微分积分

田岛一郎
〔日〕渡部隆一著
宫崎浩

…数学丛书

1

习题集

工科数学丛书之一

微分　积分

（习题集）

田岛一郎
〔日〕渡部隆一著
宫崎浩

刘俊山译

赵惠元
熊民旦 校

辽宁人民出版社

1980年·沈阳

内 容 提 要

这本《微分·积分习题集》的主要内容是：数列与级数、微分法、积分法、偏微分、重积分、分析基础等方面的例题、类题、习题以及解答。每题都经反复推敲。通过研究例题的解以理解在基础部分里所叙述的定义和定理的意义。

本书适于工科院校师生以及具备高中以上文化水平的有关人员阅读和自学。

工科数学丛书之一

微 分 积 分

（习题集）

田岛一郎
〔日〕渡部隆一 著
宫崎浩

刘俊山 译

赵惠元
熊民旦 校

*

辽宁人民出版社出版
（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行
沈阳新华印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：15 插页：2
字数：370,000 印数：1—20,000
1981年1月第1版 1981年1月第1次印刷

统一书号：7090·75 定价：2.00 元

译者的话

这套丛书译自日本庆应大学教授田岛一郎和东京大学名誉教授近藤次郎主编的《工科の数学》。全书共分五册：《微分、积分》《线性代数、向量分析》《微分方程、付里叶分析》《复变函数》和《统计、数值分析》。该丛书逻辑清晰、结构严谨，取材广泛，内容新颖；每册编有相应的习题集，并与基础部分紧密结合。该书当前在日本国内各工科大学已被广为采用，并深受读者欢迎。

为适应我国工科院校广大师生与有关人员学习需要，特将此书全部译出。由于水平有限，误译之处在所难免，恳切地希望读者提出批评，指正。

参加本丛书翻译的有：王运达、潘德惠、刘俊山、于溶波、傅文章、关颖男等同志。总校：赵惠元教授和熊民旦同志。在翻译过程中，党恺谦和田永成同志做了部分工作，在此，谨致谢意。

一九八〇年二月

目　　录

第一章　数列与级数

1·1　数　　列

1·1·1　数列的极限

要点

1°　收敛.

定义1·1　所谓 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，就是，对于无论怎样的正数 ε，总能找到满足下面条件的自然数 N。

对于 $n\geqslant N$ 的所有的自然数 n，$|a_n-a|<\varepsilon$。

也可表示为

$$n\geqslant N\Longrightarrow|a_n-a|<\varepsilon$$

的形式。其中，设 n 为自然数。

2°　发散．数列 $\{a_n\}$ 不收敛时，数列 $\{a_n\}$ 称为发散的。

$$\text{数列}\begin{cases}\text{收敛}\quad \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a & \text{（极限为 } a\text{）；}\\ \text{发散}\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty & \text{（发散为 }+\infty\text{），}\\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty & \text{（发散为 }-\infty\text{），}\\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n & \text{不确定（振动）。}\end{cases}\end{cases}$$

定义1·2　(1) 所谓 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，就是，对于无论怎样的正数 M，总能找到满足下面条件的自然数 N。

$$n\geqslant N\Longrightarrow a_n>M.$$

(2) 所谓 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$，就是，对于无论怎样的负数 L，总能找到满足下面条件的自然数 N。

$$n \geqslant N \Longrightarrow a_n < L.$$

3° **有界性.** 在数列$\{a_n\}$中，对所有的 n，使 $a_n \leqslant M$ 的常数M存在时，则称数列$\{a_n\}$是**上方有界的**，使 $a_n \geqslant L$ 的常数 L 存在时，则称数列$\{a_n\}$是**下方有界的**.

上方有界与下方有界的数列，简称为**有界数列**. 所谓有界数列$\{a_n\}$，就是指，存在一常数K，使得对于所有的 n，$|a_n| \leqslant K$.

例题1·1·1 设以下式给出的，通项为 a_n 的数列 $\{a_n\}$ 的极限为 a. 这时，求使下列 (i) 或 (ii) 成立的自然数N的最小值.

（1） $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ (2) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ (3) $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$.

(i) $n \geqslant N \Longrightarrow |a_n - a| < 10^{-4}$.

(ii) $n \geqslant N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon \ (\varepsilon > 0)$.

【解】 (1) $a = 0$, $|a_n - a| = \left|\dfrac{1}{n^2} - 0\right| = \dfrac{1}{n^2}$.

