飞行控制系统的分析与设计

国防工业出版社

飞行控制系统的分析与设计

〔美〕阿瑟·L·格林雪特 著

译

国防工业出版社

内容简介

本书主要介绍运载飞行器，人造地球卫星的姿态控制问题。内容包括运载飞行器的短周期运动方程和传递函数的导出；考虑结构弹性时的运动方程和传递函数；运载飞行器弹道运动方程；运载飞行器控制的主要敏感元件和执行机构的动力学特性和传递函数；运载飞行器姿态控制系统的分析和设计；卫星姿态运动方程；卫星的姿态控制问题和控制设备；并综合介绍了载人空间飞行器空中应急返回问题的基本概念。

本书可供从事空间飞行器控制和自动控制专业的科学工作者和工程技术人员以及高等学校相近专业的学生参考。

ANALYSIS AND DESIGN OF SPACE VEHICLE FLIGHT CONTROL SYSTEMS
ARTHUR L.GREENSITE
SPARTAN BOOKS 1970

*

飞行控制系统的分析与设计
〔美〕阿瑟·L·格林雪特 著
长 工 译

*

国防工业出版社 出版
北京市书刊出版业营业許可証出字第 074 号
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32 印张21 542千字
1978年12月第一版 1978年12月第一次印刷 印数：0,001—5,505册
统一书号：15034·1680 定价：2.60元

译　序

为了适应我国在空间技术方面发展的需要，遵照伟大领袖毛主席关于“洋为中用”的教导，我们翻译出版了这本书，供从事自动控制和空间技术方面工作的读者参考。

本书译名所称的“控制”，按照原文在英美习惯所指主要是飞行器的姿态控制，或者说不包括飞行器的制导，只包括运动轨迹控制问题。

本书涉及的飞行器控制仅限于对运载飞行器和人造地球卫星的控制，没有包括对月球和星际航行飞行器的控制。

本书是原编者所编的以《控制原理》为总名的两书中的第二本。照原编者的说法，本书第一本《近代控制原理》〔原名Control Theory: Vol, Elements of Modern Control Theory, 1970〕为本书提供控制原理方面的基础。但是，从本书涉及的内容看，完全可以独立于所谓的它的姊妹篇，即第一本。本书所用到的系统分析设计原理方面的知识主要是根轨原理，可参阅任何一本控制原理的教材。

本书对所论的对象的数学模型的建立讨论得比较详细。对于系统的分析设计，对运载飞行器谈得比较具体。从整体来讲，对所讨论的对象的控制问题着重提供一些概念性的综述，对于需要了解所涉及的那一类控制对象的控制问题有一定参考价值。

本书中肯定会有歪曲和错误的观点。希望读者用批判的眼光来阅读和参考本书。

由于我们水平所限，译文也会有不少错误和不当之处，欢迎读者提出批评指正。

目　录

第一章　短周期动力学

空间运载火箭在发射后的动力飞行阶段的性能，通常分成两个不同的但又有联系的阶段来进行研究的。第一是以特定的惯性坐标系为基准处理火箭的轨线（trajectory），而从事诸如有效载荷量、与理想轨线的偏离以及环绕轨道（orbit）飞行能力等因素的研究。研究由于诸如参数的不定性和随机负载等引起对理想轨线的偏离一般称为"长周期动力学"。对此，飞行器通常被假定为一质点，而它围绕理想轨线的振荡则具有一个"长"的周期。但是，控制系统使飞行器定向的作用不是瞬时的。这将引起飞行器绕质量中心的振荡。而要完成飞行任务，这些振荡必须衰减掉。这些振荡周期比较短，研究这些运动即构成飞行器"短周期动力学"的主要内容。

众所周知，对飞行器自动驾驶仪的稳定性和性能的有意义的研究，需要考虑许多已知有重大影响的因素。为了有效地分析这方面研究所要处理的复杂系统，人们采用了研究相对理想轨线扰动的古典方法；从而得出一线性系统，对此我们掌握有可用的有力的分析工具。

