

初等代数

北京市《初等数学》编写组编

人民教育出版社

初 等 代 数

北京市《初等数学》编写组编

人 民 教 育 出 版 社

1975 · 北京

内 容 提 要

这套《初等数学》共分五册，即《初等代数》、《初等几何》、《三角函数》、《解析几何》及《公式和数表》，是一般科学技术读物。

各册内容努力选取三大革命运动中普遍需要的数学知识，并且注意突出基本规律及其辩证发展的线索。为了便于自学，叙述力求详细，同时各章一般有小结，每册有总结，还配置了一定数量的练习题。

《初等代数》这一册共有以下九章：正和负，整式，一次方程，分式和根式，二次方程，不等式和线性规划初步，对数，数列和优选法简介，排列、组合与概率。此外，还附有正交试验法简介。

这套《初等数学》可供广大工农兵、知识青年、中小学教师阅读参考。

初 等 代 数

北京市《初等数学》编写组编

*

人 民 教 育 出 版 社 出 版

新华书店北京发行所发行

人 民 教 育 出 版 社 印 刷 厂 印 装

*

1975年6月修订第1版 1975年8月第1次印刷

书号 13012·01 定价 0.94 元

毛主席语录

中国人民有志气，有能力，一定要在不远的将来，赶上和超过世界先进水平。

事物矛盾的法则，即对立统一的法则，是自然和社会的根本法则，因而也是思维的根本法则。

人们为着要在自然界里得到自由，要用自然科学来了解自然，克服自然，改造自然，从自然里得到自由。

读书是学习，使用也是学习，而且是更重要的学习。

目 录

引言	1
第一章 正和负	5
第一节 正和负的意义	6
正数和负数	6
数轴	7
大小的比较	8
图表	9
第二节 有理数的加、减法	13
加法规则	13
减法规则	16
第三节 有理数的乘、除法	20
乘法规则	20
除法规则	22
统计平均数	25
第四节 有理数的乘方	28
第五节 有理数的开方、实数	31
平方根和立方根	31
实数	33
第六节 二进制记数法	36
小结	43
第二章 整式	49
第一节 代数式	49

	一般概念	49
	名词解释	52
第二节	整式的加、减法	54
第三节	整式的乘法	60
	幂的运算	60
	单项式的乘法	62
	多项式的乘法	64
	乘法公式	66
第四节	因式分解	69
	提公因式法	70
	应用公式法	73
	叉乘试算法	75
	分组分解法	78
第五节	恒等变形	80
小结	84
第三章	一次方程	91
第一节	方程的基本知识	91
第二节	一元一次方程	95
	方程的变形	95
	解法举例	97
	应用举例	100
第三节	一次方程组	106
	二元一次方程组的两种解法	108
	行列式法	113
	顺序消去法	121
	应用举例	129
第四节	解的几何意义	135
	平面直角坐标系	135

	二元一次方程的图形	139
	解的几何意义	142
	小结	143
第四章	分式和根式	148
第一节	分式和它的基本性质	148
	基本性质	149
	约分	151
	真分式和假分式	152
	通分	155
第二节	分式的运算	157
	分式的加、减法	157
	分式的乘、除法	159
第三节	零指数、负整指数幂	163
第四节	根式的恒等变形	168
	算术根	168
	根式的变形规则	170
	根式的运算和化简	175
第五节	分数指数幂	181
小结		185
第五章	二次方程	191
第一节	一元二次方程	191
	配方解法	192
	公式解法	194
	应用举例	196
第二节	一元二次方程的讨论	200
	根的判别式	200
	虚数根	202
	根的几何意义	207

第三节	方程的分解因式解法	214
	用分解因式法解一元二次方程	214
	用求根法分解二次三项式	217
第四节	增根问题	220
	同解方程和增根	220
	分式方程	222
	根式方程	224
	小结	227
第六章	不等式和线性规划初步	231
第一节	不等式和它的性质	231
	不等式	231
	不等式的性质	232
第二节	一元一次不等式	235
第三节	一元一次不等式组	238
第四节	一元二次不等式	241
	图象解法	242
	分解因式解法	245
第五节	线性规划初步	249
	合理下料问题	250
	场地选择问题	254
	劳力调配问题	257
	小结	260
第七章	对数	262
第一节	常用对数	265
	查表求常用对数	266
	首数和尾数	268
	反对数表	271
第二节	对数的运算规则和应用	274

	积、商、幂的对数	274
	利用对数简化计算	277
	换底公式	281
第三节	自然对数	283
第四节	计算尺简介	288
	小结	293
第八章	数列和优选法简介	295
第一节	等差数列	296
第二节	等比数列	303
第三节	数列求和举例	308
第四节	数学归纳法	313
第五节	优选法简介	318
	什么是优选法	318
	0.618 法	319
	分数法	325
	小结	332
第九章	排列、组合与概率	334
第一节	排列、组合	334
	全排列	336
	选排列	338
	组合	343
	二项式定理	347
第二节	概率	351
	随机事件与概率	351
	等可能事件的概率	359
附：正交试验法简介		369
第一节	全面试验与部分实施	372

