分形信息导论

吴敏金 著

上海科学技术文献出版社

分形信息导论

吴敏金 著

上海科学技术文献出版社

(沪)号新登字301号

分形信息导论
吴敏金 著
*
上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路2号 邮政编码200031)
全国新华书店经销
上海科技文献出版社昆山联营厂印刷
*
开本850×1168 1/32 印张9 字数250,000
1994年8月第1版 1994年8月第1次印刷
印数：1—900
ISBN 7-5439-0427-6/T·318
定价：19.00元
《科技新书目》313-308

前　　言

作者是在从事图象形态学(Morphology)研究时涉及分形的。如同K. Falconer在其名著《Fractal Geometry》一书的前言中所述[16]，“什么是分形?”，“什么是分形维数?”总是萦回于脑中。查阅了许多文献，仍未能获得令人满意的回答。一本关于探索复杂性新方法的通俗读物[48]给予了作者启发，于是便有了关于分形定义与分维计算的深入研究，并最终形成本书。

分形信息论是在分形几何学的基础上发展起来的。必要的基础知识包括集合论与测度论，Hausdorff几何理论(即分形几何学基础)以及信息论。本书作为分形信息论之导引，其构成如下表所示：

<table>
<tr><th>导引部分</th><th colspan="3">基础部分</th><th>应用部分</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1. 测度论
(附录一)</td><td colspan="3">绪　　论</td><td rowspan="2">1. 图象处理与分形
(第七章)</td></tr>
<tr><td colspan="3">集合分形(第一章)</td></tr>
<tr><td>2. Hausdorff 几何理论
(附录二)</td><td colspan="3" rowspan="2">集合分形度量
(第二章§1，§3，第三章)</td><td rowspan="3">2. 非线性混沌电路与分形
(第八章)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3. 信息与熵
(第二章§2)</td></tr>
<tr><td>多重分形
(第四章)</td><td>函数分形
(第五章)</td><td>随机分形
(第六章)</td></tr>
</table>

在本书创作过程中，作者得到加拿大Concordia大学C. Y. Suen教授在中加合作研究课题中的良好合作与支持，得到国家自然科学基金委员会的项目资助，在北京大学视觉与听觉信息处理国家重点实验室及华东师范大学教育信息技术系智能信息处理实验室完成上机实验。兹此表示由衷的感谢。

配合教学，华东师范大学电教中心编译了“分形与混沌”录像带一盒，供学习分形与混沌动力学时参考。

分形信息论刚刚起步。本书旨在抛砖引玉，热切期望得到专家、同行与读者的殷切指教与批评。

吴敏金

1993年5月

内 容 提 要

本书作为分形几何学之发展，系统地阐述分形信息理论基础。论述集合(包括函数、图象、随机点集与随机过程)的分形及其度量——分形示性数、分形维数及多重分形特征谱函数等一系列基本概念、定义、公式与算法，并讨论分形在信号与图象处理、非线性混沌电路中的应用。

本书可供从事信息处理、图象分析、模式识别及非线性动力学等专业科研人员参考，也可供自然科学与社会科学中的广大分形应用工作者阅读。本书还可作为信息科学、非线性科学等各类研究生的专业教材。

目　录

绪论——从分形几何学到分形信息论

第一章　集合分形

第二章　集类的信息度量

第三章　分形信息度量——分形示性数与分形维数

第四章　分形谱与多重分形谱

第五章　函数分形

第六章　随机分形

第七章　图象处理与分形

第八章　混沌电路与分形

绪　论

——从分形几何学到分形信息论

一、分形几何学

近20年来，关于分形的研究迅猛发展。分形的理论与应用遍及数学、物理、化学、天文、气象、地学、生物、人口、社会、经济、心理、教育等诸多领域。分形与混沌、孤子、子波等一起构成非线性科学的研究热点。

分形，fractal一词是B. Mandelbrot为了给不规则、支离破碎的复杂图形命名，于1975年将拉丁文fractus加以转化而成的。它含有英文中frature（分裂）与fraction（分数）的双重意义。

分形研究常涉及物体的几何形状。关于分形的理论基础是分形几何学。其奠基人公推B. Mandelbrot。然而从其发展过程来看，G. Cantor（康托），G. Peano（皮亚诺），F. Hausdorff（豪斯道夫），H. V. Koch（科契），W. Sierpinski（谢尔宾斯基），P. Fatou（法都），A. M. Ляпунов（李雅普诺夫）以及A.H. Колмогоров（柯尔莫哥洛夫）等人都作出重要贡献。

二、什么是分形？什么是分形维数？

虽然分形几何学业已建立，但是其核心问题：什么是分形？什么是分形维数？却一直未能精确地加以回答。分形及其度量（分形维数）的严格确切定义至今尚未解决。

B. Mandelbrot 曾先后给出两个定义。其一定义为非整数Hausdorff维数的集合(1982)：

A fractal is by definition a set for which the Hausdorff-Besicovitch dimension stridly exceeds the topological dimension.

