化而定义矢量的代数表达式。这个方法是为了从二维与三维问题顺利过渡到 n 维问题做好准备。从直观的或几何的方法建立了基本概念之后，我们把为更一般的矢量与矢量空间概念所共有的抽象定义与运算阐述为一组公理。在我们的课程中将看到矢量的各种形式与自由矢量的物理概念无关。虽然如此，在这种情况下我们并不完全抛弃几何的讨论，因为直观能帮助我们去说明与解释许多结果。

2.2. 标量与数域

下面我们提到标量、矢量与数域。对我们的目的来说，实数的直观知识就足够了，但是也假定学生熟悉形如 $a + ib$ 的复数，其中