线性代数

居余马

胡金德 林翠琴

王飞燕 邢文训

清华大学出版社

线性代数

居余马
胡金德　林翠琴
王飞燕　邢文训

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书为高等院校理工科教材．全书共 7 章，内容包括：行列式；矩阵；线性方程组；向量空间与线性变换；特征值和特征向量·矩阵的对角化；二次型及应用问题．书末附录中还介绍了内积空间·厄米特二次型；约当(Jordan)标准形．

本书内容丰富，阐述简明扼要，层次清晰．可作为高等院校的教材或教学参考书．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/居余马等编．—北京：清华大学出版社，1994
ISBN 7-302-01698-4

Ⅰ．线…　Ⅱ．居…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 14171 号

出版者：清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编 100084)
印刷者：北京通县人民文学印刷厂
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开　本：850×1168 1/32　印张：11.75　字数：303 千字
版　次：1995 年 1 月第 1 版　1995 年 1 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-01698-4/O·157
印　数：0001—5000
定　价：7.30 元

序　言

本书是根据全国工科数学课程指导委员会制定的《线性代数》课程基本要求，以及我们多年来在清华大学讲授本课程的实际体会编写而成的．本书适用于教学要求不同的院校和专业，课内学时为35—72的都可选用本书作为教材．

线性代数是一门基础数学课程，它的基本概念、理论和方法，具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的实用性；它的核心内容是研究有限维线性空间的结构和线性空间的线性变换．由于数域F上的n维线性空间$V(F)$与n维向量空间F^n是同构的，给定了n维线性空间$V(F)$的一组基后，$V(F)$的线性变换与数域F上的n阶矩阵一一对应，因此，在学时较少的情况下，教学的基本要求是：熟练掌握n维向量的线性运算，理解线性相关性的理论，搞清R^n的基、向量在基下的坐标、向量的内积运算及向量的长度与夹角等概念；熟练掌握矩阵的基本运算和线性方程组的解的理论和求解方法；掌握矩阵的特征值和特征向量、矩阵的对角化及二次型的标准形和正定二次型的基本概念和理论．在上述教学内容中，要注重基本概念和理论，着重培养熟练的运算能力，适当地训练逻辑思维和推理能力．

关于教材内容，作了以下一些处理：

1　关于行列式．采用简便的递归法来定义n阶行列式，并相应地证明它的性质．这比用逆序法定义可节省一些学时．

2　关于矩阵．从高斯消元法入手，引进矩阵和初等变换的概念．对于矩阵的运算，除了要熟练掌握加法、数乘、乘法、求逆及转置等基本运算，还要加强初等变换和矩阵分块运算，它们不仅是矩

阵运算的重要方法和技巧，而且在理论分析中也有重要意义．

3 关于线性方程组．将方程组放在矩阵之后讲解，可以充分利用矩阵工具，使表述简明．向量的线性相关性的概念和矩阵的秩的概念是这一章的难点，以三维几何向量在线性运算下的关系作背景，抽象出 n 维向量的线性相关性的概念，便于初学者理解这个重要的概念．利用初等行变换不改变矩阵的行秩和列秩以及阶梯形矩阵的行秩等于列秩，来证明 A 的列秩等于其行秩，这样容易为读者所理解．

4 关于向量空间．重点放在搞清 R^n 的基本结构，以三维几何向量为背景，一并提出 R^n 中的线性运算和内积运算，阐明 R^n 的基和向量在基下的坐标的概念以及向量的几何度量性．如果教学学时允许的话，在 R^n 的基础上再进一步讲授一般线性空间的概念和理论．至于一般的欧氏空间和内积空间的概念，则把它放在附录中，这是因为受一般工科院校的本课程学时所限，而不能列入教学要求．

5 关于线性变换．以一元线性函数为背景，抽象出 n 维向量空间的线性变换的概念，并列举了 C.A.D 中常用的线性变换的例子．进而讲了线性变换的矩阵表示和线性变换的运算．