(i) $\dfrac{1}{n^2} < 10^{-4} \Longleftrightarrow 10^4 < n^2 \Longleftrightarrow 100 < n$, $\therefore N = 101$.

(ii) $\dfrac{1}{n^2} < \varepsilon \Longleftrightarrow \dfrac{1}{\varepsilon} < n^2 \Longleftrightarrow \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}} < n$.

N为不超过$\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$的最大整数加 1 的整数. 一般地，不超过实数 x 的最大整数用$[x]$表示. 即，当 m 为整数时，

$$m \leqslant x \leqslant m + 1 \Longleftrightarrow [x] = m.$$

$[x]$称为高斯 (Gauss) 记号. 若用这个记号，则

$$N = \left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right] + 1.$$

（2） $a = 1$, $|a_n - a| = \left|\dfrac{n-1}{n+1} - 1\right| = \dfrac{2}{n+1}$.

(i) $\dfrac{2}{n+1}<10^{-4}\Longleftrightarrow 20000<n+1,\quad\therefore\quad N=20000.$

(ii) $\dfrac{2}{n+1}<\varepsilon\Longleftrightarrow\dfrac{2}{\varepsilon}<n+1,\quad\therefore\quad N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right].$

(3) $\alpha=1,\ |a_n-\alpha|=\left|\dfrac{2^n-1}{2^n}-1\right|=\dfrac{1}{2^n}.$

(i) $\dfrac{1}{2^n}<10^{-4}\Longleftrightarrow 10^4<2^n\Longleftrightarrow\dfrac{4}{\log_{10}2}<n.$

$$\frac{4}{\log_{10}2}\fallingdotseq\frac{4}{0.301}=13.2\cdots,\quad\therefore\quad N=14.$$

(ii) $\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon\Longleftrightarrow\dfrac{1}{\varepsilon}<2^n\Longleftrightarrow\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}<n,$

$$\therefore\quad N=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]+1.$$

类题1·1·1 对于下列数列$\{a_n\}$，求例题1·1·1的N。

(1) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (2) $a_n=\dfrac{n}{2n+3}$ (3) $a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$.

例题1·1·2 证明收敛数列是有界的。

证明. 设数列$\{a_n\}$收敛，其极限值为α。若在定义1·1中的ε取为1时，则对于这个ε，总能找到满足下面条件的自然数N。

$$n\geqslant N\Longrightarrow|a_n-\alpha|<1.$$

可是，由于

$$|a_n-\alpha|<1\Longleftrightarrow\alpha-1<a_n<\alpha+1$$

所以，设

$$M=\max\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{N-1},\ \alpha+1\}\ ^{1)},$$
$$L=\min\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{N-1},\ \alpha-1\}\ ^{2)}$$
时，则对于所有的 n，$L\leqslant a_n\leqslant M$。因此数列$\{a_n\}$是有界的. 14

注意。这个例题的逆不成立。即，有界的数列不一定收敛。

例如 $a_n=(-1)^n$，$\{a_n\}$ 是有界的，但不收敛。

由于在研究数列的收敛及其发散时，常要用到实数的绝对值的性质，因此将它归总如下。

实数的绝对值

$$|a|\geqslant 0,\ |a|^2=a^2,\ -|a|\leqslant a\leqslant|a|,\ |a|=|-a|,$$
$$|ab|=|a||b|,\ |a|\leqslant r\Longleftrightarrow -r\leqslant a\leqslant r\ （其中，r>0），$$
$$a^2\leqslant b^2\Longleftrightarrow|a|\leqslant|b|,\ \big||a|-|b|\big|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

例题1·1·3 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|\alpha|$。并举出其逆不成立的反例来。

证明。 根据假定，对于任意的正数 ε，可取适当的自然数N，使得

$$n\geqslant N\Longrightarrow|a_n-\alpha|<\varepsilon.$$ 17

但是，由于$\big||a_n|-|\alpha|\big|\leqslant|a_n-\alpha|$，故

$$n\geqslant N\Longrightarrow\big||a_n|-|\alpha|\big|<\varepsilon,\quad\therefore\quad\lim_{n\to\infty}|a_n|=|\alpha|.$$

