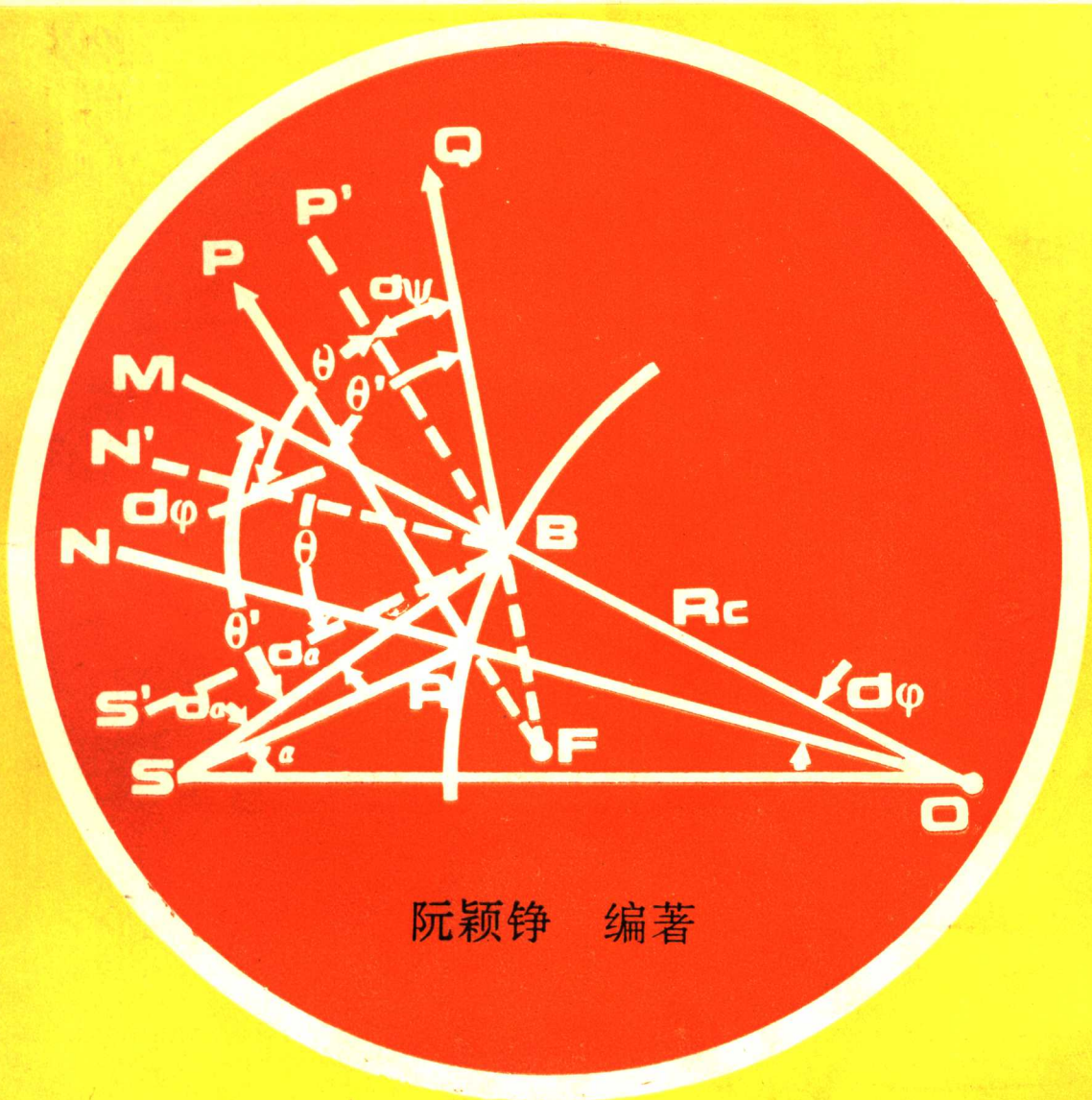


高等学校教学用书



阮颖铮 编著

# 复射线理论 及其应用

电子工业出版社

高等学校教学用书

# 复射线理论及其应用

阮颖铮 编著

电子工业出版社

## 内 容 提 要

本书系统地讨论了复射线理论的基本原理、方法和某些实际应用。全书共分五章。第一章射线理论的数理基础,主要讨论了高频场积分的渐近计算方法和平面波的反射、折射规律;第二章介绍了高频场的射线光学理论;第三章凋落波理论,讨论在无损耗媒质中传播的局部不均匀波,并以高斯波束场和介质波导的外场为例,说明了凋落波追踪法的具体应用;第四章系统地介绍了复射线理论和复源点场的属性,讨论了雷达波束在分层媒质中的传播和散射规律,以及集合射线处理和混合场结构;第五章为高频场的积分表达式。本书可作为大专院校的高年级本科和研究生教材,也可供有关技术人员学习参考。

## 复射线理论及其应用

阮颖铮 编著

责任编辑 王昌铭

\*

电子工业出版社出版(北京市万寿路)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经销

中国科学院印刷厂印刷

开本: 787×1092毫米 1/16 印张: 11.5 字数: 266千字

1991年3月第1版 1991年3月第1次印刷

印数: 1000册 定价: 3.20元

ISBN 7-5053-1209-X/TN·359

## 前 言

复射线理论是近年发展起来用于求解波场传播和散射问题的一种高频近似方法。它根据几何光学理论和几何绕射理论的分析方法和计算公式,在解析延拓的复空间中求解复射线轨迹和场的振幅与相位,从而直接得出局部不均匀波(凋落波)的传播和散射规律。由于这种方法的简捷性,使复射线理论在电磁波和弹性波学科的多种技术领域获得了日益广泛的应用,其中包括天线与微波技术,目标特性与隐身技术,光导纤维与激光技术,无线电波传播,微波声学及表声技术,水声学及声纳技术,地震波的综合与分析等。