6 关于特征值和特征向量，书中只讲矩阵的特征值和特征向量．深入讨论了矩阵可对角化的条件，学时少的重点掌握实对称矩阵的对角化．

7 关于二次型．将其放在最后，目的是用已学过的知识，全面地讨论二次型化标准形的方法和正定二次型的判定．学时少的只要掌握通过正交变换化二次型为标准形．

8 关于应用问题．书中专列一章应用问题，是为学有余力的学生提供一些材料，使他们对线性代数应用的广泛性有所了解．

本书的编排情况为：

(1) 正文分为基本部分、引伸和应用部分及附录．基本部分

共 6 章，引伸部分用打“ * ”的办法安排在有关章节．

(2) 习题分为基本题、打“ * ”题和补充题．打“ * ”题主要是一些证明题和引伸内容的训练题，补充题一般比打“ * ”题更难一些．

对于课内不超过 40 学时的院校，我们建议以正文的基本部分和习题的基本题作为讲授和训练的基本要求．

本书由居余马(主编)与胡金德、林翠琴、王飞燕、邢文训合编，是在居余马(主编)与胡金德合编的《线性代数及其应用》的基础上作了较大修改而写成的．第 1 章由王飞燕、第 2 章及附录 B 由胡金德、第 3,4 章由居余马、第 5,7 章由林翠琴、第 6 章及附录 A 由邢文训编写，最后由主编作了些修改而定稿．由于水平所限，不妥或谬误之处在所难免，恳请读者和使用本教材的教师批评指正．

编　者

1994 年 5 月于清华园

目　录

1 行 列 式

在线性代数中，行列式是一个基本工具，讨论很多问题都要用到它．在初等代数里，已经介绍过二、三阶行列式的定义、性质和计算，现在我们要进一步讨论 n 阶行列式．本章主要内容：n 阶行列式定义及其性质；行列式的计算；求解一类非齐次线性方程组的 Cramer 法则，以及由此得到的方程个数与未知量个数相同的齐次线性方程组有非零解的必要条件．

1.1 n 阶行列式的定义及性质

行列式的概念首先是在求解方程个数与未知量个数相同的一次方程组时提出来的（以后常把一次方程组称为线性方程组），例如对于一个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法求解，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

人们从(1.2)式中发现，如果记

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \tag{1.3}$$

则(1.2)可以表示为：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

我们把(1.3)式中由四个数 a,b,c,d 排成的两(横)行、两(竖)列并定义为 $ad-bc$ 的式子

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

叫做**二阶行列式**.

对于由九个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 排成三行三列的式子定义为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \end{array} \tag{1.4}$$

并称它为**三阶行列式**.

(1.4)式中的六项是按下面(1.5)式所示的方法(称为**沙路法**)得到的.

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & + & + & + \end{array} \tag{1.5}$$

如果三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

用消元法求解这个方程组可得

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.6}$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$是用常数项 b_1,b_2,b_3 替换 D 中的第 j 列所得到的三阶行列式,即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

但是,对于 n 阶行列式($n>3$),不能如(1.5)式(沙路法)那样定义.因为如果象(1.5)式那样定义 n 阶行列式,当 $n>3$ 时,它将与二、三阶行列式没有统一的运算性质,而且对 n 元线性方程组也得不到象(1.6)式那样的求解公式.因此,对一般的 n 阶行列式要用另外的方法来定义.在代数中,它可以用三种不同的方法作定义,我们采用简明的递归法作定义.

我们从二、三阶行列式的展开式中,发现它们遵循着一个共同的规律——可以按第一行展开,得到

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}, \tag{1.7}$$

其中 A_{11},A_{12},A_{13}分别是 a_{11},a_{12},a_{13}的**代数余子式**(见后面的定义),即

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.$$

同样

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12},$$

其中

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|a_{22}| = a_{22}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}|a_{21}| = -a_{21}. \tag{1.8}$$

这里$|a_{22}|$ $|a_{21}|$是一阶行列式(不是数的绝对值). 我们把 a 的一阶行列式$|a|$定义为 a.

如果把(1.7)、(1.8)两式作为三阶、二阶行列式的定义,那么这种定义的方法是统一的,它们都是用低阶行列式定义高一阶的行列式. 因此人们很自然地会想到,用这种递归的方法来定义一般的 n 阶行列式. 对于这样定义的各阶行列式,显然将会有统一的运算性质. 下面我们给出 n 阶行列式的递归法定义.

