



新世代工学シリーズ

通信工学概論

木村磐根 編著



新世代工学シリーズ

通信工学概論

木村 磐根

編著
江苏工业学院图书馆
藏书章

編著者・著者略歴

木村 磐根 (きむら いわね)

編者・執筆担当：1, 4, 7, 12 章

1955 年 京都大学工学部電気工学科
卒業

1961 年 工学博士

現 在 大阪工業大学情報科学部情報
システム学科教授
京都大学名誉教授

里村 裕 (さとむら ゆたか)

執筆担当：5, 6 章

1976 年 大阪大学大学院工学研究科
通信工学専攻博士課程修了

1976 年 工学博士

現 在 大阪工業大学工学部電気工
科教授

石尾 秀樹 (いしお ひでき)

執筆担当：3 章

1966 年 京都大学工学部電気工学科
卒業

1980 年 工学博士

現 在 大阪工業大学情報科学部情報
処理学科教授

野村 康雄 (のむら やすお)

執筆担当：7 章

1963 年 大阪大学大学院工学研究科
通信工学専攻修士課程修了

1974 年 工学博士

現 在 関西大学工学部電子工学科
教授

岡田 博美 (おかだ ひろみ)

執筆担当：10 章

1970 年 大阪大学工学部通信工学科
卒業

1975 年 工学博士

現 在 関西大学工学部電子工学科
教授

山内 雪路 (やまうち ゆきじ)

執筆担当：9 章

1986 年 大阪大学大学院工学研究科
通信工学専攻博士課程修了

1986 年 工学博士

現 在 大阪工業大学情報科学部情報
システム学科助教授

佐藤 亨 (さとう とおる)

(著者五十音順)

執筆担当：2, 8, 11 章

1976 年 京都大学工学部電気工学第二
学科卒業

1982 年 工学博士

現 在 京都大学大学院工学研究科
通信情報システム専攻教授

新世代工学シリーズ

通信工学概論

©木村磐根 1998

平成 10 年 10 月 5 日 第 1 版第 1 刷発行

編 著 者 木 村 磐 根

発 行 者 株式会社 オ ー ム 社
代 表 者 佐 藤 政 次

〔検印省略〕

発 行 所 株式会社 オ ー ム 社
郵便番号 101-8460
東京都千代田区神田錦町 3-1
振 替 00160-8-20018
電 話 03(3233)0641(代表)
<http://www.ohmsha.co.jp/>

Printed in Japan

組版 ずうこむ 印刷 エヌ・ビー・エス 製本 関川製本所

落丁・乱丁本はお取替えいたします

ISBN 4-274-13156-4

R <日本複写権センター委託出版物・特別扱い>

は し が き

計算機・情報科学が急速に発展し、コンピュータ間での通信が、電話などの公衆通信と同じ程度に日常のものとなってきた。大学における教育においては、これまでの通信工学という科目がコンピュータそのものの技術に比べて少し古臭く感じられ、重要度が軽視されてきている観がある。しかし、コンピュータが発達して、コンピュータを用いた通信がごく普通になっても、これらはこれまでの通信工学の基礎の上に構築されており、その基礎知識は今後とも大変重要である。

また、携帯電話、ページャ(ポケベル)などで代表される個人を対象にした移動通信が普及して、大学でも、多数の学生がその便利さを享受しており、授業中呼出しベルが鳴るという由々しき状況も時折見られるようになった。これらの移動通信システムは電波による無線通信技術が必須であるが、電波は空気と同様、あまりにも身近すぎるとその重要性が見過ごされることになる。

これらの状況を踏まえると、情報科学(工学)など、必ずしも通信を専門としない学生を対象にして、通信工学の重要性をできるだけわかりやすく紹介することが必要と思われる。本書はそのような観点から、電波・無線の基礎知識、携帯電話やインターネットなどの新しい通信技術、衛星を使った放送などを含む広い通信工学の内容をやさしく解説することを強く意図して編集した概論である。このテキストにより、情報化時代の基礎科目としての通信工学が、広く再認識されることを期待している。