本书系统地讨论了复射线理论的基本原理、方法和某些实际应用。全书共分五章。第一章射线理论的数理基础,主要讨论了高频场积分的渐近计算方法和平面波的反射、折射规律;第二章介绍了高频场的射线光学理论,主要包括几何光学理论和几何绕射理论,并以曲面的反射为例,说明了如何运用射线光学理论进行射线轨迹追踪和场强计算;第三章凋落波理论,讨论在无损耗媒质中传播的局部不均匀波,并以高斯波束场和介质波导的外场为例,说明了凋落波追踪法的具体应用;第四章系统地介绍了复射线理论和复源点场的属性,以圆柱界面上高斯波束的反射和折射为例,讨论了复射线追踪法和近轴近似法,并以介质天线罩为例,讨论了雷达波束在分层媒质中的传播和散射规律,以及集合射线处理和混合场结构;第五章高频场的积分表达式,主要讨论空间波源积分、平面波谱积分、复源点积分及其相互关系,并以半平面的散射和分界平面上的反射为例,说明各种积分表达式的应用。

本书是根据作者在电子科技大学为最近几届研究生讲授“电磁射线理论”课程的讲稿经补充和修改而成。书中基础部分内容主要取材于纽约理工大学(Polytechnic University) L. B. 费尔森教授及其他几位学者的论文与专著;复射线理论及其应用实例方面的内容,主要根据作者近年来所进行的科研工作及其成果(其中一部分论文已公开发表)编写而成。选取这些实例的目的是希望读者能收到举一反三的效果。

本书适合于电磁场与微波技术学科的研究生或高年级大学生作为教学用书,也可供从事无线电物理、电磁场理论、天线及电波传播、电磁散射与目标特性、光波及微波技术等方面的教学、科研和工程技术人员参考。

本书初稿蒙北京理工大学李世智教授审阅,并提出不少宝贵的修改意见,全书经国家教委高校工科电磁场课程教学指导小组审定通过并推荐出版,作者在本书编写过程中,得到了该课程指导小组的悉心指导,也得到有关出版部门和电子科技大学有关领导与同志们的大力支持,使本书得以完善并尽快出版,特此一并致谢。由于作者水平所限,书中错误难免,恳望读者指正。

阮颖铮 1990年8月  
于电子科技大学(成都)

# 目 录

|                            |    |
|----------------------------|----|
| 第一章 射线理论的数理基础              | 1  |
| § 1.1 高频场积分的渐近计算           | 1  |
| § 1.1.1 无限积分的渐近表达式         | 1  |
| § 1.1.2 变换多项式 $\pi(s)$ 的选择 | 3  |
| § 1.1.3 有限端点的积分            | 5  |
| § 1.1.4 鞍点和最陡下降路径          | 6  |
| § 1.2 单鞍点最陡下降法             | 9  |
| § 1.2.1 一阶孤立鞍点的最低阶近似       | 9  |
| § 1.2.2 一阶鞍点的完整渐近展开        | 11 |
| § 1.2.3 高阶鞍点的一阶渐近近似        | 13 |
| § 1.3 变形最陡下降法              | 14 |
| § 1.3.1 一阶鞍点靠近一阶极点         | 14 |
| § 1.3.2 一阶鞍点靠近高阶极点         | 16 |
| § 1.3.3 一阶鞍点靠近支点           | 17 |
| § 1.3.4 两个相邻的一阶鞍点          | 18 |
| § 1.3.5 三个相邻的一阶鞍点          | 18 |
| § 1.3.6 一阶鞍点靠近积分端点         | 19 |
| § 1.3.7 绕过支点的积分            | 20 |
| § 1.4 平面波的反射和折射            | 20 |
| § 1.4.1 无界空间中的均匀平面波        | 20 |
| § 1.4.2 平面波在平界面上的反射定律和折射定律 | 22 |
| § 1.4.3 布鲁斯特角              | 25 |
| § 1.4.4 全反射和临界角            | 26 |
| § 1.4.5 反射系数               | 28 |
| § 1.4.6 阻抗概念               | 31 |
| § 1.4.7 能量关系               | 32 |
| § 1.4.8 里昂托维奇近似边界条件        | 33 |
| § 1.5 柱面波和球面波              | 34 |
| 第二章 高频场的射线光学理论             | 36 |
| § 2.1 从波动光学过渡到几何光学         | 36 |
| § 2.2 几何光学基本原理             | 39 |
| § 2.2.1 费马原理               | 39 |
| § 2.2.2 反射定律和折射定律          | 40 |
| § 2.2.3 几何光学强度定律           | 41 |
| § 2.3 高频场射线光学结构            | 42 |
| § 2.3.1 程函方程和输运方程          | 42 |

• 1 •

|                                 |           |
|---------------------------------|-----------|
| § 2.3.2 射线轨迹 .....              | 44        |
| § 2.3.3 相位函数 .....              | 47        |
| § 2.3.4 振幅关系 .....              | 48        |
| § 2.3.5 标量场的射线光学表达式 .....       | 51        |
| § 2.4 电磁场的射线光学结构 .....          | 51        |
| § 2.5 曲面的反射 .....               | 54        |
| § 2.5.1 反射射线的追踪 .....           | 55        |
| § 2.5.2 反射场的计算 .....            | 58        |
| § 2.6 几何绕射理论 .....              | 61        |
| § 2.6.1 绕射射线和绕射系数 .....         | 62        |
| § 2.6.2 边缘绕射射线的追踪 .....         | 64        |
| § 2.6.3 边缘绕射场的计算 .....          | 66        |
| § 2.6.4 边缘绕射小结 .....            | 68        |
| <b>第三章 凋落波理论</b> .....          | <b>70</b> |
| § 3.1 局部不均匀平面波 .....            | 70        |
| § 3.2 凋落波理论概述 .....             | 72        |
| § 3.3 凋落波追踪法 .....              | 73        |
| § 3.3.1 凋落波的程函方程和输运方程 .....     | 73        |
| § 3.3.2 凋落波的相位路径轨迹和等相位面轨迹 ..... | 74        |
| § 3.3.3 凋落波场量的计算 .....          | 77        |
| § 3.3.4 凋落波追踪法的应用 .....         | 78        |
| § 3.4 高斯波束场 .....               | 78        |
| § 3.4.1 高斯波束场的相位路径和等相位面 .....   | 78        |
| § 3.4.2 高斯波束场的场量计算 .....        | 81        |
| § 3.5 介质波导的外场 .....             | 84        |
| <b>第四章 复射线理论</b> .....          | <b>88</b> |
| § 4.1 复源点和复射线 .....             | 88        |
| § 4.1.1 复源点及其场量表达式 .....        | 88        |
| § 4.1.2 复源点场的属性 .....           | 90        |
| § 4.1.3 复源点场的参量 .....           | 96        |
| § 4.2 复射线追踪法 .....              | 97        |
| § 4.2.1 实线源场在圆柱界面上的反射和折射 .....  | 97        |
| § 4.2.2 复线源场在圆柱界面上的反射和折射 .....  | 101       |
| § 4.2.3 一般情况下的复射线追踪 .....       | 103       |
| § 4.3 复射线近轴近似法 .....            | 103       |
| § 4.3.1 近轴场的近似计算 .....          | 104       |
| § 4.3.2 轴向场的近似计算 .....          | 107       |
| § 4.4 复射线追踪和近轴近似的比较 .....       | 109       |
| § 4.5 天线罩的散射 .....              | 112       |
| § 4.5.1 圆柱天线罩的散射场结构 .....       | 112       |
| § 4.5.2 多次内反射的横向射线位移 .....      | 115       |