在这一章内，将考虑重心偏心度、弯曲、推进剂的晃动和发动机惯性等因素，导出所谓的扰动方程。推导将从最基本的原理出发，因此只要在推导中给以适当的变更，就可以得到强调问题的某些侧面的特定方程式。同样，可以根据特殊的研究要求，计入或取消各种不同的效应。

应当简述一下关于坐标系的选取问题。分析导弹系统通常使用体轴系，而不采用一般用于飞机的"稳定轴系"。这样选择的理由之一是：导弹和宇宙飞行器的空气动力稳定性导数在实验上

和分析上都是通过机体轴系得到的。而且，一般来说宇宙飞行器不产生升力，它的稳态迎角通常为零，与飞机飞行的情况不同，所以用稳定轴系没有什么好处。

也应当强调，在这里导出的方程式只是对短周期（约几秒钟的数量级）才是正确的。在此时间间隔内，飞行器的一些性质（诸如质量、重心位置和转动惯量等）均假定不变。因为这些量的变化相对控制系统的时间常数来说是很缓慢的，故这种近似法一般是正确的。

目前所用的航天器的稳定性及控制分析的方法，是由兰切斯特（Lanchester）[3]和布兰（Bryan）[4]在本世纪初所用方法的推广。虽然这些研究者主要从事飞机和滑翔机的研究，但他们所采用的一般方法本质上是在一参考状态周围扰动的古典方法，这种方法至今还被广泛地应用。这是由于全面地描述飞机（或航天器）的运动是高度复杂的，这种描述包含有许多非线性项和难处理的函数，因此，要得到精确形式的解是不可能的。

这个一般方法用于运载火箭时，因为其质量随时间而变这个事实而使问题更进一步复杂化了，也因为这种飞行器的控制系统是闭环的（反之，驾驶员驾驶飞机则主要是开环的），必须考虑各种各样的其他因素（例如运载火箭的挠性）对控制系统的影响。

尽管如此，上述一般处理方法仍是基本上相同的；稳定性和控制问题都是通过扰动法来分析的。然而，得出的方程式的有效时间间隔很短，因为我们假定在此时间内质量和惯性等都是不变的。这就对我们所用处理方式的合理性提出了一些微妙的问题，因为对于"时间分段"意义上的稳定性和在连续时变情况下的稳定性之间的等效性并无严格的数学保证。利用非线性理论中的一些新成就，在第一卷第二章中给出了对此问题的部分解答。

虽然非线性理论的进一步发展可能对问题增加新的理解，但是本章所讨论的各种方法仍是基本的，而且得出的结果在运载火箭的设计中具有作为基础的重要性。

运载火箭的运动方程式的推导（包含弹性力的作用、推进剂晃动和发动机惯性）可以有两种途径。一种想法是，把牛顿定律直接用到整个飞行器上，结合所有必需的自由度，从而得一组方程式，其中所有必需的弹性及惯性耦合项将自动出现，这在原理上看来是比较简单的。但是这个途径有两个缺点：第一，一定程度的物理意义将在数学运算中失掉；第二，也是更重要的是，弹性振型必须在计入推进剂晃动和发动机质量的情况下进行计算。这是一个比单独计算两端自由振型困难得多的任务。

因此，我们将采取另外一种途径，那就是推导出人为地解除耦合的运动方程式，其中耦合项将通过适当地引入一些数学约束条件而出现。

1.1 刚体方程式

我们将通过推导刚体运动方程来考虑刚体的几何中心和质量中心位置不重合的情况。取固连于运载火箭的右手坐标系 X_b、Y_b、Z_b，使其原点位于运载火箭的几何中心（图1.1）。刚体的运动将