なお、本文中虚数単位は j を用いた(2, 4章)。また、反比例は逆比例と表記している(3, 4章)。各章には囲み記事を入れた。また各章の演習問題には、できるだけ詳しい解答を示し、内容の理解を助けるよう努めた。内容をやさしくするためには数式をできるだけ使わないで説明することも必要であるが、通信工学では最低限の理論的記述が必要であるため、2, 4, 5, 6章などではやむを得ない範囲で数式が使われている。

本書の執筆は、主に私立大学での教育経験の豊富な先生方に分担を頂いた。具体的には2, 8, 11章を佐藤 亨, 3章を石尾秀樹, 5, 6章を里村 裕, 7章を野村康雄・木村磐根, 9章を山内雪路, 10章を岡田博美, 1, 4, 12章を木村磐根がそれぞれ担当した。

1998 年 9 月

編集責任者 木村 磐根

目 次

1 章	通信の歴史をふりかえる	1
2 章	信号と周波数スペクトル	7
2.1	信号の種類と性質	7
2.2	周波数スペクトル	8
2.3	フーリエ級数とフーリエ変換	9
2.4	フーリエ変換の性質	13
2.5	スペクトルと信号処理	16
	演習問題	20
3 章	有線伝送系はどのような特性を持つか	21
3.1	さまざまな有線伝送路とその使われかた	21
3.2	メタルケーブルの構造と伝送特性	23
3.3	光ファイバの原理と構造	25
3.4	光ファイバの特性を決めるもの—損失と伝送帯域—	28
	演習問題	33
4 章	無線伝送系はどのような特性を持つか	35
4.1	電波を効率よく放射するアンテナ	35
4.2	自由空間伝搬と回折効果	43
4.3	電離層反射を利用した伝搬	46
4.4	宇宙通信における電波の窓	48
	演習問題	49
5 章	振幅変復調方式—振幅の変化に情報を乗せる—	51
5.1	振幅変調方式	51
5.2	単側波帯変調方式と残留側波帯変調方式	54
5.3	変調と復調	55
5.4	周波数分割多重方式	59
	演習問題	60
6 章	角度変復調方式—位相・周波数に情報を乗せる—	61
6.1	角度変調方式	61
6.2	FM 波の周波数スペクトル	63
6.3	変調と復調	67

6.4	AM 波, FM 波のそれぞれの特徴	69
	演習問題	72
7 章	アナログからデジタルへ	73
7.1	標本化 (サンプリング)	73
7.2	アナログパルス変調方式	75
7.3	サンプリングレベルの量子化	76
7.4	PCM 方式と AD-DA 変換	78
7.5	その他のデジタル符号化方式	82
	演習問題	83
8 章	情報社会を支えるデジタル変調方式	85
8.1	デジタル信号の無線搬送	85
8.2	デジタル信号の効率的伝送	87
8.3	デジタル信号の誤り訂正	90
8.4	信号の多重化	93
	演習問題	96
9 章	移動通信のあらまし	97
9.1	移動通信で何が問題になるのか	97
9.2	セルラ方式の特徴と利点	100
9.3	携帯電話と PHS はどう違う	102
9.4	ページャとそのしくみ	104
9.5	これからの移動通信	105
	演習問題	106
10 章	公衆通信ネットワークのしくみ—伝送と交換—	107
10.1	通信ネットワークの構成	107
10.2	電話とデータ通信—回線交換とパケット交換—	109
10.3	コンピュータ通信とマルチメディア通信—ISDN とインターネット—	115
10.4	ATM 方式と超高速通信ネットワーク—21 世紀の方式—	121
	演習問題	125
11 章	音声・テレビジョン放送	127
11.1	AM, FM 放送とステレオのしくみ	127
11.2	標準方式カラーテレビジョン	128
11.3	デジタル放送	132
	演習問題	135