|                                    |            |
|------------------------------------|------------|
| § 4.5.3 集合射线和混合场结构 .....           | 117        |
| § 4.5.4 天线罩散射场的近轴近似分析 .....        | 120        |
| § 4.5.5 天线罩的雷达散射截面分析 .....         | 122        |
| § 4.5.6 计算实例 .....                 | 123        |
| <b>第五章 高频场的积分表达式</b> .....         | <b>128</b> |
| § 5.1 空间波源的积分表达式 .....             | 128        |
| § 5.2 平面波谱的积分表达式 .....             | 130        |
| § 5.3 复源点的积分表达式 .....              | 133        |
| § 5.4 半平面的散射 .....                 | 135        |
| § 5.4.1 射线光学近似解 .....              | 136        |
| § 5.4.2 感应电流积分渐近解 .....            | 137        |
| § 5.4.3 平面波谱积分渐近解 .....            | 141        |
| § 5.4.4 柱面波散射的射线光学解 .....          | 143        |
| § 5.4.5 高斯波束散射的复射线解 .....          | 145        |
| § 5.5 柱面波的复源点展开 .....              | 146        |
| § 5.5.1 无界空间中柱面波的复源点展开 .....       | 146        |
| § 5.5.2 复源点展开参量的选择 .....           | 150        |
| § 5.6 波束在两种媒质分界平面上的反射 .....        | 154        |
| § 5.6.1 复源点场的平面波谱积分表达式 .....       | 155        |
| § 5.6.2 临界角区域外的反射场计算(非一致性公式) ..... | 158        |
| § 5.6.3 临界角过渡区的反射场计算(一致性公式) .....  | 162        |
| § 5.6.4 计算实例 .....                 | 164        |
| § 5.7 圆柱面波在分界平面上的反射 .....          | 166        |
| § 5.7.1 时谐柱面波的反射场 .....            | 166        |
| § 5.7.2 瞬变柱面波的反射场 .....            | 170        |
| <b>参考文献</b> .....                  | <b>174</b> |

## 第一章 射线理论的数理基础

射线理论是根据几何曲线和几何运算的数学方法来研究高频场与波的传播和散射规律的,它需要涉及一些基本的数学知识。如在讨论射线轨迹和边缘绕射时,要了解空间曲线的知识;在讨论波前或界面性质时,要知道空间曲面的特性;在进行场强计算时,要用到复变函数理论、积分的渐近计算和某些特殊函数的知识。为方便读者和节省篇幅起见,本章只简要介绍高频场积分的渐近计算方法,关于其他的数学基础知识,读者可在微分几何、复变函数、数理方程与特殊函数等有关书籍中找到。

射线理论既可应用于高频电磁波,如可见光、激光、红外和微波,也可应用于弹性波,如地震波、水声和声表面波。本书主要讨论高频电磁波。作为射线电磁学的物理基础,本章将系统地总结平面电磁波的传播和散射规律。

### §1.1 高频场积分的渐近计算<sup>[1]</sup>

#### §1.1.1 无限积分的渐近表达式

在辐射场和散射场的计算中,经常出现如下形式的无限积分表达式

$$I(Q) = \int_P f(z) \exp[Qq(z)] dz \quad (1.1)$$

式中 $Q$ 为参变量, $f(z)$ 和 $q(z)$ 是复变量 $z$ 沿积分路径 $\bar{P}$ 的解析函数, $\bar{P}$ 的端点在无限远处。通常 $f(z)$ 和 $q(z)$ 有比较复杂的形式,很难由直接积分而求出式(1.1)的解析结果,因而不得不采用数值积分法求解。但是,在很多实际应用中,被积函数往往包含一个大的正实数参量 $Q$ (如果 $Q$ 为复数,则可写为 $Q = |Q| \exp(j \arg Q)$ ,于是相位项可以合并到函数 $q(z)$ 之中),例如在高频电磁场中, $Q$ 就是角频率 $\omega$ ,这时利用大 $Q$ 的特性便可对积分进行近似计算,而使数值过程简化。

假设在路径 $\bar{P}$ 上的点 $z_i$ 处,指数函数 $q(z)$ 的实部 $\operatorname{Re} q(z)$ 有一个最大值,使得路径上其余各处有 $\operatorname{Re} q(z) < \operatorname{Re} q(z_i)$ 。由于 $Q$ 是大的正实数,因此指数部分的模 $A = |\exp[Qq(z)]|$ 在 $z_i$ 处也同样有一个最大值,并随着离开 $z_i$ 而非常迅速地按指数规律减小。由于来自路径其余部分的贡献比来自 $z_i$ 邻域的贡献是指数地小,因此可以用 $z_i$ 邻域的贡献来近似地代替积分 $I(Q)$ 。如果振幅函数 $f(z)$ 在 $z_i$ 的邻域内是解析的和慢变化的,则可用常数 $f(z_i)$ 来近似代替 $f(z)$ 并提到 $I(Q)$ 的积分符号外面,于是在被积函数中就只留下指数部分。因为 $q(z)$ 在 $z_i$ 邻域内解析,因此它可在 $z_i$ 处展开为台劳级数

$$\begin{aligned} q(z) &= q(z_i) + q'(z_i)(z - z_i) + \frac{1}{2!} q''(z_i)(z - z_i)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_i)^n, \quad c_n = q^{(n)}(z_i)/n! \end{aligned} \quad (1.2)$$