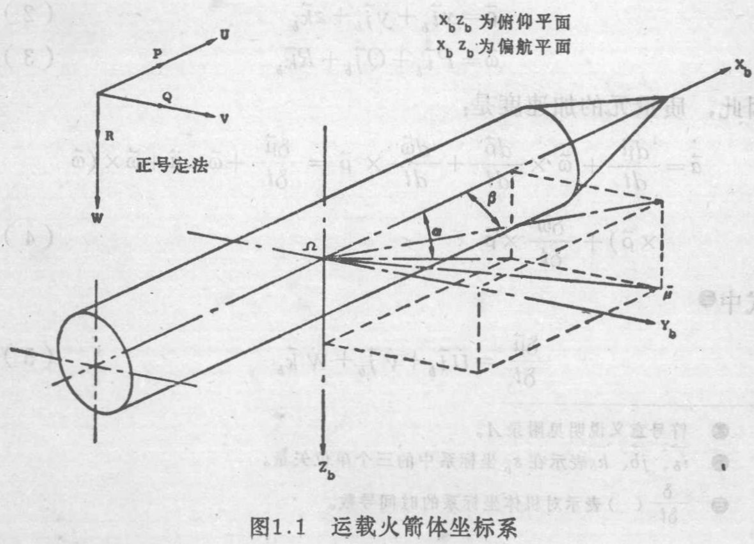

图1.1 运载火箭体坐标系

以惯性坐标系X_I、Y_I、Z_I为基准进行描述。为了简单起见，分别把惯性参考系和体轴系称为S_I和S_b。

就当前的目的而言，还不需要明确地规定惯性参考系。以地心作为惯性参考系的原点，各轴相对于某一星体为基准定取向常常是方便的。然而，惯性参考系也可以以发射点作原点，其一轴沿发射点的铅垂线取向。这样选择是足够精确的，因为动力飞行阶段的飞行时间是几分钟的数量级，而在这时间间隔内地球的转动是微不足道的。因为我们此刻不涉及飞行器相对特定参考系的位置和速度，所以可不规定惯性参考系的确切定向。但是假使以轨线分析为目的，则必需明确地确定适当的参考坐标系。这将在第四章进行讲述。

现在我们可以把一个质量元的速度表示为[○]

$$\vec{\mu}+\frac{d\vec{\rho}}{dt}=\vec{\mu}+\vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

式中$\vec{\mu}$是S_b原点的速度，$\vec{\rho}$是由质量元到S_b的原点的矢径，$\vec{\omega}$是S_b的角速度。我们有[一]：

$$\vec{\mu}=U\vec{i}_b+V\vec{j}_b+W\vec{k}_b \tag{1}$$

$$\vec{\rho}=x\vec{i}_b+y\vec{j}_b+z\vec{k}_b \tag{2}$$

$$\vec{\omega}=P\vec{i}_b+Q\vec{j}_b+R\vec{k}_b \tag{3}$$

因此，质量元的加速度是：

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\mu}}{dt}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{\rho}}{dt}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{\rho}=\frac{\delta\vec{\mu}}{\delta t}+\vec{\omega}\times\vec{\mu}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})+\frac{\delta\vec{\omega}}{\delta t}\times\vec{\rho} \tag{4}$$

式中[二]

$$\frac{\delta\vec{\mu}}{\delta t}=\dot{U}\vec{i}_b+\dot{V}\vec{j}_b+\dot{W}\vec{k}_b \tag{5}$$

[○] 符号意义说明见附录A。

[一] $\vec{i_b}$、$\vec{jb}$、$\vec{k_b}$表示在s_b坐标系中的三个单位矢量。

[二] $\frac{\delta}{\delta t}$(　)表示对机体坐标系的时间导数。

$$\frac{\delta\vec{\omega}}{\delta t}=\dot{P}\vec{i}_b+\dot{Q}\vec{j}_b+\dot{R}\vec{k}_b \tag{6}$$

运载火箭的运动方程式是：

$$\vec{F}=\int\vec{a}dm=\int\left[\frac{\delta\vec{\mu}}{\delta t}+\vec{\omega}\times\vec{\mu}+\frac{\delta\vec{\omega}}{\delta t}\times\vec{\rho}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})\right]dm$$

$$=m_o\left[\frac{\delta\vec{\mu}}{\delta t}+\vec{\omega}\times\vec{\mu}\right]+\frac{\delta\vec{\omega}}{\delta t}\times\left[\int\vec{\rho}\,dm\right]+\vec{\omega}\times\left[\vec{\omega}\times\int\vec{\rho}\,dm\right] \tag{7}$$