12 章 通信, 放送のための衛星	137
12.1 静止軌道, 低軌道衛星.....	137
12.2 衛星通信.....	138
12.3 放送衛星.....	143
演習問題.....	147
略 解	149
参 考 文 献	157
索 引	159

1 章

通信の歴史をふりかえる

情報の伝達手段が通信であるが、情報の伝達は人類が始まって以来なんらかの方法で行われてきたと思われる。記録として残されているものとしては、今から 3200 年ほど前のものが最古とされている。本章では、通信に関する最古の歴史から現代まで、どのような発展を遂げてきたかを簡潔に紹介する。なお、本章については 1) ～ 5) の文献を参考にされたい。

通信工学を学ぶに先だち、その発展の歴史を知っておくことは有意義なことである。表 1.1 に主だった事項を年代順に整理して示す。

通信の歴史の上で、最古の通信手段はのろし(たいまつ)といわれているが、記録に残っている最も古いものは紀元前 1184 年、トロヤ陥落に際してギリシャ軍がのろしを使い、8 カ所の中継でエーゲ海をわたり、555km 離れたミケネ宮殿まで 1 日足らずでその情報を伝えたという記録がある。また、紀元前 100 年ころのギリシャで、のろしによるテレグラムというものが考案された。すなわち、図 1.1 にあるように、五つののろしを同時にあげられるのろし台を 2 組準備し、それぞれの台からあげるのろしの数を一つないし五つに選ぶと、 $5 \times 5 = 25$ 種類の情報を送ることができる。実際にはギリシャ文字は 24 文字であるから、この方法で文字による通信ができたわけである。

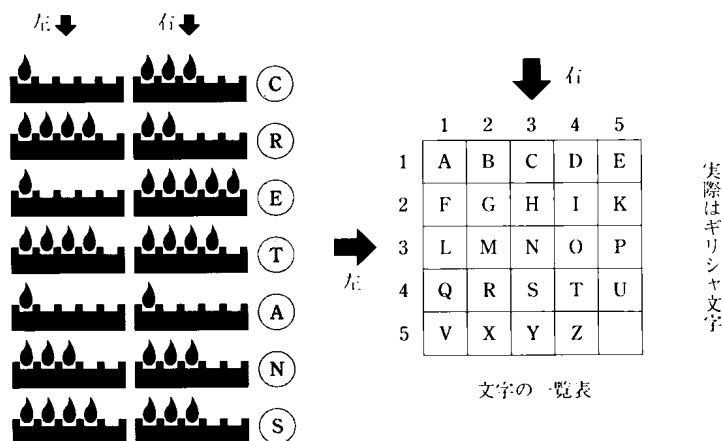


図 1.1 のろしによるテレグラム

1 章 通信の歴史をふりかえる

中国でも紀元前 2 ～ 1 世紀には敦煌周辺の砂漠地帯に、火炎信号のための 44 カ所の見張り台があったことがわかっている¹⁾。なお、太鼓など、音も情報伝達に使われたが、音波は風により消されたりもするし、光に比べて通達距離が短かったと思われる。

これらのことから、歴史的にも遠距離の通信手段には主に光が使われたことは明らかであり、またどちらかというとデジタルな通信であったことは大変興味深いことである。過去においては、通信手段は、敵からの攻撃をいち早く知るな

表 1.1 通信技術発展の歴史

古代の通信手段

[光-視覚]	のろし； 古代ギリシャ(紀元前 12 世紀), 中国(紀元前 2～1 世紀) [武田信玄(1560 ころ)]
[音波]	たいこ； アフリカのタムタムなど