其二定义为局部与整体之间存在某种相似性的形状(1986)：

A fractal is shape made of parts similar to the whole in some way.

前者显然是不可取的。因为它排除了为数众多的其Hausdorff维数为整数而又具有明显分形特性的集合，如peano曲线。后者显然反映了分形的重要特性——自相似性；但自相似性并不能概括分形的全部属性，如Minkowski分形等。

著名分形几何家K. Falconer在其专著《Fractal Geometry》中也不得不回避分形的精确定义。认为不存在确切简明的定义，仅列出五条用不确定性语言描述的分形集F的特性(精细的结构；太不规则；某种自相似性；其"分形维数"常大于其拓扑维数；在多种情况下可递归地定义)：

(i) F has a fine structure, i.e. detail on arbitrarilly small scales.

(ii) F is too irregular to be described in traditional geometrical language. both locally and globally.

(iii) Often F has some form of self-similarity, perhaps approximate or statistical.

(iv) Usually, the 'fractal dimension' of F (defined in someway) is greater than its topological dimension.

(v) In most cases of interest F is defined in a very simple way, perhaps recursively.

"什么是分形?"如此之难以回答，以致于日本分形学者高安秀树干脆地说：要给fractal下定义为时尚早。

由于分形的确切意义尚未给出，因此其度量——分形维数(简称分维*)——也难以精确定义。人们只能借用诸如Hausdorff维数、相似维数、Колмогоров维数、信息维数、相关维数以及Renyi

* 在我国早先被译成分数维，现几乎成为俗称。

维数来充当分形之度量；只能根据不同的研究对象，使用各别的计算方法。分形之度量——分形维数——至今仍缺乏统一的计算公式与算法。

分形与分维的完整精确定义成为分形几何学中一直悬而未决的问题。

三、分形的研究对象

尽管分形及其度量的定义尚未给出，但是人们已经把复杂事物确定为分形的研究对象，把分形学视为一门关于以复杂事物为研究对象，探索复杂性的新方法的学科。

无论是古典的欧基里德几何，还是近代微积分，传统数学的研究对象是一些规则的“简单”集合(如直线、圆、光滑曲线、光滑曲面等)。而自然界与人类社会则广泛存在大量不规则的“复杂”事物。传统的数学方法不适合于研究这种“复杂”事物。

一个典型的示例是“海岸线的长度”。

1967年 B. Mandelbrot 在国际权威杂志《科学》上提出一个貌似简单实则复杂的问题:“英国海岸线有多长?”这似乎可以从地理教科书或百科全书中找到答案，然而 B. Mandelbrot 却回答，海岸线长度是不确定的。

海岸线，作为陆地与大海的交界，受到海浪的不断冲击和陆地的自身运动，形状较为复杂，弯弯曲曲极不规则。任何一个海湾都包含着一系列更小的海湾。海岸线上，大大小小的海峡、半岛、沙滩及其组成的各种微粒、分子、原子。要完全精确地确定形状无限复杂的海岸线，在实际上是办不到的，其长度只能“近似”估算。

如果取测量的单位步长为 δ，用一条由N_δ步构成的折线来“近似”海岸线，其长度则近似于$L(\delta)=N_\delta\cdot\delta$。这样，宽度小于$\delta$的海湾、半岛、海峡都被忽略了。如果测量步长$\delta$变小，那末步数$N_\delta$必然增多。如果把测量步长$\delta$想象成原子直径那么小，那末步数$N_\delta$必然是一个天文数字。这表明，$\delta\to0$时，$N_\delta\to\infty$。此时，除

非海岸线被理想化成一条光滑可求长曲线C（这实际上不存在），海岸线长度$L \to 0 \cdot \infty$。显然，这是不确定的。

既然如此，人们又将如何来认识海岸线的复杂性呢？如何描述与刻划这种复杂性？其曲折程度如何加以定量化？这就是分形学所要研究考察的问题。

四、分形认识论

如前所述，分形学以复杂事物为研究对象。那末，人们究竟怎样去认识复杂事物？人们用什么方法探索复杂性呢？从广泛意义而言，这个问题属于哲学范畴，属于认识论。

回答这个问题的是所谓分形认识论。

事实上，人们对事物的认识是不可能一下子就完成的。人们必须把复杂事物分解为若干简单的要素来研究，把整体分割成局部来考察；并通过反复分解，反复认识，不断深化，直至无穷。即所谓由表及里，由浅入深的认识过程。这种认识事物的方法称为分形认识论。它在人们的生产实践、社会活动及科学研究中无处不存在。示例无需累举。