现在：

$$\int\vec{\rho}dm=\vec{\rho}_c m_o \tag{8}$$

式中 $\vec{\rho}_c$ 是由质心到 S_b 的原点的矢径，若质心与该原点 重 合，则 $\vec{\rho}_c=0$，方程（7）可化为：

$$\vec{F}=m_o\left[\frac{\delta\vec{\mu}}{\delta t}+\vec{\omega}\times\vec{\mu}\right] \tag{9}$$

注意到

$$\vec{\rho}_c=x_{cg}\vec{i}_b+y_{cg}\vec{j}_b+z_{cg}\vec{k}_b \tag{10}$$

对整个运载火箭积分方程（7），有：

$$\begin{aligned}\vec{F}=&[m_o(\dot{U}+QW-RV)-m_o x_{cg}(Q^2+R^2)-m_o y_{cg}(\dot{R}-PQ)\\&+m_o z_{cg}(\dot{Q}+PR)]\vec{i}_b+[m_o(\dot{V}+RU-PW)+m_o x_{cg}(\dot{R}\\&+PQ)-m_o y_{cg}(P^2+R^2)-m_o z_{cg}(\dot{P}-QR)]\vec{j}_b+[m_o(\dot{W}\\&+PV-QU)-m_o x_{cg}(\dot{Q}-PR)+m_o y_{cg}(\dot{P}+QR)\\&-m_o z_{cg}(P^2+Q^2)]\vec{k}_b\end{aligned} \tag{11}$$

我们需要一个绕某一动点的角动量变化率的表示式，推导如下。设一质点质量为“m_i”，相对一动点Ω有一矢径“$\vec{\rho}_i$”，并 把从动点Ω到定点O的矢径以 $\vec{\lambda}$ 表示。于是绕定点O的角动量是：

$$\vec{H}_o=\sum_i[(\vec{\lambda}+\vec{\rho}_i)\times(\dot{\vec{\lambda}}+\dot{\vec{\rho}}_i)]m_i$$

$$=\sum_i[\vec{\lambda}\times\dot{\vec{\lambda}}+\vec{\lambda}\times\dot{\vec{\rho}}_i+\vec{\rho}_i\times\dot{\vec{\lambda}}+\vec{\rho}_i\times\dot{\vec{\rho}}_i]m_i \tag{12}$$

令
$$\vec{H}_b=\sum_i(\vec{\rho}_i\times\dot{\vec{\rho}}_i)m_i \tag{13}$$

有 $$\vec{H}_o=\sum_i\left[\vec{\lambda}\times\dot{\vec{\lambda}}+\vec{\lambda}\times\dot{\vec{\rho}}_i+\vec{\rho}_i\times\dot{\vec{\lambda}}\right]m_i+\vec{H}_b \tag{14}$$

现在 $$\frac{d\vec{H}_o}{dt}=\sum_i\left[\dot{\vec{\lambda}}\times\dot{\vec{\lambda}}+\vec{\lambda}\times\ddot{\vec{\lambda}}+\dot{\vec{\lambda}}\times\dot{\vec{\rho}}_i+\vec{\lambda}\times\ddot{\vec{\rho}}_i+\dot{\vec{\rho}}_i\times\dot{\vec{\lambda}}\right.$$
$$\left.+\vec{\rho}_i\times\ddot{\vec{\lambda}}\right]m_i+\frac{d\vec{H}_b}{dt}$$

注意到

$$\dot{\vec{\lambda}}\times\dot{\vec{\lambda}}=0$$
$$\dot{\vec{\lambda}}\times\dot{\vec{\rho}}_i+\dot{\vec{\rho}}_i\times\dot{\vec{\lambda}}=0$$
$$\sum_i m_i\vec{\rho}_i=m_o\vec{\rho}_c$$