18 世紀以降

[光-視覚]	シャップ方式 Claude Chappe(仏); (~1793) 556 カ所の腕木信号機(semaphore)で 4 800km の通信網
[静電気]	(欧) 木製小球方式, 火花方式など(1750～1810)
[電気化学]	電池の発明 Volta(伊)(1800) 水の電気分解, リトマス紙の変色(1800～1845)
[電磁式]	電流の磁気作用 Oersted(デ)(1820) モールス式電信機 Morse and Vail(米)(1835)
[印刷電信]	ニューヨーク-フィラデルフィア間(米)(1849)
[海底ケーブル]	絶縁材料ガタバーチャ(1847) 大西洋横断ケーブル 3 240km(1858)
[電話]	‘Telephone’ の語 Huth(加)(1796) 電話機の特許 Bell(米)(1876.2.14), Gray(米)(1876.2.14) 日本への電話の渡来(1877, 明治 10) 自動交換機 Strowger(1889)
[無線通信・放送]	電磁波理論 Maxwell(英)(1864) スパークギャップ送信器 Hertz(独)(1887) 検波器コヒーラ Branly(仏)(1892) 超大アンテナで大西洋横断通信 Marconi(伊)(1901) 電離層の存在の仮説 Kennelly(米), Heaviside(英)(1902) 電離層高度の測定 Appleton and Barnett(英)(1924) 放送開始 ビッツバーグ(米)(1920) 東京放送局(1925) テレビの発明 Baird(英) 白黒(1925), カラー(1928) 日本の全電子式テレビ 高柳健次郎(1928)
[衛星通信・放送]	人工衛星 Sputnik 打上げ(ソ)(1957) 受動衛星 Echo 1(米)(1960) 能動衛星 Telstar 1(米)(1962), Relay 1(Kennedy 暗殺(1963.11.23)) 静止衛星 Syncom 2(1963), Syncom 3(東京オリンピック中継; 1964)
[光通信]	レーザー(laser)の発明 Maiman(米)(1960) 半導体レーザー 室温連続発振 Bell Lab.(1970) 室温長寿命(100 年) NTT(1977) 低損失光ファイバの発明 1.55 μ m 0.2dB/km NTT(1979) エルビウム光ファイバによる増幅 光ソリトン通信 20Gbit で 13 000km AT&T(1993)
[移動体通信]	セルラ方式などを用いた中継・交換技術(米)(1977) PHS(1995), 低軌道移動通信衛星 IRIDIUM(1998)

ど、生命にかかわる情報の伝達に必須であり、それが通信技術を進歩させてきたという皮肉な面もあった。

現代の通信技術のもととなっている遠距離通信方式は、今から 200 年ほど前から始まった。一つはフランスをはじめヨーロッパで普及した**腕木信号機方式**²⁾で、一例として**シャップ**(C. Chappe) により考案されたものを図 1.2 に示す³⁾。連結された 3 本の腕木の曲げかたで文字を表し、これを遠方から望遠鏡で見るという単純なものである。556 カ所の中継で、総延長通信距離は 4 800km におよんだといわれている。

一方、電気による通信手段の試みは、まず静電気によるものが 18 世紀の後半にあったが、**ボルタ**(A.Volta) が電池を発明 (1800 年) してから、コイルに電流を流す電磁石が使えるようになって急速に進歩した。**モールス**(S.F.Morse) らが電信機を発明したのが 1835 年であるが、**モールス符号**と呼ばれるトン (短点) とツー (長点) とスペース (間隔) の組合せによる符号は、印刷工場にある活字の数を参考にして、出現頻度の高い文字に対して短い符号を割り当てたといわれている (図 1.3)。この符号が、現代の情報理論を先取りして作られていることは驚くべきことである。この方式による通信手段は 20 世紀の後半まで、150 年間も使われてきた。

これらはいずれも 1 字ずつ文字を送る方法であり、デジタル通信のカテゴリーになるが、一方、アナログ方式は、**ベル**(A.G.Bell) による電話の発明 (1876 年) からといえる。音声によって送話器に流れる交流電流が、そのまま有線伝送路を通して相手の受話器でもとの音声に変換され、直接耳で聞く方式である。この技術も脈々と現代まで続いている。