如果只保留这个幂级数的前面几项,则这个指数函数的积分通常就可以与一个具有类似

特性、但结构较为简单的“典型”积分相比较而实现。一般说来,指数部分的模  $A$  沿着给定的积分路径  $\bar{P}$  并不具有上述特性(即  $\bar{P}$  不通过  $z_*$  点),而只是沿着某一条特殊路径  $\bar{P}_*$  才具有这一特性。因此,我们总是设法将积分路径由  $\bar{P}$  变形为  $\bar{P}_*$ ,并计入路径变换时在复  $z$  平面上出现的任何奇点(极点和支点等)。

下面将要看到,对积分出现最大贡献的点  $z_*$  就是解析函数  $q(z)$  的“鞍点”或称为“驻定点”,它们由条件  $q'(z) = dq(z)/dz = 0$  所确定。我们所希望的路径  $\bar{P}_*$  就是通过鞍点  $z_*$  而保持虚部  $\text{Im}q(z) = \text{常数}$  的路径。既然路径  $\bar{P}_*$  只有在通过鞍点邻域内的那一小段才有重要贡献,自然就不必完整地考虑这个通常较为复杂的函数  $q(z)$ ,只需用幂级数展开式(1.2)的有限几项来代替  $q(z)$ ,以表征  $Q$  大时积分的近似值。

如果引入新的复变量  $s$  并用  $s$  的某一多项式来代替函数  $q(z)$ ,则有可能实现用最简单的方式来描述有关的鞍点分布,从而将给定的积分变换为一种典型积分的型式。用  $\tau(s)$  表示我们选择的变换多项式

$$\tau(s) = q(z) \quad (1.3)$$

并使其在复  $z$  平面上的点  $z_*$  对应于复  $s$  平面上的点  $s = 0$ 。于是式(1.1)的积分可变换为

$$I(Q) = \int_{P'} G(s) \exp[Q\tau(s)] ds \quad (1.4)$$

式中

$$G(s) = f(z) \frac{dz}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{\tau'(s)}{q'(z)} \quad (1.4a)$$

积分路径  $P'$  表示  $z$  平面上的路径  $\bar{P}$  在  $s$  平面上的映射,  $\tau'$  和  $q'$  分别表示对其自变量的一阶导数。

与上面的考虑相同,欲使式(1.4)的积分具有最简单的近似表达式,要求将  $s$  平面上的积分路径  $P'$  变形为某一特殊路径  $P$ ,使新路径  $P$  通过原点(即  $s$  平面上的鞍点)的近邻,并且在路径  $P$  上  $\exp[Q\tau(s)]$  的振幅随着离开  $s = 0$  而迅速地指数减小,即沿此路径  $P$  有  $\text{Re}\tau(s) < \text{Re}\tau(0)$ ,  $\text{Im}\tau(s) = \text{常数}$ 。这个路径  $P$  实际上就是  $z$  平面上过鞍点  $z_*$  的路径  $\bar{P}_*$  在  $s$  平面上的映射。通常  $P'$  与  $P$  是不相同的,当由  $P'$  变形为  $P$  时,式(1.4)中被积函数的奇点就必须计入。图 1.1 表示一典型的积分路径变形情况。由于积分端点  $|s| = \infty$  未变,路径  $P$  和  $P'$  是可以互相替换而不改变其积分值的。如果有极点  $s_p$  和支点  $s_b$  等奇点的出现,则根据复变函数理论中的柯西定理,沿路径  $P'$  的积分可写为

$$\int_{P'} = \int_P + \int_{P_p} + \int_{P_b} \quad (1.5)$$

式中  $P_p$  和  $P_b$  分别表示围绕极点和支点的积分路径,路径的方向如图 1.1 所示。

现在按已变形的积分路径  $P$  来计算式(1.4)中的积分,假定  $G(s)$  在  $s = 0$  的邻域内是解析的和慢变化的,对于大  $Q$  值,式(1.4)中的积分的主要贡献来自原点附近,因为指数项会随着离开  $s \approx 0$  的邻域而迅速减小。因此可以写出

$$\begin{aligned} I(Q) &= \int_P G(s) \exp[Q\tau(s)] ds \\ &\sim G(0) \int_P \exp[Q\tau(s)] ds, Q \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.6)$$

式中符号“ $\sim$ ”意味着“渐近地被表示为”,而  $G(0)$  是解析函数  $G(s)$  在  $s = 0$  点的值。





我们令  $s_1 = \sqrt{\sigma}$  相应于  $z_1$ , 令  $s_2 = -\sqrt{\sigma}$  相应于  $z_2$ , 以保证在  $s_{1,2}$  处  $dz/ds$  的解析性。因为有

$$q(z_1) = \tau(\sqrt{\sigma}) = a_0 + \frac{2}{3} \sigma^{3/2} \quad (1.8a)$$

$$q(z_2) = \tau(-\sqrt{\sigma}) = a_0 - \frac{2}{3} \sigma^{3/2} \quad (1.8b)$$

我们得到用  $q(z_{1,2})$  来表示  $a_0$  和  $\sigma$  的表达式

$$a_0 = \tau(0) = \frac{1}{2} [q(z_1) + q(z_2)] \quad (1.9a)$$

$$\frac{2}{3} \sigma^{3/2} = \frac{1}{2} [q(z_1) - q(z_2)] \quad (1.9b)$$

利用变换式(1.8)可将式(1.6)右边的积分表示为艾里函数。需要指出, 只有当  $q'(z)$  的两个零点  $z_{1,2}$  相互任意接近(即当  $\sigma \rightarrow 0$ )时, 才需要用双鞍点法来渐近处理式(1.1)的积分。如果  $\sigma$  保持为有限值, 则当  $Q \rightarrow \infty$  时, 可以利用情况 1 中的单鞍点法分别处理来自每个孤立鞍点的贡献, 从而求得  $I(Q)$  的渐近近似值。

