数学物理方法

上册

陆全康编

上海科学技术出版社

数学物理方法

（上　册）

陆全康　编

上海科学技术出版社

数学物理方法

(上　册)

陆 全 康　编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行　上海市印刷四厂印刷

开本787×1092 1/32　印张5.125　字数118,000

1982年1月第1版　1982年1月第1次印刷

印数 1—18,000

统一书号：13119·986　　定价：(科五) 0.59元

内 容 提 要

本书根据全国理科大学物理类专业数学物理方法课程的教学大纲编写，并参考了工科院校有关专业的教学大纲。分上、下两册，上册为复变函数导论，阐述了复变函数的基本性质及其应用；下册为数理方程和特殊函数，比较系统地介绍了物理和工程技术上的常用解法。

本书可作为综合性大学、高等师范院校、工业大学、电视大学有关专业的教学用书或参考书，也可供中学数学和物理教师以及自学者阅读。

序

本书系作者以1962～1966年和1979年至目前为复旦大学物理类各专业讲授数学物理方法课程的讲义为基础编写而成. 分二册出版，上册为复变函数导论，以解析函数的性质和留数应用为重点；下册为数理方程和特殊函数，以分离变量法、傅里叶变换法、δ函数和格林函数、勒让德多项式和贝塞耳函数为重点.

在教学过程中，参阅了先期出版的同类著作.

这次编写时力求能适应理工科大学和师范院校有关专业的教学需要，以及中学物理、数学教师和工程技术人员学习数学物理方法的需要.

该《数学物理方法》的成稿得到复旦大学数学系、物理系和物理二系广大师生的协助。上海电视大学已采用本书作为教材。作者在此表示衷心感谢。

由于作者水平有限，必然会有错误和不妥之处，恳切地期望读者批评指正.

目　录

第一章

复变函数和解析函数

§1. 复数和它的运算

本节讨论 (1) 复数的定义与几何表示, (2) 复数的运算规则.

复数的定义

$z=x+iy$ 称作复数, 其中 x 与 y 均是实数, 而 i 是一个符号, 称作虚数单位.

x 与 y 二数分别称作复数 z 的实部与虚部, 用记号

$$x=\operatorname{Re} z, \qquad y=\operatorname{Im} z \tag{1.1}$$

来表示.

$z=x+i0$ 看作同实数相合, 而 $z=0+iy$ 称作纯虚数.

例如, $z=3i$ 为纯虚数, $z=5$ 为实数, $z=5+3i$ 为复数.

复数的相等与共轭规定如下:

相等: 当 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, 则称 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 相等.

共轭: 当 $x_1=x_2$, $y_1=-y_2$, 则称 z_1 与 z_2 是互为共轭的, 即复数 z_2 称为 z_1 的共轭复数, 反之亦然, 这可以用记号 $z_1=\bar{z}_2(z_2^*)$ 或 $\bar{z}_1(z_1^*)=z_2$ 来表示.

由此可见, $\overline{x+iy}=x-iy$, 而 $\overline{x-iy}=x+iy$. 例如 $\overline{5+3i}=5-3i$.

复数的几何表示方法

复数一般可采用二种几何的表示方法，即采用复数平面或复数球面.

1. 复数平面

(i) 笛卡儿坐标

在坐标平面 XOY 上，采用坐标为(x, y)的点来表示复数$x+iy$. 注意不用(x, iy)来表示复数，这就是说，复数 $x+iy$ 中的 x 值用实轴(X 轴)上的长度来表示，而 y 值用虚轴(Y 轴)上的长度来表示.

例如，点$(1, 3)$就表示 $1+3i$，而点$(0, 1)$表示 i.

由此可见，在 XOY 平面上每一个具有坐标(x, y)的点，都与一个复数 $z=x+iy$ 对应，反过来也一样. 所以，全部复数与 XOY 平面上的点构成一一对应的关系，XOY 平面称为复数平面或复平面.

还可以在复平面上引入复矢量来表示复数 $x+iy$. 如图 1.1 所示，此矢量从原点出发，指向点(x, y).