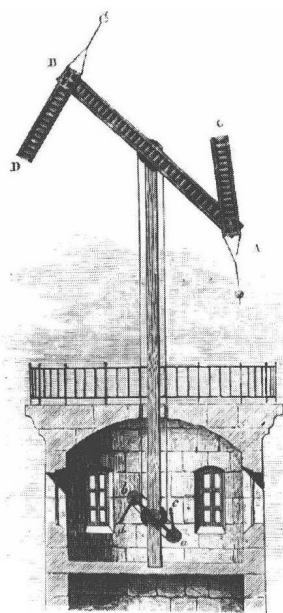


図 1.2 シャップの腕木信号機

E	—	1 2 0 0 0
T	— — —	9 0 0 0
A	— — — —	8 0 0 0
I	— —	8 0 0 0
N	— — — —	8 0 0 0
O	— — —	8 0 0 0
S	— — — —	8 0 0 0
H	— — — — —	6 4 0 0
R	— — — —	6 2 0 0
D	— — — — —	4 4 0 0
L	— — — —	4 0 0 0
U	— — — — —	3 4 0 0
C	— — — —	3 0 0 0
M	— — — — —	3 0 0 0
F	— — — — —	2 5 0 0
W	— — — — —	2 0 0 0
Y	— — — — —	2 0 0 0
G	— — — — —	1 7 0 0
P	— — — — —	1 7 0 0
B	— — — — —	1 6 0 0
V	— — — — —	1 2 0 0
K	— — — — —	8 0 0
Q	— — — — —	5 0 0
J	— — — — —	4 0 0
X	— — — — —	4 0 0
Z	— — — — —	2 0 0

図 1.3 最初のモールス信号と印刷屋で調査した活字数

電波は、**マクスウェル**(J.C.Maxwell) が理論的に存在を予言し、**ヘルツ**(H.R.Hertz) によって実験的に確かめられたが、これを通信に実用化したのは**マルコーニ**(G.Marconi) によってである。今からちょうど 100 年ほど前である。モールス電信信号を電波に乗せて送る無線電信であり、タイタニック号の遭難以来、特に海上船舶との通信手段として大変重要なものとなった。

一方、電波のアナログ的な使いかたとして、1920 年には音声波形で振幅変調した放送が米国ピッツバーグで開始され、その 5 年後には東京放送局が開局している。ほぼこのころから長距離国際回線にも無線電話が使えるようになった。また、1925 年には画像を伝送できる白黒テレビジョンが、その 3 年後にはカラーテレビジョンが発明され、現代のカラーテレビジョン放送の基礎が築かれた。

1957 年、旧ソ連がスプートニク衛星の打上げに成功し、世界の宇宙開発競争が始まったが、最初に衛星を遠距離通信の中継に使ったのは米国で、スプートニク打上げからわずか 3 年後の 1960 年であった。当初はアルミ箔をはった風船衛星に地上から通信の電波を当て、その反射波を離れた受信点で受けるという受動的なものであったが、その 2 年後には、現在衛星通信に使われているような、能動的な方式、すなわち衛星に送受信アンテナと中継器を搭載する方式へと発展を遂げ、さらに放送にも衛星が使われるようになった。

最古の通信は、むしろデジタル的な方式であることを述べたが、現代のデジタル通信方式は**ナイキスト**(H.Nyquist) による**標本化の原理**の発表 (1928

年)⁴⁾と、リーブス(A.H.Reeves)によるパルス符号変調(pulse code modulation: PCM)方式の発明(1937年)⁵⁾によって始まったといえる。ただ、当初は雑音に強いという優れた特徴にもかかわらず、送受信設備が複雑になるため、実用化されたのは1962年ころからであった。その後半導体技術の進歩により、かなり複雑な回路でも小型にすることができ、量産することによって安価に作ることができるようになったため、最近特に急速な発展をし、その方式が通信の目的以外、たとえばCD(compact disc)などにも広く利用されるようになった。