**情况 3 三鞍点法:** 设  $q'(z)$  在  $z = z_1, z_2, z_3$  处有等间距共直线的三个一阶零点, 即  $z_1 - z_2 = z_2 - z_3$ , 而且它们相互可以任意靠近, 而  $f(z)$  在  $z_{1,2,3}$  附近是解析的。此时可选择如下的变换式

$$q(z) = \tau(s) = a_0 - (a + s^2)^2 \quad (1.10)$$

由  $\tau'(s) = -4s(a + s^2) = 0$  可知,  $\tau'(0)$  在  $s = 0, \pm j\sqrt{a}$  处有三个零点, 它们分别对应于  $z_2$  和  $z_{1,3}$ 。显然  $a_0$  和  $a$  可表示为

$$a_0 = q(z_1) = q(z_3) \quad (1.11a)$$

$$a^2 = q(z_1) - q(z_2) \quad (1.11b)$$

将式(1.10)代入式(1.6)所得积分可表示为抛物柱函数。

**情况 4 极点附近的变形鞍点法:** 设  $q'(z)$  在  $z_s$  处有一个一阶零点, 在  $z_s$  附近没有其它零点, 而  $f(z)$  在  $z_s$  附近有一个一阶或多阶极点。此时不能直接应用单鞍点法, 因为现在  $G(s)$  在  $s = 0$  附近是迅速变化的。假定  $G(s)$  在  $s = b \rightarrow 0$  处有一个一阶极点, 则可假设当  $s \rightarrow b$  时,  $G(s)(s - b) \rightarrow a$ , 这里  $a$  是一个常数, 于是  $G(s)$  可表示为

$$G(s) = \frac{a}{s - b} + T(s) \quad (1.12)$$

式中,  $T(s)$  在  $s = b$  和  $s = 0$  两点都是解析的, 并在  $s = 0$  附近为慢变化。于是, 式(1.4)中的  $I(Q)$  在  $Q \rightarrow \infty$  时的渐近近似可分为两个积分

$$I(Q) \sim T(0) \int_P \exp[Q\tau(s)] ds + a \int_P \frac{\exp[Q\tau(s)]}{s - b} ds \quad (1.13)$$

式中,  $T(s)$  由式(1.7)中的单鞍点变换式给出, 且  $M = 1$ , 即  $\tau(s) = q(z_s) - s^2$ , 因此式(1.13)中的第一个积分就是情况 1 中的单鞍点积分, 第二个积分包括了极点奇异性的影响, 它可借助于已知的误差函数或非涅尔积分来计算。

**情况 5 支点附近的变形鞍点法:** 设  $q'(z)$  在  $z_s$  处有一个一阶零点, 在  $z_s$  附近没有其它零点, 而  $f(z)$  在  $z_s$  处或  $z_s$  附近有一个代数支点。此时所得的典型积分可以被转换

成为情况 3 的三鞍点积分,因此可用抛物柱函数来描述这种情况。必须指出,在上述两种变形鞍点法中,当奇点被移至远离鞍点时,它们都会简化为情况 1 中的单鞍点积分。

由式(1.6)可以看出,在上述讨论中主要关心的是当  $Q \rightarrow \infty$  时,式(1.1)中积分  $I(Q)$  的一阶渐近计算。但是,如果计入随  $Q \rightarrow \infty$  而逐渐减小的高阶项,则可以得到积分  $I(Q)$  的完整的渐近展开。

### §1.1.3 有限端点的积分

如果式(1.1)中积分范围不是在无限远处,而是在有限的积分限  $z_\alpha$  和  $z_\beta$  之间,则积分的渐近计算也可以类似于无限积分路径  $\bar{P}$  那样进行。端点为  $z_\alpha$  和  $z_\beta$  的有限路径  $\bar{P}_{\alpha\beta}$  可以变形为通过  $q(z)$  的一个或多个鞍点近邻的另一条路径。如果离开鞍点  $z_i$  的路径其余部分有  $\text{Re}q(z) < \text{Re}q(z_i)$ ,则当  $Q \rightarrow \infty$  时对积分的主要贡献也是来自  $z_i$  点的近邻,其渐近计算是与无限积分相同的。

将有限积分

$$I_{\alpha\beta}(Q) = \int_{P_{\alpha\beta}} f(z) \exp[Qq(z)] dz, \quad \int_{P_{\alpha\beta}} = \int_{z_\alpha}^{z_\beta} \quad (1.14)$$

经过式(1.3)的变换后,可成为  $s$  平面上的如下积分

$$I_{\alpha\beta}(Q) = \int_{P_{\alpha\beta}} G(s) \exp[Q\tau(s)] ds, \quad \int_{P_{\alpha\beta}} = \int_{s_\alpha}^{s_\beta} \quad (1.15)$$

式中  $s_\alpha$  和  $s_\beta$  分别对应于  $z_\alpha$  和  $z_\beta$ 。上式的积分可写为如下三个积分的和

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta}(Q) &= \left( \int_P + \int_{P_\alpha} + \int_{P_\beta} \right) G(s) \exp[Q\tau(s)] ds \\ &= I(Q) + I_\alpha(Q) + I_\beta(Q) \end{aligned} \quad (1.16)$$

式中路径  $P, P_\alpha$  和  $P_\beta$  如图 1.2 所示。 $P$  是前面讨论过的无限路径,沿  $P$  离开原点近邻的鞍点时,  $\tau(s)$  会非常迅速地减小。 $P_\alpha$  和  $P_\beta$  则是分别连接给定的端点  $s_\alpha, s_\beta$  和  $P$  在  $\pm\infty$  处的端点的两条路径。各段路径的方向如图 1.2 所示。这里假定沿着离开原点  $s=0$  的所有路径段都有  $\text{Re}\tau(s) < \text{Re}\tau(0)$ ,并假定沿路径  $P_{\alpha\beta}$  有  $\text{Re}\tau(s) < \text{Re}\tau(s_{\alpha,\beta})$ 。此外,在将  $P_{\alpha\beta}$  变形为式(1.16)的三段路径时,一定要计入  $G(s)$  在  $s=0$  附近出现的任何奇点(支点或极点)。

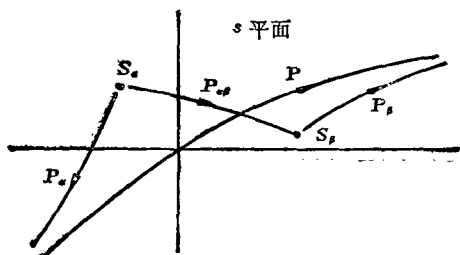


图 1.2 计算有限积分的路径

式(1.16)中的第一个积分已经解决。为了计算  $Q \rightarrow \infty$  时的其余两个积分,我们注意到在  $P_\alpha$  和  $P_\beta$  上有  $\tau'(s) \neq 0$ ,即  $P_\alpha$  和  $P_\beta$  上没有鞍点。通过分部积分法可得

$$\begin{aligned}
I_a(Q) &= \int_{P_a} G(s) \exp[Q\tau(s)] ds \\
&= \frac{1}{Q} \int_{P_a} \frac{G(s)}{\tau'(s)} \frac{d}{ds} \exp[Q\tau(s)] ds \\
&= -\frac{1}{Q} \frac{G(s_a) \exp[Q\tau(s_a)]}{\tau'(s_a)} - \frac{1}{Q} \int_{P_a} \frac{d}{ds} \left[ \frac{G(s)}{\tau'(s)} \right] \exp[Q\tau(s)] ds \quad (1.17)
\end{aligned}$$