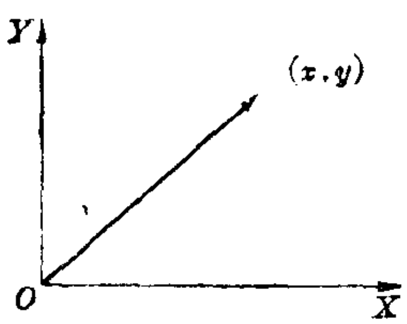

图 1.1

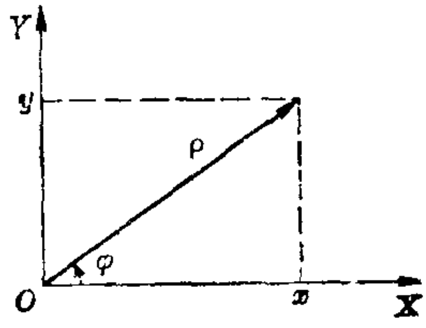

图 1.2

(ii) 极坐标

除了笛卡儿坐标以外，如图 1.2 所示，还可采用极坐标来表示复平面上的点，即引入

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi, \end{cases} \tag{1.2}$$

那么复数可表示成

$$z=x+iy=\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),\tag{1.3}$$

其中 ρ 为复矢量的长度，称作复数的模：

$$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2};\tag{1.4}$$

φ 称作复矢量或复数的幅角：

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg} y/x.\tag{1.5}$$

$z=0$ 的幅角没有确定值，因而不能讲 $z=0$ 的幅角等于多少.

利用(1.2)，可以把任何异于零的复数表示成三角函数形式(1.3).

例如：$i=1(\cos\pi/2+i\sin\pi/2)$,

$1=1(\cos 0+i\sin 0)$,

$1+i=\sqrt{2}\,(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)$.

利用欧拉(Euler)公式

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,\tag{1.6}$$

可把复数的三角函数形式化成复数的指数形式：

$$z=\rho e^{i\varphi}.\tag{1.7}$$

例如：$i=e^{i\pi/2}$,

$-1=e^{i\pi}$,

$1+i=\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$.

2. 复数球面

由于复数平面上的每一点与一个复数构成一一对应，因而可以用复数平面上的点来表示复数．由下面的讨论可以看到复数球面[亦称里曼(Riemann)球面]上的点也可与复数构成一一对应，因而亦可采用复数球面上的点来表示复数.

如图 1.3 所示，把一个球放在复数平面上，使它以南极 S

和复数平面相切于复数平面的原点．对于复数平面上的任一点 A，将点 A 与球的北极 N 连接起来，交球面于 A'，这样复数平面上的每一点均与复数球面上的点构成一一对应．

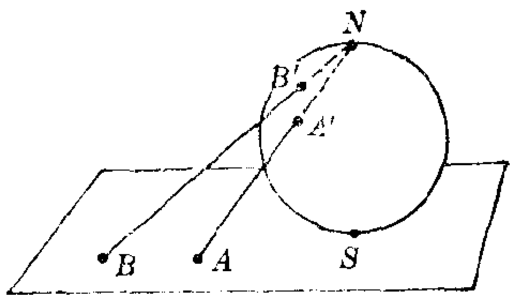

图1.3　复数平面上的点 A、B 分别与复数球面上的点 A'、B' 构成一一对应

在图1.3中还可看到，复数平面上的 B 点比 A 点离原点更远，而 B 点在复数球面上的对应点 B' 却比 A' 更靠近北极点 N．

如果点 A 沿复数平面上的某一根直线（或曲线）伸向无限远，A' 便向北极点 N 趋近．不论 A 按什么方式向无限远移动，A' 便按某种相应的方式趋近于 N．因而 N 点即表示 $z=\infty$，在复变函数论中可将无限远点看成是一点，这在复数球面上是很清楚的．

既然复数平面上的点与复数球面上的点构成一一对应，因而也可将复数平面上的无限远理解成一点．

这里讲复数球面的目的是为了说明无限远是一点，此后，将仅采用复数平面来描述复数的几何性质，只要记得在复数平面上亦将无限远理解成一点。

容易领会，在复平面上，与 $z=0$ 一样，$z=\infty$ 的幅角也无确定值．例如：$2+i\infty$，$0+i\infty$，$\infty+3i$，$3-i\infty$ 等表示沿不同路径趋于同一个无限远点†。

† 按照我们这里引入的定义，在复平面上仅有一个无限远点（对应于球面上的北极点 N）．在整个复变函数导论中，我们均采用这一观念．

然而，在不同的几何学中，也可以认为存在无限远点的无限集合，每一个方向对应着一个无限远点．

复数的运算规则

现在叙述复数运算规则的定义.

1. 加法

复数 $z=z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

称作复数 z_1 与 z_2 的和.

从上述定义可看出加法的几何意义为：二个复矢量的相加规则满足平行四边形法则(参看图 1.4)，即三角形法则.

从定义可直接得出下列加法规则：

(i) 交换律 $z_1+z_2=z_2+z_1$,

(ii) 结合律 $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$.

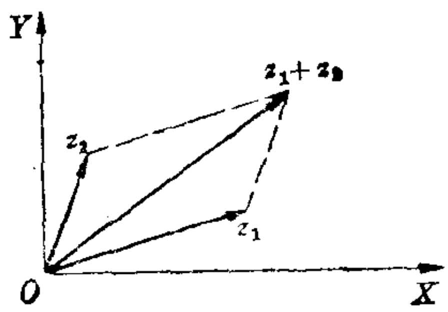

图 1.4

从加法规则可得出复数的差：

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

例如：已知 $z_1=3+4i$; $z_2=2+5i$, 则

$$z_1+z_2=(3+2)+(4+5)i=5+9i;$$

$$z_1-z_2=(3-2)+(4-5)i=1-i.$$

2. 乘法

复数
$$z=z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)$$

称为 z_1 与 z_2 的积.