最初に述べたように、のろしによる通信は光によるものであるが、光源は広い波長範囲を含む熱放射であり、伝送路は大気中で、受光はあくまで人間の目であった。現代の光通信はレーザー(laser)の発明と、低損失の光ファイバの発明に依存している。レーザーはマイマン(G.Maiman)により1960年に発明されたが、最初はルビーレーザーであり、通信に汎用するには必ずしも適してはいなかった。その後、室温で連続発振する半導体レーザーが発明され(1970年)、またそれが長寿命化された(1977年)。また、光ファイバも、同軸ケーブルなどに比べても超低損失なものが安価にできるようになった。この両者の進歩に支えられて、光ファイバ通信方式が急速に普及・発展することになった。

一方、コンピュータについては、1642年、パスカルが機械的なコンピュータを初めて作って以来、進歩は比較的ゆっくりしたものであった。しかし1946年に真空管式のコンピュータENIACが登場してからは、半導体技術の進歩により、急速にトランジスタに替わり、またLSI化され、それによりマイクロプロセッサが作られ(嶋正利 他, 1971年)、さらにパーソナルコンピュータへと発展していった。

コンピュータは本来数値計算のためのものであったが、ワードプロセッサのように情報処理機械としての役割が増え、現在ではそれらがネットワークでつながって、情報通信の端末としての役割も大きくなってきている。もちろんこれまでの公衆通信においても、回線交換の仕事の大部分はコンピュータによる制御によって行われており、携帯電話等の新しい通信手段においても、交換・制御のほか、利用者の時々刻々の所在を記憶するといった大型メモリとしての働きなど、通信業務はコンピュータなしでは全く成り立たなくなっている。

以上のように、通信分野の技術の発展の歴史をざっと振り返ってみたが、この間すでに述べたように、ボルタの電池以来、電磁石、三極真空管(ド・フォレスト(L.De Forest), 1906年)、トランジスタ(ショックレー(W.B.Shockley)、ブラッテン(W.H.Brattain)、バーディン(J.Bardeen), 1948年)、LSI、レーザー、光ファイバ、コンピュータといった発明により通信技術が飛躍的に発展し、また衛星という技術が、全く新しい発想の通信手段を生み出したことは注目に値する。

さらに、通信は「いつでも、どこでも、誰とでも」の標語にも示されるように、船舶通信、列車電話、自動車電話といった移動通信手段が一段と飛躍して、情報端末を移動する各個人が持つ、携帯電話やPHSの普及した世の中となった。また、マルチメディアといわれるように、音声だけでなく、画像、データなども、

携帯端末から自由にやりとりすることも可能になって、通信がよりパーソナルでより多目的なものに発展してきている。

信号と周波数スペクトル

電気通信においては、伝えたいさまざまな情報を「信号」という形にしてやりとりする。その内容は音声、文字、写真、動画像や計算機データなど多岐にわたるが、本章ではこれらを統一的にあつかう方法について考える。また、その信号の特徴を表す方法として周波数スペクトルの概念と、これを利用して信号を加工する手段である信号処理の基礎について学ぶ。なお、本章については 6) ~ 8) の文献を参考にされたい。

2.1 信号の種類と性質

信号は通常、電圧や電流の時間変化によって情報を伝えるから、時間の関数 $f(t)$ で表現される。テレビ画像のように 2 次元でかつ時間とともに変化する信号の場合は、 $f(x, y, t)$ のように表現する必要があると思えるが、11 章で述べるように、人間の視覚が速い動きに反応しないことを利用して、画面上を水平・垂直に走査し、各点の持つ情報を時系列に変換して送ることにより、時間のみの関数で表現することができる。ステレオ放送のように複数の信号を含む場合も、5 章以降に述べる変調の技術により、一つの信号の上に多重化することが可能である。本節では、さまざまな信号をその特徴によって分類し、その性質を考える。