我们得

$$\frac{d\vec{H}_o}{dt}=\sum_i\vec{\lambda}\times(\ddot{\vec{\lambda}}+\ddot{\vec{\rho}}_i)\,m_i+m_o\vec{\rho}_c\times\ddot{\vec{\lambda}}+\frac{d\vec{H}_b}{dt} \tag{15}$$

以 $\vec{G}_o$ 表示外力系对 O 点的力矩，我们有

$$\vec{G}_o=\sum_i(\vec{\rho}_i+\vec{\lambda})\times\vec{F}_i=\sum_i\vec{\rho}_i\times\vec{F}_i+\vec{\lambda}\times\sum_i\vec{F}_i \tag{16}$$

式中，$\vec{F}_i$ 是作用在质点 m_i 上的力。

令 $$\vec{G}_b=\sum_i\vec{\rho}_i\times\vec{F}_i \tag{17}$$

方程（16）变为

$$\vec{G}_o=\vec{G}_b+\vec{\lambda}\times\sum_i\vec{F}_i \tag{18}$$

但是 $$\vec{G}_o=\frac{d\vec{H}_o}{dt} \tag{19}$$

因此，把方程（15）和（18）结合起来，得到：

$$\vec{G}_b+\vec{\lambda}\times\sum_i\vec{F}_i=\vec{\lambda}\times\sum_i m_i(\ddot{\vec{\lambda}}+\ddot{\vec{\rho}}_i)+m_o\vec{\rho}_c\times\ddot{\vec{\lambda}}+\frac{d\vec{H}_b}{dt} \tag{20}$$

但
$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i(\ddot{\vec{\lambda}} + \ddot{\vec{\rho}}_i) \tag{21}$$

因此
$$\vec{G}_b = \frac{d\vec{H}_b}{dt} + m_o\vec{\rho}_c \times \ddot{\vec{\lambda}} \tag{22}$$

这就是所要找的关系。

方程（22）可表示成下面的形式

$$\vec{G}_b = \frac{d}{dt}\int \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}}\,dm + m_o\vec{\rho}_c \times \ddot{\vec{\lambda}} \tag{23}$$

式中，在目前考虑的问题中

$$\dot{\vec{\rho}} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$$\dot{\vec{\lambda}} = \vec{\mu}$$

$$\ddot{\vec{\lambda}} = \frac{d\vec{\mu}}{dt}$$

因此我们可以写出：

$$\vec{G}_b = \frac{d}{dt}\int [\vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})]\,dm + m_o\vec{\rho}_c \times \frac{d\vec{\mu}}{dt} \tag{24}$$

绕动点Ω的角动量表示式为：

$$\vec{H}_b = \int [\vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})]\,dm$$

$$= \int [\vec{\omega}\rho^2 - \vec{\rho}(\vec{\omega}\cdot\vec{\rho})]\,dm \tag{25}$$

其分量为

$$\begin{cases} H_x = I_{xx}P - I_{xy}Q - I_{xz}R \\ H_y = -I_{xy}P + I_{yy}Q - I_{yz}R \\ H_z = -I_{xz}P - I_{yz}Q + I_{zz}R \end{cases}$$

式中

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\,dm \qquad I_{xy} = \int xy\,dm$$

$$I_{yy}=\int(x^2+z^2)dm \qquad I_{yz}=\int yzdm$$

$$I_{zz}=\int(x^2+y^2)dm \qquad I_{xz}=\int xzdm$$

注意到

$$\vec{H}_b=H_x\vec{i}_b+H_y\vec{j}_b+H_z\vec{k}_b$$

微分得

$$\frac{d\vec{H}_b}{dt}=\frac{dH_x}{dt}\vec{i}_b+\frac{dH_y}{dt}\vec{j}_b+\frac{dH_z}{dt}\vec{k}_b+H_x\frac{d\vec{i}_b}{dt}$$

$$+H_y\frac{d\vec{j}_b}{dt}+H_z\frac{d\vec{k}_b}{dt}=(\dot{H}_x\vec{i}_b+\dot{H}_y\vec{j}_b+\dot{H}_z\vec{k}_b)+\vec{\omega}\times\vec{H}_b \tag{26}$$