分形认识论的哲学基础是系统或整体中的每一个元素或局部都在一定程度上反映与体现着整体系统的特性与信息，俗称为自相似性。分形认识论是一种从整体向局部转化，从宏观向微观深化的认识过程。

在认识论中，分形论与系统论构成对立的统一。系统论的认识方法是把一事物放置在一个更大的系统、更广的范畴中以全局的高度来考察与认识事物的。即所谓系统的观点，全局的观点，整体的观点。与分形论认识过程相反，系统论是从局部向整体伸展，从微观向宏观拓广的认识过程。

分形论与系统论是人们从两个不同侧面出发来认识事物的认识论方法。它们相互补充，恰恰完整地构成辩证的认识论方法。

五、分形信息论

既然人们以复杂事物为分形研究对象，以分形认识论为研究方法，那末关于分形的一般定义便可迎刃而解。

分形，形之分也。

分形是事物的形状、形态、结构与组织的分解、分割、分裂与分析。分形是一个过程，是事物从整体向局部转化，人们的认识从宏观向微观深化的过程。

基于分形的这个一般意义，各个领域与各个学科中的分形研究根据其具体的研究对象有着具体的明确的定义。在数学中，集合的分形，函数的分形，图象的分形，随机集合与随机过程的分形都有其严格的、明确的、完整的定义。一般地讲，分形包含着两个基本特性：1．分裂，2．取极限。其详细论述见正文。

有了分形的确切定义之后，分形之度量也就不难回答了。这将在本书中详加讨论。

所谓分形信息论就是用信息度量理论的原理与方法来考察事物分形及其度量、属性的理论。诸如，集类信息度量、分形信息量、分形信息变差、分形熵、分形示性数、分形维数、分形熵谱、分形示性谱、分形维谱以及多重分形谱等一系列分形信息论的新概念、新方法及其相应计算公式和算法将构成分形信息论的基本内容。

分形信息论是分形几何学的发展与开拓。但是，二者之间也存在许多本质上的差异。例如，分形几何学主要考察集合的几何结构(如自相似性等)；而分形信息论则研究集合分形的方法及其信息度量，以及模式的分形特征度量。分形几何学旨在考察集合的内在属性(如Hausdorff维数)，与人们的认识过程无关，通常难以计算；而分形信息论则与人们的认识过程相适应，分形信息度量反映与揭示分形过程的信息变化趋向，通常易于实现与计算。此外，就fractal一词的词性侧重而言，二者也有所不同。在分形几何学中，fractal常呈形容词性，如“具有什么什么分形性质的集

合"；而在分形信息论，fractal主要体现动词特性，如"怎样对集合加以分形"。

分形信息论之研究刚刚起步。许多理论问题有待揭示与深化，许多应用课题有待开发与实践。其发展前景颇为广阔。

第一章　集合分形

集合分形是整个分形研究的基础。本章阐述集合分形的基本定义与基本特性，讨论几类常见的重要分形方法，如迭代分形及Minkowski分形等。

§1　集合分裂与集合分形

一、集合与集类

设 n 维欧氏空间 R^n。R^n 上的点用英文小写字母表示，如 x，y；也可用向量形式表示 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$。集合用英文大写字母表示，如 X,Y。满足一定条件或具备一定属性的若干集合构成 R^n 上的一个集类，用英文手写字母表示，如 $\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$。记为

$$\mathscr{X}=\{X_j:j\in J\} \tag{1}$$

其中，J 为集类 $\mathscr{X}$ 的索引集。

如果 J 为有限集或可列集，那末称 $\mathscr{X}$ 为离散型集类。例如，R^n 上的集合序列 X_i，$i\geqslant 0$，构成了一个离散型集类。

如果 J 为一欧氏空间上的连续点集，那末称 $\mathscr{X}$ 为连续型集类。

若干 R^n 上的常见集合与集类如下：

1．R^n 上所有集合之全体构成集类 $\mathscr{P}(R^n)$；

2．R^n 上的Lebesque可测集之全体 $\mathscr{E}$；

3．R^n 上的Borel集之全体 $\mathscr{B}$；

4．开集 G，其全体 $\mathscr{G}$；

5．闭集 F，其全体 $\mathscr{F}$；

6．紧致集 K（即有界闭集），其全体 $\mathscr{K}$；非空紧致集之全体

$\mathscr{K}'$；

7．$\mathscr{K}_D$，闭集D上满足一定条件的紧致集组成的集类；$\overline{\mathscr{K}}_D$，完备的紧致集类；

8．相似集类$\{rB_x\}$，其中$rB_x=\{r(b+x):b\in B,\ x\in X\}$，$r\geqslant 0$，$B_x$为$B$的平移，$rB$为$B$的伸缩。