第二节	正交表	380
第三节	正交表的使用	384
第四节	水平数不等的试验	396
总结		401

引 言

毛主席教导我们：“胸中有‘数’。这是说，对情况和问题一定要注意到它们的数量方面，要有基本的数量的分析。任何质量都表现为一定的数量，没有数量也就没有质量。”和算术一样，初等代数也是研究数量的运算规律的，这些运算规律是现实世界数量关系的反映。但它与算术有一个明显的区别，就是将广泛地用 a, b, c, x, y, z 等字母来代表数。为什么用字母代表数？这是首先遇到的一个问题，学习初等代数就从这里开始。

用字母代表数，是简明地表达数量关系的一般规律的需要。举例来说：

丈量土地要计算面积，如一块长方形土地，量得长是 38.5 丈，宽是 22 丈，这块土地面积就是 $38.5 \times 22 = 847$ 平方丈。概括为一般规律就是：“任何长方形，其面积都是长和宽相乘”。我们用字母 S 代表“长方形面积”， a 代表它的“长”， b 代表它的“宽”，就得到一般公式

$$S = ab^*.$$

这个公式简单明白地表示了长方形面积和边长之间的普

* 字母和数、字母和字母相乘时，通常把“ \times ”号记作“ \cdot ”，或者省略不写。如 $a \times b$ 写成 $a \cdot b$ 或 ab ； $2 \times a$ 写成 $2 \cdot a$ 或 $2a$ ； $a \times 2$ 也写成 $2a$ （不写成 $a2$ ）。但数和数相乘时，一般仍写“ \times ”号。

遍关系。这是由特殊到一般。对于某个长方形，只要把长和宽的具体数值代入到式子 ab 中去，就能算出其面积 S 。这是由一般到特殊。如 $a=7$ 米， $b=12$ 米时，

$$S=7 \times 12=84(\text{平方米}).$$

我们看到，字母 a, b 代表数，但又不仅是代表一个具体的数。

上面，我们把“长方形面积等于长乘宽”写成“ $S=ab$ ”，就是把一句话“翻译”成了数学式子。这种“翻译”工作很重要，是学习初等代数的一个基本功。例如

$$\text{“三角形面积等于底乘高的一半”} \xrightarrow{\text{“翻译”}} S=\frac{1}{2}ah.$$

(a 代表底， h 代表高， S 代表面积)

“梯形面积等于上底与下底之和乘高的一半”

$$\xrightarrow{\text{“翻译”}} S=\frac{1}{2}(a+b)h.$$

(a, b 分别代表上、下底， h 代表高， S 代表面积)

$$\text{“距离等于速度乘时间”} \xrightarrow{\text{“翻译”}} s=vt.$$

(v 代表速度， t 代表时间， s 代表距离)

同样，还可以用字母代数的方法，简明地表达数的运算规律：

加法交换律: $a+b=b+a$

加法结合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$

乘法交换律: $ab=ba$

乘法结合律: $(ab)c=a(bc)$

加、乘分配律: $(a+b)c=ac+bc$

其中 a, b, c 代表任何数。这五个运算规律，是初等代数中贯穿始终的基本规律，总称为基本运算定律。

运用这些简明的运算规律，可以为实践中一系列计算问题提供简捷的方法。

例如，某校办工厂生产一批零件，其形状相同，如图 1，但尺寸有几种规格，为了计算面积，就需要找出一般的计算公式。

如图，零件面积 S 是一个长方形和一个梯形的面积之和，有

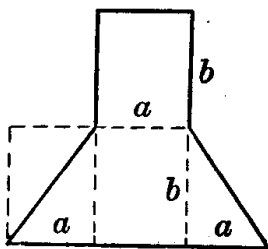


图 1

$$S = ab + \frac{1}{2}(a + 3a)b. \quad (1)$$

由分配律，有 $a + 3a = (1 + 3)a = 4a$,

$$\begin{aligned} \text{所以,} \quad S &= ab + \frac{1}{2} \cdot 4ab \\ &= ab + 2ab \\ &= (1 + 2)ab. \quad (\text{分配律}) \end{aligned}$$

最后得到

$$S = 3ab. \quad (2)$$

公式(2)比公式(1)简单多了，很明显，采用公式(2)的形式进行计算，可以大大节省计算工作量。

初等代数的基本问题之一，就是把含有字母的式子化简，这对在实际工作中化简计算以及分析数量关系都有重要的意义。

初等代数的另一个基本问题，是根据未知数所满足的条件求出未知数。

例如,某中学“五七农场”的水稻试验田,原准备在缓苗期每亩施硫酸(含氮量为21%)15斤,现改用氨水(含氮量为14%),要达到同样效果,每亩应施用氨水多少斤呢?

在这个问题中,每亩施用氨水斤数是未知数,可以用字母 x 代表它.要求它与硫酸达到同样的效果,就是说: x 斤氨水与15斤硫酸的含氮量相等,即有

$$0.14x = 0.21 \times 15,$$

即 $0.14x = 3.15.$ (3)

上式表示 x 满足的条件.这是已知两数的积和一个乘数,求另一个乘数的问题.用除法,得

$$x = \frac{3.15}{0.14} = 22.5. \quad (4)$$

即每亩应施氨水22.5斤.

