线性代数名师笔记

Teacher Notes on Linear Algebra

◎ 杨威　编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

线性代数名师笔记

杨　威　编著

西安电子科技大学出版社

内容简介

本书是高等院校理工类及经济类各专业学生学习“线性代数”课程的辅导书，与国内通用的各类《线性代数》教材相匹配。

全书分六章，每章由5个板块组成，分别为：基本概念与重要结论、题型分析、考情分析、习题精选、习题详解。本书对线性代数中大量抽象的内容进行了形象和通俗的阐释，并对构成每一章内容的知识体系进行了深度的总结和概括。在题型分析中，针对典型例题均给出解题思路、解(或证明)和评注。

本书可作为理工类及经济类硕士研究生入学考试辅导用书，也可供高等学校各专业学生学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数名师笔记/杨威编著. —西安：西安电子科技大学出版社，2014.6

ISBN 978-7-5606-3276-6

Ⅰ. ① 线…　Ⅱ. ① 杨…　Ⅲ. ① 线性代数—高等学校—教材　Ⅳ. ① O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 076771 号

策　　划　毛红兵
责任编辑　毛红兵　曹　锦
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　北京京华虎彩印刷有限公司
版　　次　2014年6月第1版　2014年6月第1次印刷
开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印　张　17
字　　数　399千字
定　　价　29.00元
ISBN 978-7-5606-3276-6/O

XDUP 3568001-1

本教材获西安电子科技大学教材立项资助

前　言

“线性代数”是理工类及经济类各专业学生必修的重要基础课程，同时也是全国硕士研究生入学统一考试中数学课目的一个重要组成部分。它具有概念多、定理多、内容抽象等特点，是一门逻辑性很强的课程。学生在学习这门课程时常常会“知其然，却不知其所以然”。

本书是在研究“线性代数”课程的特点，总结学生在学习这门课程中出现的各种问题，以及归纳多年考研试题的基础上编写而成的，每章均包括基本概念与重要结论、题型分析、考情分析、习题精选、习题详解等内容，且名师笔记贯穿在每一章节之中。

本书具有以下特点。

第一，以“名师笔记”的形式，从教师的角度来阐述学生在线性代数的学习和考试中所遇到的各种问题。

第二，对线性代数的重要概念、重要定义、重要定理、重要公式、重要结论、易混淆问题、难理解问题等进行了纵向深入的讨论与横向分析。对一些难理解的抽象概念进行了形象的解释与描述，对行列式及矩阵运算的众多公式进行了分类、归纳，对易错、易混淆内容进行了针对性讨论。

第三，本书中的例题及练习题均是根据题目的典型性、综合性、启发性及新颖性来选取的。本书不提倡“题海战术”，而是注重做题效率，即会做一道例题，就会做一个类型的题。

第四，每一章都有一个考情分析，通过对考试内容及要求、近年真题考点分析的阅读和学习，可以帮助学生了解本章的重要知识点及考研情况。

本书中所有例题的讲解都分为三个部分：解题思路、解(或证明)、评注。在解题思路中给出了例题的解题突破口及解题方法技巧，就是告诉学生为什么要这样做，又是如何想到这样做；在解(或证明)中给出例题的整个解题过程，就是告诉学生题目具体怎么做；在评注中归纳此类题型的特点，总结考查的知识点及考生应注意的问题，就是告诉同学做了这一题目后，要掌握这一类题型的解法。

书中若有疏漏或不妥之处，恳请读者批评指正。

作者电子邮箱：weiyang@mail. xidian. edu. cn。

编　者

2014 年 2 月

目　　录

第一章　行　列　式

1.1　基本概念与重要结论

名师笔记

线性代数的知识点较多，而很多知识点往往贯穿在线性代数的所有章之中。所以，考生在复习时，一定要重视知识点的相互关联。

例如，若 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则可以得到以下命题：

(1) $\boldsymbol{A}$ 可逆。

(2) $\boldsymbol{A}$ 满秩($r(\boldsymbol{A})=n$)。

(3) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 等价。

(4) $\boldsymbol{A}$ 可以写成若干初等方阵的乘积。

(5) $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$。

(6) $r(\boldsymbol{CA})=r(\boldsymbol{C})$。

(7) $\boldsymbol{A}$ 的列(行)向量组线性无关。

(8) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组是 n 维实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一组基。

(9) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解。

(10) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解。

(11) $\boldsymbol{A}$ 的特征值不为零。

(12) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵。

一、行列式的概念

1. 排列

由 1，2，…，n 组成的有序数组称为一个 n 阶排列。通常用 $p_1p_2\cdots p_n$ 来表示。

2. 逆序

一个排列中，如果一个大的数排在一个小的数之前，那么称这两个数构成一个逆序。

3. 逆序数

一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数。通常用 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 来表示排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数。

4. 偶排列

逆序数为偶数的排列叫做偶排列。

5. 奇排列

逆序数为奇数的排列叫做奇排列。

名师笔记

例如，5 阶排列 35214 中，有逆序 32，31，52，51，54，21，因此排列 35214 的逆序数 $\tau(35214)=6$，该排列是偶排列。

例如，n 阶排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots21)=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$$