式中已考虑到指数项在无限远处为零。上式中第一项包含因子  $(1/Q) \exp[Q\tau(s_a)]$ , 如第二项继续用分部积分法, 则可得到包含  $(1/Q)^2 \exp[Q\tau(s_a)]$  的另一项, 余此类推。于是可以看到, 当  $Q \rightarrow \infty$  时,  $I_a(Q)$  的振幅主要决定于第一项的因子  $(1/Q) \exp[Q\tau(s_a)]$ 。同样, 在路径  $P_\beta$  上的积分  $I_\beta(Q)$  的振幅主要决定于因子  $(1/Q) \exp[Q\tau(s_\beta)]$ 。另一方面, 由式(1.6)可知, 通过鞍点的路径  $P$  的积分  $I(Q)$  有一个指数因子  $\exp[Q\tau(0)]$ 。因为  $\text{Re}\tau(s_{a,\beta}) < \text{Re}\tau(0)$ , 故  $|I_{a,\beta}|/|I|$  正比于  $\exp\{Q[\text{Re}\tau(s_{a,\beta}) - \text{Re}\tau(0)]\}$ , 这个比值在  $Q \rightarrow \infty$  时是一个指数地无穷小量。因此, 与无限积分的情况一样, 式(1.15)中有限积分的主要贡献仍然是来自  $\tau(s)$  的鞍点近邻, 这样我们就可以近似认为

$$I_{a\beta}(Q) \sim I(Q), \quad Q \rightarrow \infty \quad (1.18)$$

如果式(1.15)中被积函数的指数项在端点  $s_a$  和在鞍点  $s=0$  处有同样大的振幅, 即  $\text{Re}\tau(s_a) = \text{Re}\tau(0)$ , 则在式(1.16)中端点的贡献仍可由式(1.17)经分部积分法来计算, 其振幅正比于  $(1/Q) \exp[Q\text{Re}\tau(s_a)] = (1/Q) \exp[Q\text{Re}\tau(0)]$ 。而由式(1.6)和式(1.7)可以看出, 一个  $M$  阶鞍点对积分  $I(Q)$  的贡献表现为  $(1/Q)^{-1/(M+1)} \exp[Q\tau(0)]$ 。因此比值  $|I_{a,\beta}|/|I|$  正比于  $(1/Q)^{M/(M+1)}$ , 在  $Q \rightarrow \infty$  时是一个代数地无穷小量。这样, 当  $Q \rightarrow \infty$  时对  $I_{a\beta}(Q)$  的积分主要贡献仍然来自于鞍点的近邻。

当端点接近鞍点时, 由于式(1.17)中  $\tau'(s_a) \rightarrow 0$ , 故分部积分失效。此时鞍点和端点的贡献不能再分开来处理, 因此渐近计算的结果包含了一些新的典型积分。例如单个一阶鞍点接近积分区间的一个端点  $s_a$  时, 将导致形如  $\int_{s_a}^{\infty} \exp(-Qs^2) ds$  的典型积分, 它可表示为非涅尔积分。当两个相邻的一阶鞍点接近一个积分端点  $s_a$  时, 则导致典型积分  $\int_{s_a}^{\infty} \exp(\tau s - s^3/3) ds$ , 这是一个“不完整的”艾里函数。

#### §1.1.4 鞍点和最陡下降路径

在式(1.1)的被积函数中, 解析函数  $q(z)$  确定了积分渐近计算的方法和结果。在 §1.1.1 中曾提到, 为简化积分, 需要把任意路径  $\bar{P}$  变形为通过  $q(z)$  的驻定点  $z_i$  的路径  $\bar{P}_i$ , 使得沿  $\bar{P}_i$  离开  $z_i$  时被积函数振幅指数地迅速减小。为理解这种方法的机理, 有必要研究一下解析函数  $q(z)$  在驻定点邻域内的属性。

将  $q(z)$  写为

$$q(z) = u(x, y) + jv(x, y), \quad z = x + jy \quad (1.19)$$

式中  $u, v, x$  和  $y$  均为实量。  $q(z)$  的驻定点决定于方程

$$\left. \frac{dq}{dz} \right|_{z_i} = 0, \quad z_i = x_i + jy_i \quad (1.20)$$

因为  $q(z)$  在  $z_i$  处是解析的和驻定的, 故其实部  $u$  和虚部  $v$  在  $(x_i, y_i)$  处也是驻定的,

即

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z_i, y_i} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{z_i, y_i} - \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{z_i, y_i} - \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{z_i, y_i} = 0 \quad (1.21)$$

但是,在驻定点  $(x_i, y_i)$  处,由  $u = u(x, y)$  和  $v = v(x, y)$  所代表的曲面并没有绝对的极大值或极小值,因为  $z = u + jv$  满足解析函数的柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.22)$$

对于一阶驻定点 ( $dq/dz|_{z_i} = 0, d^2q/dz^2|_{z_i} \neq 0$ ),由上式再求导一次可得到  $u$  和  $v$  的拉普拉斯方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.23a)$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (1.23b)$$

因此,如果实部函数表面  $u(x, y)$  在驻定点  $(x_i, y_i)$  处沿  $x$  方向的曲率为正,即  $\partial^2 u / \partial x^2|_{z_i, y_i} > 0$ ,则由式(1.23a)可知,沿正交的  $y$  方向曲率必定为负,即  $\partial^2 u / \partial y^2|_{z_i, y_i} < 0$ ;同理对  $v$  也一样。即是说,函数  $q(z)$  在  $z_i$  不能是极值点而只能是鞍点。根据通过鞍点  $z_i$  的不同路径方式,沿路径离开  $z_i$  时  $u(x, y)$  或等效的  $\exp |Qq(z)|$  将可能增大、减小或保持恒定。图 1.3 表示双曲抛物面  $u = x^2/2a^2 - y^2/2b^2$  的鞍点。我们的目的就是要寻求一条  $u(x, y)$  减小最迅速的路径,以便尽可能简化积分。这条路径称为最陡下降路径。