类似这样的问题在现实生活和生产中是很多的.

从三大革命运动中提出的上述两类问题,一是把含字母的式子由繁化简;一是根据含有代表未知数的字母的等式,将未知化为已知,繁和简、未知和已知都是矛盾着的双方,但在一定的条件下又互相转化.掌握初等代数的规律就是掌握数量的运算之间的转化规律.因此,必须用唯物辩证法作指导,来学习初等代数,在三大革命运动中不断培养分析和解决实际问题的能力,使数学成为社会主义革命和社会主义建设的有力工具.

第一章 正 和 负

我们已经知道,代数和算术的明显区别,是在代数里常用字母代表数,这是数学发展上的一大进步.

使用字母代数的方法,也带来了新的问题.例如:

我们要比较北京地区和外地的温度.如果北京现在是 18 度(本书中的温度单位都是摄氏),天津是 16 度,这时北京的温度比天津高 $18 - 16 = 2$ (度).一般把这个相差的温度叫做温差.可是北京和外地的温度都是变化的.我们很自然地希望有一个计算温差的一般公式,用“字母代数”的方法,这是可以做到的.用 a 表示北京的温度, b 表示外地的温度, T 表示温差,于是得出公式:

$$T = a - b.$$

如果北京是 18 度,长春是 13 度,代入公式,得:

$$T = 18 - 13 = 5(\text{度}),$$

也就是北京比长春的温度高 5 度.这显然是对的.但是,如果要算北京对上海的温差,而上海是 23 度,于是代入公式,得:

$$T = 18 - 23 = ?$$

用算术里学过的知识就没法计算.原因在哪里呢?

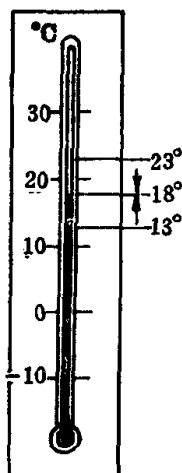


图 1-1

从实际情况来看, 应该有

$$T = 18 - 23 = \text{低 } 5 \text{ (度)},$$

如图 1-1 所示. 可是我们已经用 5° 表示“高 5° ”了, “低 5° ”与“高 5° ”的意义正相反, 怎么表示呢? 这个问题算术中并没有解决, 自然也就无法算了.

再说, 温度这种量本身还有零上与零下之分, 如果我们用 3° 表示零上 3° , 那么零下 3° 怎么表示呢?

可见用算术里学过的数只能表示量的大小, 不能同时表示量的方向. 因此, 必须扩充数的概念, 并且弄清楚它们的运算规律, 这就是这一章要学习的主要内容.

第一节 正和负的意义

正数和负数

除温度以外, 还有很多具有相反意义的量, 如水位的上升和下降, 车辆向东行驶和向西行驶, 产量的增加和减少等等. 为了区别这些相反意义的量, 把其中一种意义规定为正, 另一种和它相反的意义规定为负. 正的量用算术里的数表示, 如“高 5° ”记作 5° , “零上 3° ”记作 3° , 负的量在这些数的前面添上一个“-”(负)号来表示, 如“低 5° ”记作 -5° , 读作负五度, “零下 3° ”记作 -3° , 读作负三度.

算术里的数(除了零)都叫做正数, 在它们前面添上“-”号的数叫做负数. 如, $3, 5, \frac{1}{3}, 0.63$ 等都是正数, $-3, -5, -\frac{1}{3}, -0.63$ 等都是负数.

0是个特殊的数,正如恩格斯所指出的,它是“既不是正又不是负的唯一真正的中性数”。

只差一个符号的两个数,如3和-3,我们说其中一个是另一个的相反数。

有时为了强调正数对于负数的相反性,在正数前面添上“+”(正)号,如4可以写成+4。4和+4是一样的。

一般写正数时,都把“+”号省略。

正的整数和分数、负的整数和分数、零,统称为有理数。

数 轴

在日常生活中,用直尺上的刻度表示长度的大小,用温度计上的刻度表示温度的高低。这实际上就是把有理数直观地用一条直线上的点表示出来。

画一条直线,在上面取一点O作为计算的起点,表示数0(图1-2),叫做原点。原点两边分别表示正和负,一般规定从左向右为正方向(用箭头表示),从右向左为负。再取一个度量单位,这样规定了原点、方向和度量单位的直线,叫做数轴。

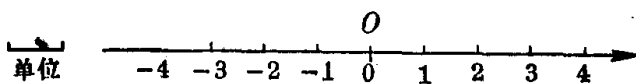


图 1-2

用这种方法,所有的有理数,都能用数轴上的点来表示。

例.把下列各数用数轴上的点表示出来:

2, -2, -3.5, 3.5, 7.

解:先画数轴,然后在数轴上找出相应的点。