最后得到

$$\begin{aligned}\vec{G}_b=&[I_{xx}\dot{P}-I_{xy}(\dot{Q}-PR)-I_{xz}(\dot{R}+PQ)+I_{yz}(R^2-Q^2)\\&+(I_{zz}-I_{yy})QR+m_oy_{cg}(\dot{W}+PV-QU)-m_oz_{cg}(\dot{V}\\&+RU-PW)]\bar{i}_b+[-I_{xy}(\dot{P}+QR)+I_{yy}\dot{Q}\\&-I_{yz}(\dot{R}-PQ)+I_{xz}(P^2-R^2)+(I_{xx}-I_{zz})PR\\&-m_ox_{cg}(\dot{W}+PV-QU)+m_oz_{cg}(\dot{U}+QW-RV)]\bar{j}_b\\&+[-I_{xz}(\dot{P}-QR)-I_{yz}(\dot{Q}+PR)+I_{zz}\dot{R}+I_{xy}(Q^2-P^2)\\&+(I_{yy}-I_{xx})PQ+m_ox_{cg}(\dot{V}+RU-PW)\\&-m_oy_{cg}(\dot{U}+QW-RV)]\bar{k}_b\end{aligned} \tag{27}$$

方程（11）和（27）完全地描绘了运动。

为了研究短周期运动的稳定性，假定线速度和角速度可以表示为稳态值和扰动分量之和，如下：

$$\begin{aligned}U&=U_o+u \qquad & P&=P_o+p\\V&=V_o+v & Q&=Q_o+q\\W&=W_o+w & R&=R_o+r\end{aligned} \tag{28}$$

空速沿各体坐标轴分解的分量是：

$$U-U_w$$

$$V-V_w$$

$$W-W_w$$

现在我们假定量V，W，u，v，w，U_w，V_w和W_w和U_o相比很小。

令
$$\alpha=\frac{w}{U_o}+\alpha_w \tag{29}$$

$$\beta=\frac{v}{U_o}+\beta_w \tag{30}$$

式中
$$\alpha_w=-\frac{W_w}{U_o} \tag{31}$$

$$\beta_w=-\frac{V_w}{U_o} \tag{32}$$

将方程（29）和（30）代入方程（11）和（27），在消去稳态值和高阶项后，得：

$$\begin{aligned}\Sigma F_x=&m_o[\dot{u}-V_or+W_oq+U_o(Q_o\alpha-R_o\beta)]\\&-2m_ox_{cg}(Q_oq+R_or)-m_oy_{cg}(\dot{r}-P_oq-Q_op)\\&+m_oz_{cg}(\dot{q}+P_or+R_op)\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_y=&m_o(\dot{v}+R_ou+U_or-W_op-P_oU_o\alpha)+m_ox_{cg}(\dot{r}+P_oq\\&+Q_op)-2m_oy_{cg}(P_op+R_or)\\&-m_oz_{cg}(\dot{p}-Q_or-R_oq)\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_z=&m_o(\dot{w}+V_op-Q_ou-U_oq+P_oU_o\beta)-m_ox_{cg}(\dot{q}-P_or\\&-R_op)+m_oy_{cg}(\dot{p}+Q_or+R_oq)\\&-2m_oz_{cg}(P_op+Q_oq)\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_x=&I_{xx}\dot{p}+(I_{zz}-I_{yy})(Q_or+R_oq)-I_{xy}(\dot{q}-P_or-R_op)\\&-I_{xz}(\dot{r}+P_oq+Q_op)-2I_{yz}(R_or-Q_oq)\\&+m_oy_{cg}(\dot{w}+V_op-Q_ou-U_oq+P_oU_o\beta)\\&-m_oz_{cg}(\dot{v}+R_ou+U_or-W_op-P_oU_o\alpha)\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_y=&(I_{xx}-I_{zz})(P_or+R_op)+I_{yy}\dot{q}-I_{xy}(\dot{p}+Q_or+R_oq)\\&-I_{yz}(\dot{r}-P_oq-Q_op)+2I_{xz}(P_op-R_or)\\&-m_ox_{cg}(\dot{w}+V_op-Q_ou-U_oq+P_oU_o\beta)\\&+m_oz_{cg}[\dot{u}-V_or+W_oq+U_o(Q_o\alpha-R_o\beta)]\end{aligned} \tag{37}$$