例如：复数 $i=0+1i$, 即 $x=0$; $y=1$. 由上述定义可得出

$$i\cdot i=-1.$$

这样，复数乘法即可按照代数多项式的乘法规则将 x_1+iy_1 与 x_2+iy_2 相乘，再用 -1 代替 $i\cdot i$ 后即得出结果.

例如：(1) 已知 $z_1=3+4i$; $z_2=2+5i$, 则

$$z_1z_2=(3+4i)(2+5i)=6+15i+8i+20i\cdot i$$
$$=(6-20)+(8+15)i=-14+23i;$$

(2) $(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$,

即 $$z\cdot\bar{z}=|z|^2.$$

两个彼此共轭的复数的乘积是实数，它等于这彼此共轭的复数的模的平方.

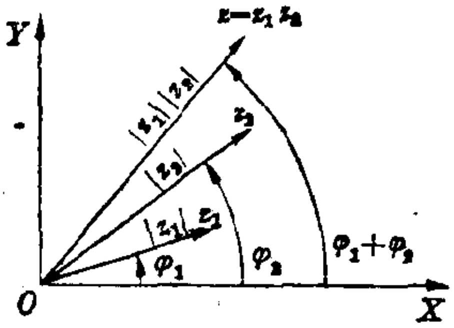

图 1.5

如果采用复数的极坐标表示，就容易看出二个复数相乘的几何意义.

$$z=z_1z_2=\rho_1e^{i\varphi_1}\rho_2e^{i\varphi_2}$$
$$=\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

这表明几何意义为模相乘和幅角相加(参看图 1.5).

例如：已知 $z_1=3e^{i\pi/6}$; $z_2=2e^{i\pi/6}$, 则

$$z=3\cdot2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)}=6e^{i\pi/3}.$$

从乘法定义可得出下列乘法规则：

(i) 交换律 $z_1z_2=z_2z_1$,

(ii) 结合律 $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$,

(iii) 关于加法的分配律 $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

从乘法定义可求得二个复数的相除：当 $z_2\neq0$ 时，

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot\frac{1}{z_2}=\rho_1e^{i\varphi_1}\cdot\left(\frac{1}{\rho_2}e^{-i\varphi_2}\right)=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

例如：已知 $z_1=3e^{i\pi/6}$; $z_2=2e^{i\pi/6}$, 则

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{3e^{i\pi/6}}{2e^{i\pi/6}}=\frac{3}{2}e^{i(\pi/6-\pi/6)}=\frac{3}{2}.$$

上面已将复数及其基本运算规则的定义介绍了．现在举几个应用例子.

(1) 除法

解这类问题,可以利用共轭复数的性质,按下述方法进行复数的除法是比较方便的:(i) 把分子和分母分别乘以分母的共轭复数,于是分母化成正实数;(ii) 分别用分母除实部和虚部.

例 1　求 $\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}$.

解
$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$
$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$
$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

例 2　求 $\frac{1-i}{1+i}$.

解
$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i+i\cdot i}{1+1}=\frac{-2i}{2}=-i.$$

(2) 正整数次方

n 个相同的 z 相乘可记作 z^n, 即
$$z^n=(\rho e^{i\varphi})^n=\rho^n e^{in\varphi},$$
因而, $|z^n|=\rho^n$; 另一方面 $|z|=\rho$, $|z|^n=\rho^n$.

由此得出
$$|z^n|=|z|^n=\rho^n.$$

(3) 开方

注意到同一个复数的幅角可以差 2π 的整数倍, 因而 $\rho e^{i\varphi}$、$\rho e^{i(\varphi+2\pi)}$、…, 即 $\rho e^{i(\varphi+2k\pi)}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 均表示复平面上的同一点;这就是说,它们表示同一个复数:
$$z=\rho e^{i\varphi}=\rho e^{i(\varphi+2k\pi)}.$$
设 n 为正整数,把复数 z 开 n 次方,即
$$\sqrt[n]{z}=z^{1/n}=\left[\rho e^{i(\varphi+2k\pi)}\right]^{1/n}=\rho^{1/n}e^{i(\varphi+2k\pi)/n}.$$

当 k 取 $0, 1, 2, \cdots, n-1$ 时，上式得出的幅角 $(\varphi+2k\pi)/n$ 各不相等；k 取 n 时就与 k 取 0 时的幅角相等，k 取 $n+1$ 时就与 k 取 1 时的幅角相等，依次类推．这样，开 n 次方后就能得到 n 个根．这 n 个根的模相等，但幅角不等．

例如：求 $\sqrt{-1}$.