周期信号とは、たとえば図 2.1 に示すように、この関数が任意の t について

$$f(t+T) = f(t) \quad (2.1)$$

をみたす信号、すなわちある周期 T で同じ波形を繰り返す信号のことである。これ以外のすべての信号を非周期信号と呼ぶ。周期信号の簡単な例としては、正弦波やのこぎり波、矩形波など、信号発生器で作られる波形の多くがあげられる。周期信号で伝送できる情報は、時間 T ごとに繰り返すため、これがそのまま通信における信号となることは少ないが、情報伝送の重要な要素として用いられる

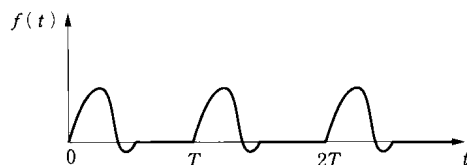


図 2.1 周期信号

ほか、以下の節に示すように信号の性質を分析する場合の基礎となる。

周期信号も含めて、任意の時刻 t における値が一意に定まった信号を確定的信号という。特に確定的な非周期信号を過渡的信号という。その代表的なものとしては、**単位階段関数** (unit step function) $u_0(t)$

$$u_0(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (2.2)$$

や、**単位インパルス関数** (unit impulse function) $\delta(t)$ がある。 $\delta(t)$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{かつ} \quad \delta(t) = 0 \quad (t \neq 0)$$

をみたす関数として定義される。これにはさまざまな表現が考えられるが、よく用いられる形式は、十分小さな正数 Δ により

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t), \quad \delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \left(|t| \leq \frac{\Delta}{2} \right) \\ 0 & \left(|t| > \frac{\Delta}{2} \right) \end{cases} \quad (2.3)$$

と表されるものである。

$u_0(t)$ と $\delta(t)$ の間には、式 (2.3) からわかるように

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u_0(t) \quad (2.4)$$

の関係がある。 $u_0(t)$ や $\delta(t)$ はシステムの特性或動作の解析において重要な役割を果たす。

実際に通信に用いられる信号の多くは、その時々によって異なる情報を伝送するわけであるから、上記の確定的な信号とは異なり、各時刻における値は不確定で確率的に定まると考えた方が都合がよい。このような信号を**不規則信号** (random signal) と呼ぶ。

たとえば、人間の会話を無限の過去から未来まで記録すれば、ある確定的な時間の関数 $f(t)$ で記述することも可能であるが、このような関数はあまりに複雑で取扱いが困難である。また、話題が異なればその関数形が異なるのでは一般性を持った議論ができない。しかし、人間の音声信号にはその内容によらず一定の特徴があるので、通信システムを考えるうえではこの特徴のみに着目し、同じ特徴を持った不規則信号として取り扱うことができる。

2.2 周波数スペクトル

信号の特徴を表す重要な量として、**周波数**がある。日常的には周波数は、たとえば FM ラジオ局の〇〇 MHz という数字でなじみがある。これは、その局がその周波数の電波を送信しており、受信機をその周波数に合わせればその局が送信している番組、すなわち信号を受信できることを意味する。しかし、このときも

しその局が送信している電波が、厳密にある周波数の正弦波であったとすると、正弦波の波形は、振幅、周波数、位相の三つの定数で完全に表現できるはずであるから、音楽などの情報を伝送することは不可能になる。

実際には、伝送されているのは表示された周波数の近辺のさまざまな周波数を持つ信号の重ね合わせであり、それらの組合せによって複雑な信号が伝送されているのである。ラジオ受信機を使って、多くの電波の中から希望する局のみを選局できるのは、各局が異なる周波数を用いているため、特定の周波数に近い信号のみを抽出することによってそれらを分離できるからである。