6. 2 阶行列式

用符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示算式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称这个符号为 2 阶行列式。

名师笔记

例如：

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 11 & 20 \end{vmatrix}=7\times20-6\times11=74$$

7. 3 阶行列式

用符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示算式 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$，称这个符号为 3 阶行列式。该算式包含 6 项，而每一项都是 3 个元素的乘积，其中 3 项为正，其余 3 项为负。为了便于记忆，图 1.1 给出了它的具体计算方法(称为沙路法)。

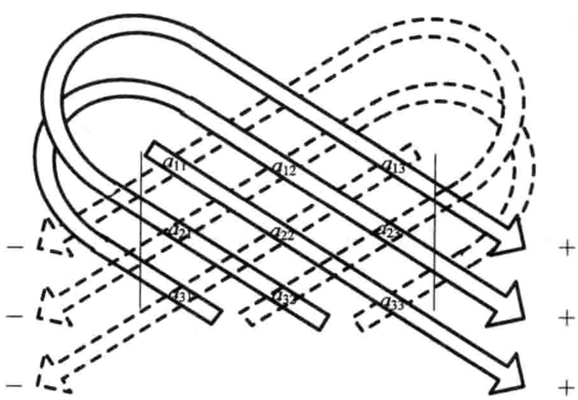


图 1.1 沙路法示意图

8. n 阶行列式

名师笔记

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\9&8&7\end{vmatrix}=+1\times5\times7+2\times6\times9+3\times4\times8-3\times5\times9-2\times4\times7-1\times6\times8=0$$

注意 无论是 $n=2$ 或 $n=3$，还是 $n=100$，行列式最后算出来的都是一个数值。例如：

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\9&8&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&4\\6&8\end{vmatrix}=0$$

由 n^2 个数排成 n 行 n 列，两边用一对竖线括起，表示一个算式，记为 D，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式。n 阶行列式是由 $n!$ 项的代数和组成的，每一项都是 n 个元素的乘积，这 n 个元素要满足不同行不同列的条件，或者说：这 n 个元素要来自于行列式的每一行和每一列。把这 n 个元素按第 1 行、第 2 行、……、第 n 行的次序放置，那么这 n 个元素的列标排列的逆序数 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 就决定了该项的正负。

例如，一个 5 阶行列式表示的算式共有 5！项，若已知 $a_{15}a_{53}a_{21}a_{4j}a_{34}$ 是其中的一项，那么分析其列标，可以发现缺少第 2 列，因此必有 $j=2$。现在把这 5 个元素按第 1 行、第 2 行、……、第 5 行的次序重新放置为：$a_{15}\ a_{21}\ a_{34}\ a_{42}\ a_{53}$，此时列标排列的逆序数为 $\tau(51423)=6$，则该项所带符号为正号。

名师笔记

n 阶行列式的定义是一个难点，考生应该掌握：

(1) n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和。

(2) 每一项又是 n 个元素的乘积，这 n 个元素要满足“不同行不同列”。

(3) 每一项的正、负由这 n 个元素所在行列式中的位置决定。

9. 余子式

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}。

10. 代数余子式

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式。

二、行列式的性质

名师笔记

在行列式的性质中，"行"与"列"的地位是平等的，即它们总是具有相同的性质。

关于行列式的性质，不同教材给出的描述不完全相同，但其基本含义相同。

性质 1.1　转置相等(行列式与它的转置行列式相等)。

性质 1.2　换行反号(互换行列式的两行(列)，行列式变号)。

性质 1.3　数乘乘行(用数 k 乘行列式，等于用数 k 乘行列式的某一行(列)的所有元素)。

性质 1.4　拆分拆行(行列式的某行(列)均是两数之和，则可以拆分为两个行列式之和)。

考生在应用性质 1.4 做题时往往会出现错误。例如，把行列式 D 拆分为 D_1 与 D_2 之和，那么考生应该注意，在 D、D_1 与 D_2 三个行列式中，只有一行(列)的元素可能不同，而其他行(列)的元素必须完全相同。

名师笔记

针对性质 1.4，例如：

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 10 & 9 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

正确的拆分如下：

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 10 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

性质 1.5　倍加不变(将某行(列)的 k 倍加到另一行(列)，行列式值不变)。

性质 1.6　零性质(① 行列式某行(列)元素全为零，则行列式为零；② 行列式有两行(列)完全相同，则行列式为零；③ 行列式有两行(列)元素成比例，则行列式为零)。

行列式的性质主要应用于行列式的化简和计算。利用行列式的各种性质往往可以把一个复杂的行列式化为某种特殊形式的行列式，从而进行求解。

三、行列式的重要定理与结论

行列式按行(列)展开定理　n 阶行列式 D 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

利用行列式按行(列)展开定理，在计算行列式时，可以选择有较多零元素的行(列)展开，使计算变得简单。

例如，计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

时，观察发现第 3 列只有一个非零元素，所以把行列式按第 3 列展开，此时一个 4 阶行列式就化简为一个 3 阶行列式了。即

$$D=5\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=5\times 6\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=30\times[3\times 1-2\times(-1)]=150$$