在分形研究中，通常限定集合X为紧致集(或闭集)。

定义1 设R^n上的紧致集X，紧致集类$\mathscr{X}=\{X_j:j\in J\}$满足

$$X=\overline{\bigcup_{j\in J}X_j} \tag{2}$$

那末称集类$\mathscr{X}$为集合X的分裂。

特别地，如果集类中的集合互不相交，即

$$\forall i,j(i\neq j),\ X_i\cap X_j=\phi\text{(或交集测度为零)} \tag{3}$$

那末集类$\mathscr{X}$为集合X的分割。

分裂与分割是分形的基础。

集合的距离及集合序列的收敛性在分形定义中起着重要的作用。

定义2 设R^n上的非空紧致集X、Y，B为结构元素(也是一个非空紧致集，通常具有一定的几何形状)。

$$d(X,Y)\triangleq\inf\{r:X\oplus rB\subseteq Y,\ Y\oplus rB\subset X\}^* \tag{4}$$

其中，$X\oplus rB$, $Y\oplus rB$为集合的Minkowski形态和，俗称膨胀：

$$X\oplus rB=\{x+rb:x\in X,b\in B\},r\geqslant 0 \tag{5}$$

那末称$d(X,Y)$为集合X、Y(关于结构元素B)的Hausdorff 距离。

通常，B取为单位球(对于R^2，B为单位圆)。此时，$X\oplus rB$又称为X的平行体。

可以验证，$d(X,Y)$满足度量空间上距离的三个条件：

1．$d(X,Y)\geqslant 0$；当且仅当$X=Y$时，$d(X,Y)=0$； (6)

2．$d(X,Y)=d(Y,X)$； (7)

3．$d(X,Y)+d(Y,Z)\geqslant d(X,Z)$，$\forall X,Y,Z\in\mathscr{K}'$ (8)

---

* 可以验证，$d(X,Y)=\max\left\{\sup_{x\in X}\{\inf_{y\in Y}\{|x-y|\}\},\ \sup_{y\in Y}\{\inf_{x\in X}\{|x-y|\}\}\right\}$ (4)'

定义3 设R^n上的非空紧致集X和紧致集合序列X_i(下同)满足

$$d(X_i, X) \to 0, \ (\text{当} i \to \infty \text{时}) \tag{9}$$

那末称集合序列X_i在Haustorff拓扑结构意义下收敛于X，简记为$X_i \to X$。

可以验证：

1．如果集合序列X_i单调下降$(X_1 \supset X_2 \supset \cdots)$，$X_i \downarrow X$，即，

$$X = \bigcap_i X_i \tag{10}$$

那末，$X_i \to X$。

2．如果集合序列X_i单调上升，并且有界$(X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset D$，$D$为有界集)，$X_i \uparrow X$，即

$$X = \bigcup_i X_i \tag{11}$$

那末，$X_i \to \overline{X}$，($\overline{X}$为X的闭包)。

3．如果$X_i \downarrow X, Y_i \downarrow Y$，那末

$$X_i \cap Y_i \longrightarrow X \cap Y \tag{12}$$

$$X_i \cup Y_i \longrightarrow X \cup Y \tag{13}$$

4．如果$X_i \uparrow X, Y_i \uparrow Y$，($X, Y$均有界)，那末

$$X_i \cup Y_i \longrightarrow \overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \tag{14}$$

而，

$$X_i \cap Y_i \longrightarrow \overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y} \tag{15}$$

5．如果$X_i \to X, Y_i \to Y, X_i \subset Y_i$，那末

$$X \subset Y$$

6．令

$$X^+ = \bigcap_{i>0} \overline{\bigcup_{k>i} X_k}, \ (\text{称为} X_i \text{的上极限}) \tag{16}$$

$$X^- = \overline{\bigcup_{i>0} \bigcap_{k>i} X_k}, \ (\text{称为} X_i \text{的下极限}) \tag{17}$$

那末，当且仅当$X^+ = X^-$时，$X_i \to X$。

二、集合分形的定义

如前言所述，分形是事物形状、形态与结构的分割、分裂与分解；而且分形是一个过程，是事物从整体向局部转化的过程，