作为逆不成立的例子，如 $a_n=(-1)^n$。

1·1·2 极限的求法。

要点

1° **公式**。当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$ 时，则

1) $\max\{\cdots\}$是$\{\cdots\}$中的最大数。

2) $\min\{\cdots\}$是$\{\cdots\}$中的最小数。

（1） $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$ （c为常数）

（2） $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ （3） $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

（4） $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ $(b_n \neq 0,\ \beta \neq 0)$。

这个公式指的是，若数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 收敛，则左边出现的数列也收敛，其极限值等于右边的值。

证明。（(1)，(2) 的证明省略。）

（3）由于数列$\{a_n\}$收敛，因而是有界的（例题1·1·2）．所以，对于所有的 n，使 $|a_n| < A$ 的正数 A 存在。同样，使 $|\beta| < B$ 的正数 B 也存在。

$$
\begin{aligned}
|a_n b_n - \alpha\beta| &= |a_n b_n - a_n\beta + a_n\beta - \alpha\beta| \\
&\leqslant |a_n||b_n - \beta| + |a_n - \alpha||\beta| \\
&< A|b_n - \beta| + |a_n - \alpha|B.
\end{aligned}
$$

对于任意的正数 ε，可选取适当的自然数 N，

$$n \geqslant N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2B},\quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad |a_n b_n - \alpha\beta| &< A|b_n - \beta| + |a_n - \alpha|B \\
&< A\cdot\frac{\varepsilon}{2A} + \frac{\varepsilon}{2B}\cdot B = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta.$$

（4）首先，证明数列$\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$是有界的。根据例题1·1·3，$\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = |\beta|$，因为$|\beta| > 0$，所以，可选取适当的自然数$N$，使得

$$n \geqslant N \Longrightarrow \big||b_n| - |\beta|\big| < \frac{|\beta|}{2}.$$

$$\therefore \quad |\beta| - \frac{|\beta|}{2} < |b_n| < |\beta| + \frac{|\beta|}{2},$$

$$\therefore \quad \frac{|\beta|}{2} < |b_n| < \frac{3}{2}|\beta|.$$

即， $n \geqslant N \Longrightarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|\beta|}$，所以，设

$$M = \max\left\{\frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}, \cdots, \frac{1}{|b_{N-1}|}, \frac{2}{|\beta|}\right\}$$

时，则对于所有的 n，$\frac{1}{|b_n|} < M$，因此$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$有界。

又 $$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|\beta - b_n|}{|b_n||\beta|} < \frac{M}{|\beta|}|b_n - \beta|,$$

对于任意的正数 ε，可选取适当的自然数N_1，

$$n \geqslant N_1 \Longrightarrow |b_n - \beta| < \frac{|\beta|}{M}\varepsilon.$$

$$\therefore \quad n \geqslant N_1 \Longrightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| < \frac{M}{|\beta|} \cdot \frac{|\beta|}{M} \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}.$$

因此，根据（3），

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

2° 数列的项与极限大小的关系.

〔1〕对于所有的 n，$a_n < b_n$（或$a_n \leqslant b_n$），若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$，则 $\alpha \leqslant \beta$.

〔2〕对于所有的 n，$a_n < c_n < b_n$（或$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$），若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$。（相夹原理）

证明. 〔1〕若设 $\alpha>\beta$，则产生不合理情况（反证法）.

$$0<\varepsilon<\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \quad \therefore \quad \beta+\varepsilon<\alpha-\varepsilon,$$

对于上述的 ε，可选取适当的自然数N，

$$n\geqslant N \Longrightarrow |a_n-\alpha|<\varepsilon,\ |b_n-\beta|<\varepsilon,$$

$$\therefore \quad n\geqslant N \Longrightarrow \alpha-\varepsilon<a_n<\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon<b_n<\beta+\varepsilon.$$

可是，根据 ε 的定法，

$$b_n<\beta+\varepsilon<\alpha-\varepsilon<a_n, \quad \therefore \quad b_n<a_n.$$

由假定，对于所有的 n，$a_n<b_n$（或 $a_n\leqslant b_n$），因此这是不合理的. 故 $\alpha\leqslant\beta$.