行列式按行(列)展开定理推论　n 阶行列式 D 的任一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0(i\neq j)$$

或
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0(i\neq j)$$

综合以上定理及推论，可以得出关于代数余子式的重要结论：

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$$

名师笔记

利用行列式的展开定理及推论可以得到伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的重要公式：

$$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

于是，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 为

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

根据矩阵乘法规则及行列式展开定理与推论，有

$$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & 0 \\ 0 & 0 & |\boldsymbol{A}| \end{bmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

四、行列式的主要公式

1）上（下）三角行列式（即主对角线的下（上）面元素全为零）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

说明：为了便于阅读，在不会误解的场合矩阵或行列式中的零元素将略去。

2）关于副对角线的上（下）三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & & \\ a_{n,1} & & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & & a_{1n} \\ & & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \iddots & \vdots & \vdots \\ & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots n_{n1}$$

名师笔记

行列式的主要公式 1)和公式 2)可以用行列式的定义来证明。

3）分块上（下）三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{11} & \cdots & d_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

上式可以写成抽象矩阵形式：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_m & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B}_n \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

名师笔记

行列式的公式 3)和公式 4)都是拉普拉斯展开定理的应用。

4）关于副对角线的分块上(下)三角行列式

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & d_{n1} & \cdots & d_{nm} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

可以写成抽象的矩阵形式：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{B}_n & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{B}_n & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

名师笔记

注意 考生常常把公式4)中的$(-1)^{mn}$错误地写成$(-1)^{m+n}$。

5）范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

名师笔记

很多考生对范德蒙行列式的结果理解有误。下面用一个四阶范德蒙行列式来作说明。

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$$

4阶范德蒙行列式的结果为C_4^2个差的乘积。

从范德蒙行列式的计算结果可以看出，当第2行(列)元素x_1，x_2，…，x_n两两不相等时，行列式的值不为零。利用这一结论往往可以判断线性方程组解的情况。

例如，齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 9x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_2 - x_3 + 27x_4 = 0 \end{cases}$$

的系数行列式是一个范德蒙行列式，其中第 2 行的 4 个元素分别为 1，2，－1，3，它们两两不相等，则该系数行列式不等于零，于是，方程组只有零解。

6）特征多项式

设 3 阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda - |\boldsymbol{A}|$$

其中，A_{11}、A_{22}、A_{33} 为 $|\boldsymbol{A}|$ 的代数余子式。

名师笔记

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=1$，于是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有阶数大于 1 的子式全为零，则有 $A_{11}=A_{22}=A_{33}=0$，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，于是有 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}$。

五、特殊行列式的分类

本书把考研试题中常见的特殊行列式分为若干种类，为了方便考生记忆，对每种特殊行列式给出了一个形象化的名字。针对每一种特殊行列式，在后面的例题中都给出了具体的求解方法。

名师笔记

给特殊行列式起一个通俗形象的名字，非常有利于考生记忆、交流和归纳总结。

1.“一杠一星”行列式

以下行列式称为“一杠一星”行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 28 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \end{vmatrix}$$

该类行列式共有四种不同的形状，如图 1.2 所示。所谓“一杠”是指与主(副)对角线平行且相邻的一条直线；“一星”是指离该直线距离最远的一个元素。该类行列式元素的特点是在“一杠”和“一星”处的元素不为零，其余元素都为零。

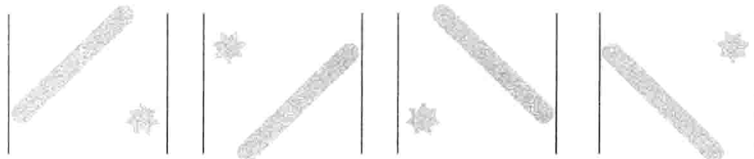
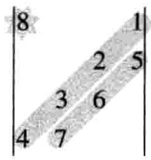


图 1.2 “一杠一星”行列式

2. “两杠一星”行列式

以下行列式称为“两杠一星”行列式：



$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & & & \\ & a & b & & \\ & & a & \ddots & \\ & & & \ddots & b \\ b & & & & a \end{vmatrix}$$

该类行列式有四种不同的形状，如图 1.3 所示。

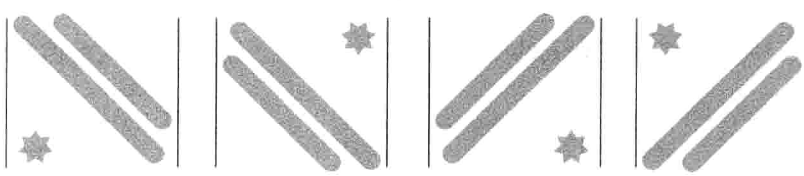


图 1.3 “两杠一星”行列式

名师笔记

(2012.1，2，3)已知“两杠一星”矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求 $|\boldsymbol{A}|$。

注：(2012.1，2，3)表示本题为 2012 年研究生入学考试数学一、二、三真题，后同。

3. “爪形”行列式

以下行列式称为“爪形”行列式：