1.1.1 n 阶行列式的定义

定义 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{简记作 } |a_{ij}|_1^n) \tag{1.9}$$

是一个算式,当 $n=1$ 时,$D=|a_{11}|=a_{11}$.

当 $n\geqslant 2$ 时,

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}, \tag{1.10}$$

其中

$$A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j},$$

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1,2,\cdots,n),$$

并称 M_{1j}为元素 a_{1j}的**余子式**,A_{1j}为元素 a_{1j}的**代数余子式**.

在(1.9)式中,$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$所在的对角线称为行列式的**主对角线**,相应地 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$称为**主对角元**,另一条对角线称为行列式的**副对角线**.

由定义可见,行列式这个算式是由其 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$的乘积构成的和式(称作**展开式**),二阶行列式的展开式中共有 2! 项,三阶行列式的展开式中共有 3! 项,n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项;在 n 阶行列式的展开式中,每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积;在全部 $n!$ 项中,带正号的项和带负号的项各占一半(以上结论可根据定义,用数学归纳法给以证明);整个展开式是 n^2 个元素 a_{ij}的 n 次齐次多项式.当第一行元素为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 时,n 阶行列式是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一次齐次多项式.

例 1 证明 n 阶下三角行列式(当 $i<j$ 时,$a_{ij}=0$,即主对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 对 n 作数学归纳法,$n=2$ 时,结论显然成立,假设结论对 $n-1$ 阶下三角行列式成立,则由定义得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

右端行列式是 $n-1$ 阶下三角行列式，根据归纳假设得

$$D_n = a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}). \qquad \blacksquare$$

同理可证，n 阶对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 2 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} & & & & a_n \\ & & & a_{n-1} & * \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0,(i=1,2,\cdots,n)$，“ $*$ ”表示元素为任意数．

解 注意，对一般的 n，这个行列式不等于$(-a_1a_2\cdots a_n)$．利用行列式定义，可得到

$$D_n = (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} & & & a_{n-1} \\ & & \cdots & \cdots \\ & a_2 & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & * \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}a_nD_{n-1},$$

再利用上面 n 阶与 $n-1$ 阶行列式之间的关系（通常称**递推关系**），递推可得

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-1}a_nD_{n-1} = (-1)^{n-1}a_n(-1)^{n-2}a_{n-1}D_{n-2} \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1 \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1. \end{aligned}$$

例如，当 $n=4,5$ 时，$D_4=a_1a_2a_3a_4$，$D_5=a_1a_2a_3a_4a_5$.

当 $n=6,7$ 时，$D_6=-a_1a_2\cdots a_6$，$D_7=-a_1a_2\cdots a_7$.

1.1.2 *n* 阶行列式的性质

直接用行列式的定义计算行列式，在一般情况下是较繁的．因此，我们要从定义推导出行列式的一些性质，以简化行列式的计算．

性质 1 行列式的行与列(按原顺序)互换，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

这个性质可用数学归纳法证明，由于证明的表述较繁，我们略去其证明，有兴趣的读者可参阅本章附录．

有了这个性质，行列式对行成立的性质都适用于列．以下我们仅对行讨论行列式的性质．

性质 2 行列式(1.9)对任一行按下式展开，其值相等，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{1.12}$$

其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

M_{ij}是 D 中去掉第 i 行第 j 列元素所成的 $n-1$ 阶行列式，它称为 a_{ij}的**余子式**，A_{ij}称为 a_{ij}的**代数余子式**．

证法与性质 1 的证明类似，也用数学归纳法(参阅本章附录).

性质 3 (线性性质)有以下两条：

(i)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.13}$$

$$
\text{(ii)}\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.14}
$$

利用性质 2,将(1.13)、(1.14)式中等号左端的行列式按第 i 行展开,立即可得等号右端的结果.

由(1.13)式又可得

推论 1 某行元素全为零的行列式其值为零.

性质 4 行列式中两行对应元素全相等,其值为零,即当 $a_{il}=a_{jl}, l=1,2,\cdots,n$ 时,有

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.15}
$$

证 用数学归纳法证明.结果对二阶行列式显然成立,假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立,在 n 阶的情况下,对第 k 行展开,($k\neq i,j$),则

$$
D = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}A_{kl}.
$$