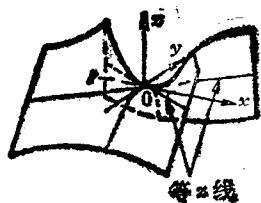


图 1.3 双曲抛物面

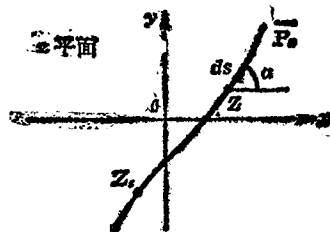


图 1.4  $z$  平面上的最陡下降路径

为此,让我们来考察通过鞍点  $z_i$  的任意一条路径  $\bar{P}_s$  上的一长度单元  $ds$  (见图 1.4),函数  $u$  沿  $\bar{P}_s$  的变化率可表示为

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha \end{aligned} \quad (1.24)$$

式中  $\alpha$  是单元  $ds$  与  $x$  轴的夹角。使  $du/ds$  为最大值的  $\alpha$  决定于

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial s} = 0 = -\frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha \quad (1.25)$$

于是由柯西黎曼方程(1.22),我们有

$$0 = -\frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} = -\frac{dv}{ds} \quad (1.26)$$

式(1.25)和(1.26)说明,在一条使函数  $u$  变化最快的路径上,函数  $v$  将保持恒定,即是说,振幅变化最迅速的路径也就是  $v = \text{常数}$  的等相位路径。同样可以证明,沿着相位变化最迅速的路径,指数振幅必然保持恒定,即是一条  $u = \text{常数}$  的等振幅路径。图 1.4 中所示路径  $\bar{P}_s$  虽然通过一个鞍点  $z_s$ ,但上述结论同样适用于通过任意给定点  $z$  的等振幅路径和等相位路径。

为了考查等振幅路径和等相位路径在鞍点  $z_s$  邻域内的属性,我们在  $z_s$  点将  $q(z)$  展开为台劳级数

$$q(z) = q(z_s) + \frac{q''(z_s)}{2!}(z - z_s)^2 + \dots \quad (1.27)$$

式中,  $q''(z_s) = d^2q/dz^2|_{z_s}$ , 并已利用了  $q'(z_s) = dq/dz|_{z_s} = 0$ 。对于一阶鞍点,我们有

$$\begin{aligned} \exp[Qq(z)] &\approx \exp[Qq(z_s)] \exp\left[\frac{1}{2!} Qq''(z_s)(z - z_s)^2\right] \\ &\approx \exp[Qq(z_s)] \exp\left[\frac{1}{2!} |Qq''(z_s)| (z - z_s)^2 (\cos 2\psi + j \sin 2\psi)\right] \end{aligned} \quad (1.28)$$

式中

$$\psi = \arg(z - z_s) + \frac{1}{2} \arg[q''(z_s)] \quad (1.29)$$

对于通过鞍点  $z_s$  的各种路径,因为  $\arg[q''(z_s)]$  是常数,所以  $\psi$  只随  $\arg(z - z_s)$  而改变。我们注意到,  $\exp[Qq(z)]$  沿着从  $z_s$  出发而保持  $\psi = \text{常数}$  的各种路径有如下特性:

当  $\psi = \pm\pi/4$  或  $\pm 3\pi/4$  时,  $\exp[Qq(z)]$  的相位变化最快,但  $|\exp[Qq(z)]| = \text{常数}$ ,故是等振幅路径;

当  $\psi = 0$  或  $\pi$  时,  $|\exp[Qq(z)]|$  增加最快,  $\exp[Qq(z)]$  的相位保持恒定,故是最陡上升路径;

当  $\psi = \pm\pi/2$  时,  $|\exp[Qq(z)]|$  下降最快,  $\exp[Qq(z)]$  的相位保持恒定,故是最陡下降路径。

图 1.5 (a)表示了上述关系。我们将  $\exp[Qq(z)]$  的振幅增加和减小的区域分别称为“山区”和“谷区”,而鞍点则相当于山和谷的“隘口”,这里利用了地貌图的概念,十分形象。

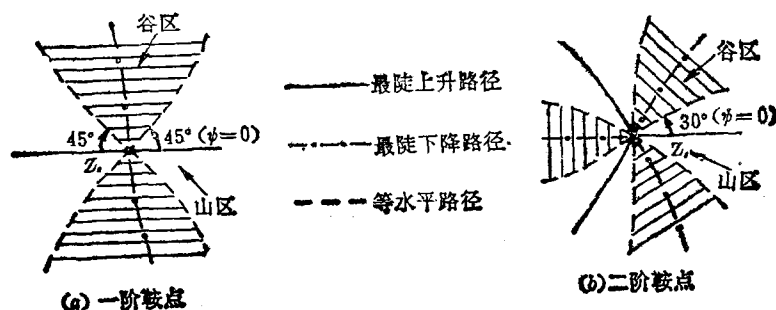


图 1.5 鞍点邻域内的特性

对于二阶鞍点,  $q'(z_i) = q''(z_i) = 0$ , 此时  $q(z)$  在鞍点附近的展开式有如下形式

$$q(z) = q(z_i) + \frac{q^{(3)}(z_i)}{3!}(z - z_i)^3 + \dots \quad (1.30)$$

由此可得

$$\exp[\mathcal{Q}q(z)] \approx \exp[\mathcal{Q}q(z_i)] \exp\left[\frac{1}{3!} |\mathcal{Q}q^{(3)}(z_i)(z - z_i)^3| \cdot (\cos 3\psi + j \sin 3\psi)\right] \quad (1.31)$$

式中

$$\psi = \arg(z - z_i) + \frac{1}{3} \arg[q^{(3)}(z_i)] \quad (1.32)$$

此时在鞍点附近有三个山区和三个谷区, 如图 1.5 (b) 所示。在鞍点处, 任何两条相邻线间夹角为  $30^\circ$ 。

同理可知, 在一个  $M$  阶鞍点的邻域内, 由类似的方法构成的路径图中可以有  $(M + 1)$  个山区和  $(M + 1)$  个谷区, 在鞍点处任何两条相邻线间夹角为  $90^\circ/(M + 1)$ 。