〔2〕对于任意的正数 ε，可选取适当的自然数N，使得

$$n\geqslant N \Longrightarrow \alpha-\varepsilon<a_n<\alpha+\varepsilon,\ \alpha-\varepsilon<b_n<\alpha+\varepsilon.$$

由假定，对于所有的 n，因 $a_n<c_n<b_n$，所以

$$n\geqslant N \Longrightarrow \alpha-\varepsilon<a_n<c_n<b_n<\alpha+\varepsilon.$$

$$\therefore \quad n\geqslant N \Longrightarrow \alpha-\varepsilon<c_n<\alpha+\varepsilon, \quad \therefore \quad n\geqslant N \Longrightarrow |c_n-\alpha|<\varepsilon.$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} c_n=\alpha.$$

$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$ 的情况也同样.

3° 基本极限.

$$〔1〕\lim_{n\to\infty} r^n=\begin{cases} +\infty & (r>1) \\ 1 & (r=1) \\ 0 & (|r|<1) \\ \text{不确定} & (r\leqslant -1) \end{cases} \qquad 〔2〕\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0) \qquad 〔3〕\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

4° 基本定理.

定理1·1 （1）如果给定自然数N，并能选取适当的 $0<r<1$ 的常数 r 时，若

$$n\geqslant N \Longrightarrow |a_{n+1}-\alpha|\leqslant r|a_n-\alpha|$$

成立时，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$.

（2）若不等式 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ 成立时，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$。

利用这个定理，可以求如下的极限值。

〔1〕 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$（$a$为常数） 〔2〕 $\lim\limits_{n\to\infty} na^n=0(|a|<1)$

〔3〕 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{a^n}=0$（$\alpha>0$，$a>1$）

5° 常用不等式．在求极限时，常用下列不等式。

当 $x>0$ 时，

$$x^\alpha-1\geqslant\alpha(x-1)\qquad(\alpha>1\ 或\ \alpha<0)$$

$$x^\alpha-1\leqslant\alpha(x-1)\qquad(0<\alpha<1)$$

等号仅限于 $x=1$ 时。

这些不等式，若考虑 $y=x^\alpha$ 的图形与其上的点（1,1）处的切线的位置关系，就能够立刻推导出（参看基础部分P.94）

基础部分 P.4 的不等式（1），（2），分别是 $\alpha=n$，$\alpha=\dfrac{1}{n}$的情况。

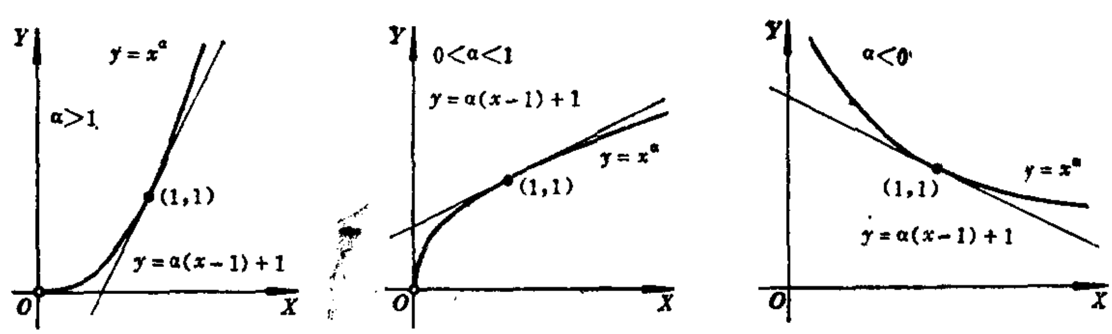

图1·1

上面的不等式在习题集中经常用到。

例题1·1·4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$。

【解】 $(1+2^n+3^n)^{1/n}=3\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right\}^{1/n}$.

可是，对于所有的 n，

$$1<\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1<3,\quad \therefore 3<(1+2^n+3^n)^{1/n}<3(3)^{1/n}.$$

这里，令 $n\to\infty$ 时，右边$\to 3$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{1/n}=3。$$

类题1·1·2 当 $a>b>c>0$ 时，求下列极限值。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{1/n}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n}+c^{-n})^{-1/n}$.

例题1·1·5 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，试证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a。$$

【解】 设 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=b_n$。

(i) $a=0$ 的情况。

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以，对于任意的正数 ε，选取适当的自然数 m，可使

$$n\geqslant m\Longrightarrow|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立。

$$|b_n|=\frac{|(a_1+\cdots+a_{m-1})+a_m+\cdots+a_n|}{n}$$

$$\leqslant\frac{|a_1+\cdots+a_{m-1}|}{n}+\frac{|a_m|+\cdots+|a_n|}{n}$$