先将 $z=-1$ 写成指数形式 $z=e^{i\pi}$，再把 z 写成 $z=e^{i(\pi+2k\pi)}$，然后进行开方运算，即

$$\sqrt{z}=z^{1/2}=e^{i(\pi+2k\pi)/2} \qquad (k=0,\ 1),$$

当 $k=0$ 时　　$z^{1/2}=e^{i\pi/2}=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}=i;$

当 $k=1$ 时　　$z^{1/2}=e^{i3\pi/2}=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}=-i.$

由此可见，$\sqrt{-1}$ 有二个根 i 与 $-i$†.

通常采用符号 $\operatorname{Arg} z$ 来表示幅角的多值性：

$$\operatorname{Arg} z=\varphi+2k\pi \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots),$$

可取由不等式 $0<\operatorname{Arg} z\leqslant 2\pi$ 所确定的值作为幅角的主值，它用符号 $\arg z$ 表示.

(4) 二个常用的不等式

(i) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

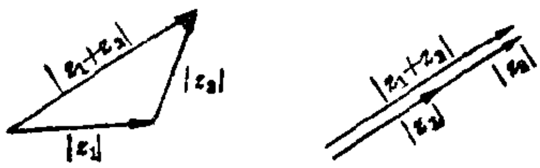

图 1.6

如图 1.6 所示，上式的几何意义表示：三角形二边之和大于第三边，等号当直线情形时成立.

(ii) $|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$.

上式的几何意义表示：三角形一边大于其余二边之差，等号当直线情形时成立.

† 虚数单位 i 为 $\sqrt{-1}$ 的等于 $e^{i\pi/2}$ 的一个根。

§2. 复变函数

本节讨论 (1) 复变函数的定义，(2) 区域的概念.

复变函数的定义

与实变函数的定义类似，当复变数 z 在复数平面上变动时，如果复数 w 的值随复数 z 的值而定，就称 w 为 z 的函数，记作

$$w=f(z), \tag{2.1}$$

z 称为 w 的宗量.

区域

首先要考虑自变量(宗量) z 在复平面上的变化范围，即确定复变函数 w 的定义区域.

区域 D　简单地讲，区域 D 就是复变数 z 的变化范围，不包括边界线. 但这样的定义不严格.

严格定义：复数平面上某一点集 D，如果它具备下述二个性质，则称其为复数平面上的一个区域：

(i) 每一点都是内点(开集性)；

(ii) 任意二点 z 都可用一条由点集 D 内的点所构成的曲线连接起来(连通性).

为了引入内点的概念，现在引入下列定义：

点 a 的 ε 邻域　以复数 a 为圆心，任意小的正实数 ε 为半径的一个开圆，即符合 $|z-a|<\varepsilon$ 的那些点的集合称作点 a 的 ε 邻域.

内点　该点的 ε 邻域中的各点均属于组成区域 D 的点.

境界点　该点本身不属于区域 D，但在其 ε 邻域内含有

属于区域 D 的点.

外点　该点本身不属于区域 D，且其 ε 邻域内不含属于区域 D 的点.

由此可见，境界点组成边界(境界)，区域仅包含内点，不包含境界点，所以区域的概念是开的，其边界不明确. 但是

区域 D+边界 Γ = 闭区域(或闭域) $\overline{D}$.

闭区域的边界是明确确定的.

例如：(开)区域(区域不包括边界)

$|z|<a$(图 1.7a)，

闭区域(闭区域包括边界)

$|z|\leqslant a$(图 1.7b)，

区域(区域不包括二条边界)

$a<|z|<b$(图 1.7c).

(以上 a、b 为实常数)

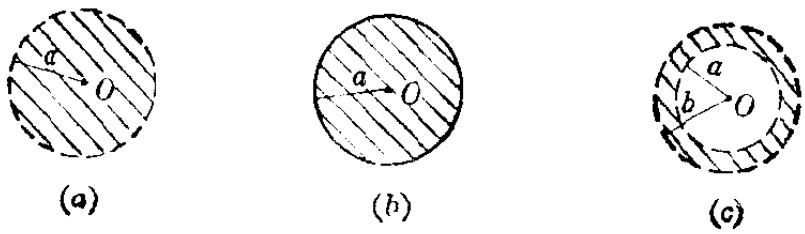

图　1.7

单值与多值函数

如果与一个 z 值对应的 w 值只有一个，那么 $w=f(z)$ 称为单值函数，否则称为多值函数.

在复变函数论中经常用到的函数很多，单值函数的例子有：

线性函数

$$w=az+b.$$

分式线性函数

$$w=\frac{az+b}{cz+d}.$$