如果给定积分路径  $\bar{P}$  可以变形为通过一个或多个鞍点的最陡下降路径, 则由于指数振幅随离开鞍点而最迅速的下降, 因而式(1.1)中的积分对大  $\mathcal{Q}$  值的近似计算可表示为只计入来自鞍点近邻的贡献。同样, 我们也可以选择一条等振幅路径, 此时对大  $\mathcal{Q}$  的近似计算也可以只考虑来自鞍点近邻的贡献, 因为在此点相位是驻定的, 而指数项在路径的其余部分则因相位迅速变化而很快振荡, 以致于相应的积分对总结果的贡献也可以忽略不计, 这种方法通常称为“驻定相位法”。由于最陡下降法和驻定相位法采用了不同的积分路径, 它们有可能得出不同的积分结果。只有当等振幅路径可以被连续地变形为最陡下降路径时, 这两种结果才会是一样的。如果两条路径有同样的终点(例如在无限远处), 并且振幅函数  $f(z)$  在两条路径之间没有奇点, 就可以实现这种情况。

对于形式较为一般的函数  $q(z)$ , 要确定其完整的最陡下降路径(即在该路径上始终保持  $\text{Im}q(z) = \text{常数}$ ), 这是十分复杂的。此时我们可以利用直接靠近鞍点的一段最陡下降路径来进行不太严格的计算, 而这一段路径却是很容易确定的(见图 1.5)。此时只要在其余的路径段  $L$  上具有比在鞍点处更低的振幅, 即沿  $L$  有  $\text{Re}q(z) \leq \text{Re}q(z_1)$ , 而  $\text{Re}q(z_1) < \text{Re}q(z_i)$ , 那末在近似计算中由于忽略来自  $L$  的贡献所引起的相对误差是  $O\{\exp[\mathcal{Q}q(z_1) - \mathcal{Q}q(z_i)]\}$ 。这里, 记号  $g(\mathcal{Q}) = O[h(\mathcal{Q})]$  表示: 当  $\mathcal{Q} \rightarrow \infty$  时, 比值  $g(\mathcal{Q})/h(\mathcal{Q})$  保持有限, 即  $g(\mathcal{Q})$  和  $h(\mathcal{Q})$  同阶; 如果当  $\mathcal{Q} \rightarrow \infty$  时, 比值  $g(\mathcal{Q})/h(\mathcal{Q}) \rightarrow 0$ , 则记为  $g(\mathcal{Q}) = o[h(\mathcal{Q})]$ 。因此, 忽略  $L$  段后的近似积分计算结果与完整的最陡下降路径结果之间的区别在于一个指数项的误差计算, 它决定于  $z_1$  处的振幅以及到最近一个奇点的距离。这样, 如果可以忽略掉这个指数小的项, 则上述两种结果是等效的。只有当振幅超过最陡下降路径近似中的固有误差时, 保留这些指数小的贡献(例如来自比主鞍点振幅更小的另一个鞍点或一个奇点的贡献)才是有意义的。

## §1.2 单鞍点最陡下降法

### §1.2.1 一阶孤立鞍点的最低阶近似

如果式(1.1)中的积分路径可以变形成为通过鞍点的最陡下降路径(以 SDP 表示), 即

$$I(Q) = \int_{SDP} f(z) \exp[Qq(z)] dz \quad (1.33)$$

并假定被积函数中  $q(z)$  在  $z_i$  处有一阶鞍点, 即  $q'(z_i) = 0, q''(z_i) \neq 0$ , 而函数  $f(z)$  在  $z_i$  附近没有其它鞍点或奇点, 则由式(1.7)可知变量替换式为

$$q(z) = \tau(s) = q(z_i) - s^2, \quad s = s_r + js_i \quad (1.34)$$

由上式可得

$$\operatorname{Re} \tau(s) = \operatorname{Re} q(z_i) - s_r^2 + s_i^2 \quad (1.35a)$$

$$\operatorname{Im} \tau(s) = \operatorname{Im} q(z_i) - 2s_r s_i \quad (1.35b)$$

由式(1.35)可见, 在  $s$  平面上通过鞍点  $s = 0$  而又保持  $\operatorname{Im} \tau(s) = \text{常数}$  的最陡下降路径就是  $s_i = 0$  的实  $s$  轴, 而最陡上升路径就是  $s_r = 0$  的虚  $s$  轴。因此, 式(1.6)中的积分变为

$$I(Q) = \exp[Qq(z_i)] \int_{-\infty}^{\infty} G(s) \exp(-Qs^2) ds \quad (1.36)$$

式中  $G(s)$  由式(1.4a)给出

$$G(s) = f(z) \frac{dz}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{-2s}{q'(z)} \quad (1.36a)$$

因为已假定  $G(s)$  在  $s = 0$  附近解析(孤立鞍点), 故可展开为幂级数

$$G(s) = G(0) + G'(0)s + G''(0)\frac{s^2}{2!} + \cdots + G^{(n)}(0)\frac{s^n}{n!} + \cdots \quad (1.37)$$

这个级数一致收敛于圆心在  $s = 0$ 、半径为  $r$  的一个圆内, 这里  $r$  表示从  $s = 0$  到最近一个奇点的距离。在鞍点  $s = 0$  (即  $z = z_i$ ) 处, 对式(1.36a)运用罗比塔法则, 可求得

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)_{s=0} = \frac{-2}{q''(z_i) \left(\frac{dz}{ds}\right)_{s=0}}$$

$$\text{即} \quad \left(\frac{dz}{ds}\right)_{s=0} = \sqrt{\frac{-2}{q''(z_i)}} \quad (1.38)$$

因此, 展开式(1.37)的第一个系数变为

$$G(0) = f(z_i) \left(\frac{dz}{ds}\right)_{s=0} = f(z_i) \sqrt{\frac{-2}{q''(z_i)}} \quad (1.39)$$

因为  $ds$  沿积分路径(包括  $s = 0$  处)是正的, 因此  $dz/ds$  在  $s = 0$  处的幅角  $\arg(dz/ds)$  必须选择来等于  $dz$  沿 SDP 在  $z_i$  处的幅角  $\arg(dz)$  (见图 1.6)。这个要求规定了式(1.39)中平方根函数的符号。

这样, 如果只用  $G(0)$  来近似表示  $G(s)$ , 则我们得到式(1.36)中积分的最低阶渐近近似式

$$I(Q) \sim G(0) \exp[Qq(z_i)] \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Qs^2) ds \quad (1.40)$$

将式(1.39)代入上式, 并注意到定积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Qs^2) ds = \sqrt{\frac{\pi}{Q}}$$

于是可得