$$\Sigma M_z=(I_{yy}-I_{xx})(P_oq+Q_op)+I_{zz}\dot{r}-I_{xz}(\dot{p}-Q_or-R_oq)$$
$$-I_{yz}(\dot{q}+P_or+R_op)+2I_{xy}(Q_oq-P_op)$$
$$+m_ox_{cg}(\dot{v}+R_ou+U_or-W_op-P_oU_o\alpha)$$
$$-m_oy_{cg}[\dot{u}-V_or+W_oq+U_o(Q_o\alpha-R_o\beta)] \qquad (38)$$

上述方程中的外力系和外力矩来自重力、推力、空气动力、推进剂晃动和发动机的惯性。把它们写出如下（沿体轴系分解）：

$$\Sigma F_x=F_{xg}+F_{xT}+F_{xa}+F_{xs}+F_{xE} \qquad (39)$$
$$\Sigma F_y=F_{yg}+F_{yT}+F_{ya}+F_{ys}+F_{yE} \qquad (40)$$
$$\Sigma F_z=F_{zg}+F_{zT}+F_{za}+F_{zs}+F_{zE} \qquad (41)$$
$$\Sigma M_x=M_{xg}+M_{xT}+M_{xa}+M_{xs}+M_{xE} \qquad (42)$$
$$\Sigma M_y=M_{yg}+M_{yT}+M_{ya}+M_{ys}+M_{yE} \qquad (43)$$
$$\Sigma M_z=M_{zg}+M_{zT}+M_{za}+M_{zs}+M_{zE} \qquad (44)$$

因为V_o、W_o、P_o、Q_o和R_o都是和扰动变量的数量级相同的微小量，方程（33）～(38）化为：

$$\Sigma F_x=m_o(\dot{u}-y_{cg}\dot{r}+z_{cg}\dot{q}) \qquad (45)$$
$$\Sigma F_y=m_o(\dot{v}+U_or+x_{cg}\dot{r}-z_{cg}\dot{p}) \qquad (46)$$
$$\Sigma F_z=m_o(\dot{w}-U_oq-x_{cg}\dot{q}+y_{cg}\dot{p}) \qquad (47)$$
$$\Sigma M_x=I_{xx}\dot{p}-I_{xy}\dot{q}-I_{xz}\dot{r}+m_oy_{cg}(\dot{w}-U_oq)$$
$$-m_oz_{cg}(\dot{v}+U_or) \qquad (48)$$
$$\Sigma M_y=I_{yy}\dot{q}-I_{xy}\dot{p}-I_{yz}\dot{r}-m_ox_{cg}(\dot{w}-U_oq)$$
$$+m_oz_{cg}\dot{u} \qquad (49)$$
$$\Sigma M_z=I_{zz}\dot{r}-I_{xz}\dot{p}-I_{yz}\dot{q}+m_ox_{cg}(\dot{v}+U_or)-m_oy_{cg}\dot{u} \qquad (50)$$

1.1.1 欧拉角

以S_b'表示在稳态情况时飞行器的机体坐标系。于是受扰动后的坐标系取向S_b与S_b'的关系可用三个欧拉角——ψ、θ、φ——来确定：

a．把S_b'绕Z_b'轴正向旋转一角度ψ[●]；

● 正向规定按通常的右手法则给出。

b．然后绕 Y_b' 轴正向旋转一角度 θ；

c．最后绕 X_b' 轴正向旋转一角度 φ。

这就是使 S_b' 转到与 S_b 重合了。于是有●

$$S_b = AS_b' \tag{51}$$

其中 A 为变换矩阵，由下式给出●

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & s\varphi \\ 0 & -s\varphi & c\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