音楽について考えると、音の高低が音波の周波数に対応することはよく知られており、たとえば1オクターブの音程差は周波数にすると2倍の比にあたる。また楽器の音色は倍音、すなわち基本となる周波数の整数倍の周波数を持つ成分の振幅分布によって定まる。人間の聴覚は、この分布のわずかな違いを識別することのできる、極めて優れた周波数分析器であるということが出来る。

このように、信号の特徴にはその信号に含まれるさまざまな周波数成分の分布が深くかかわっている。プリズムを用いて光を波長によって分解したものをスペクトルというが、電気信号もこれと全く同様に周波数によって分解できる。これを周波数スペクトルという。周波数スペクトルは、周波数 f 、または角周波数 $\omega (= 2\pi f)$ の関数であると考えることができる(以下、本書では主に ω を用いる)。

ある信号が低い周波数の信号のみを含むとき、その信号の時間変化はゆっくりとしたものとなり、逆に高い周波数のみであれば短い周期で変動するはずである。このように、信号 $f(t)$ とその周波数スペクトルの間には密接な関係がある。周波数スペクトルを $F(\omega)$ と表すと、 $F(\omega)$ と $f(t)$ の間にはどのような関係が成り立つであろうか。この関係を表すものが次に述べるフーリエ変換である。

2.3 フーリエ級数とフーリエ変換

最初に、式 (2.1) で表される周期 T の周期関数について考える。フーリエ (J.B.J. Fourier, 1768-1830) は、このような関数は、周期 T/n (n は整数) の正弦波の無限級数で表現できると考えた。

まず、簡単のために $f(t)$ が奇関数、すなわち $f(-t) = -f(t)$ であるとする。この場合 $f(t)$ は奇関数のみの級数で表現できるはずである。また、級数の各項も式 (2.1) をみたく必要があるから、結局各項は T の区間にちょうど整数個の波を含む正弦波となり、求める展開式は

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t \quad (\omega_0 = \frac{2\pi}{T}) \quad (2.5)$$

の形となる。右辺の各係数 b_n を求めるためには、特定の b_n を含む項以外が消えるような演算を両辺に施せばよい。これには次の関係を用いる。

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin m\omega_0 t \cdot \sin n\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{T}{2} & (m = n) \end{cases} \quad (2.6)$$

ただし m, n は自然数である。

このような性質を持つ関数列を直交関数 (orthogonal functions) と呼ぶ。式 (2.5) の両辺に $\sin n\omega_0 t$ を掛け、 $-T/2$ から $T/2$ まで t に関して積分すると

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

の関係が得られる。

$f(t)$ が偶関数の場合も同様に $\cos n\omega_0 t$ の級数により展開することができる。任意の関数は偶関数と奇関数の和で表されるから、結局一般の周期関数 $f(t)$ について

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt & (n = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.8)$$

と表現できる。これを関数 $f(t)$ のフーリエ級数展開と呼ぶ。

式 (2.7) において

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}, \quad \sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

の関係を用いると

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.9)$$

と表すことができる。この場合の各係数 c_n は、式 (2.8) より

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.10)$$

となる。 c_n は一般に複素数となる。この形式を複素フーリエ級数 (complex Fourier series) と呼ぶ。式 (2.9) において注意すべきことは、式 (2.7) の場合と異なり級数の範囲が $-\infty$ から ∞ までとなっていることである。これは、形式的に「負の周波数」も考えていることを表す。

普通に「周波数」という場合には正弦波の周期の逆数を意味するので、正の数しか考えることができない。しかし、式 (2.9) では $f(t)$ を実関数である $\sin$ 関数の代わりに複素関数である $e^{jn\omega_0 t}$ で展開することになる。このとき、複素平面上で $e^{jn\omega_0 t}$ は t の増加とともに円の軌跡を描くが、その向きは $n > 0$ のときは反