或

$$A = \left[\begin{array}{c:c:c} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\varphi\, s\theta\, c\psi - c\varphi\, s\psi & s\varphi\, s\theta\, s\psi + c\varphi\, c\psi & s\varphi\, c\theta \\ c\varphi\, s\theta\, c\psi + s\varphi\, s\psi & c\varphi\, s\theta\, s\psi - s\varphi\, c\psi & c\varphi\, c\theta \end{array}\right] \tag{52}$$

注意 $A^T = A^{-1}$。通过矢量的直接分解，可知在 S_b 坐标系中的角速度分量由下式给出：

$$\omega_x = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin\theta \tag{53}$$

$$\omega_y = \dot{\theta} \cos\varphi + \dot{\psi} \cos\theta \sin\varphi \tag{54}$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi \tag{55}$$

现在我们假定量 ψ、θ、φ 和 $\dot{\psi}$、$\dot{\theta}$、$\dot{\varphi}$ 均是微小量，因此上述诸方程简化为：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \varphi \\ \theta & -\varphi & 1 \end{bmatrix} \tag{56}$$

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} = p \\ \omega_y &= \dot{\theta} = q \\ \omega_z &= \dot{\psi} = r \end{aligned} \tag{57}$$

● 我们将以 S_b 指机体轴系的本身或 S_b 中的某个矢量（对 S_b' 也类似），这不应引起混淆，因为从上下文看，它的意义将自然很清楚。

● 有时为了简便起见，我们把 sin θ 写作 $s\theta$，把 cos θ 写作 $c\theta$，等等。

1.2 弹性振动

关于两端自由的弹性运载火箭的受迫振动运动方程式要在第二章内导出。这里只把主要结果摘录于下，以便给出运载火箭短周期动力学的完整描述。图 1.2 为在俯仰平面中运载火箭弯曲后形状的简图。在沿运载火箭的任一点处的弹性挠曲由下式给出：

$$\xi_p(l,\ t)=\sum_{i=1}^{\infty} q_p^{(i)}(t)\varphi_p^{(i)}(l)。\tag{58}$$

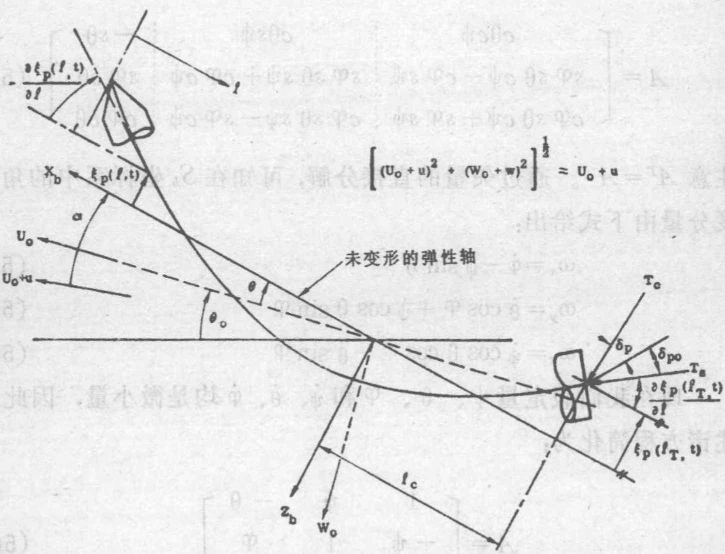

图1.2　俯仰平面中的弹性运载火箭

这里，$\varphi_p^{(i)}(l)$ 表示在俯仰平面中等 i 个弯曲振型的归一化振型的形状，它只是梁的刚度和质量分布的函数。$q_p^{(i)}(t)$ 是在俯仰平面中由于弹性引起的用于第 i 个弯曲振型的广义坐标。它满足方程

$$\ddot{q}_p^{(i)}+2\zeta_p^{(i)}\omega_p^{(i)}\dot{q}_p^{(i)}+[\omega_p^{(i)}]^2 q_p^{(i)}=\frac{Q_p^{(i)}}{M_p^{(i)}}\tag{59}$$