GAILÜLUN

大学数学精要辅导丛书（理工科）

概率论与数理统计
全程导学

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI QUANCHENG DAOXUE

浙江大学·概率论与数理统计（第二版）

肖果能 唐立 陈亚利 杨文胜 编著

湖南科学技术出版社

概率论与数理统计
全程导学

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI QUANCHENG DAOXUE

浙江大学·概率论与数理统计(第二版)

肖果能 唐立 陈亚利 杨文胜 编著

大学数学精要辅导丛书(理工科)

湖南科学技术出版社

概率论与数理统计全程导学

浙江大学·概率论与数理统计(第二版)

编　　著:肖果能　唐　立　陈亚利

责任编辑:徐　为　沙一飞

文字编辑:陈一心

出版发行:湖南科学技术出版社

社　　址:长沙市湘雅路280号

　　　　http://www.hnstp.com

邮购联系:本社直销科　0731-4375808

印　　刷:湖南航天长宇印刷有限责任公司

　　　　(印装质量问题请直接与本厂联系)

厂　　址:长沙市望城坡068

邮　　编:410205

经　　销:新华书店

出版日期:2002年11月第1版第1次

开　　本:850mm×1168mm　1/32

印　　张:10

字　　数:264000

书　　号:ISBN 7-5357-3574-6/O·207

定　　价:15.00元

前言

本书是高等理工科院校本科《概率论与数理统计》课程的一本教学辅导读物，是由湖南科学技术出版社同时出版的《高等数学全程导学》、《线性代数全程导学》两书的姊妹篇。

教学辅导读物之所以受到高校广大师生的欢迎，是因为它能紧密地配合教材，对教学提供切实的帮助。一本好的教辅读物，是教材的补充和扩展，帮助读者理解教材的体系，廓清概念，解析疑难，扫清学习障碍，提高修养与能力。编者在撰写本书时，正是以此作为努力追求的目标。

本书共九章，分概率论(1～5章)和数理统计(6～9章)两部分。每章设"内容概述"、"疑难解析"、"典型例题"、"习题解答"等四个栏目。其中的"内容概述"着重分析教材内容的理论体系，帮助读者从整体上掌握知识的结构；"疑难解析"对重要概念的直观背景和理论意义及概念之间的内在联系，对重要定理的思想、涵义和作用，作透彻明晰的说明，帮助读者克服学习中的困难；"典型例题"旨在总结典型问题的类型和解法，训练和提高解题能力；"习题解答"解答了流传很广、影响较大的浙江大学编的《概率论与数理统计》教材的大部分习题。

本书是依据部颁"概率论与数理统计教学基本要求"、各类教材、硕士研究生入学数学考试大纲概率统计部分及历届考研试卷编写的，适用于辅导理工科院校各专业概率论与数理统计的课程学习及考研复习。其中的概率论部分由肖果能执笔，陈亚利编写了第二、第三两章的"典型例题"部分；数理统计部分由唐立、杨文胜执笔。由于时间紧迫，亦为水平所限，本书不足之处请读者批评指正。

肖果能　谨识

2002年夏于湖南涉外经济学院

目录

目录

第一章
随机事件与概率

SUIJI SHIJIAN YU GAILÜ

一、内容概述

(一) 随机现象与概率论

1. 确定性现象与随机现象

在自然界和人类社会中存在着本质上不同的两类现象:确定性现象与随机现象.

在一定条件下必然发生或必然不发生的现象称为确定性现象,例如:

在一个大气压下 100℃ 的水必然沸腾;

对质量为 m 的物体施加外力 F,物体必在力的方向上产生加速度 $a = F/m$;

……

在一定条件下可能发生也可能不发生的现象称为随机现象,例如:

投一枚均匀硬币,硬币落下时可能正面(规定硬币的一面为正面)向上,也可能反面向上;

掷两颗均匀骰子,骰子上出现的点数之和可能是奇数,也可能是偶数;

……

对于确定性现象,人们关心的是现象发生的条件;对于随机现象,人们关心的是现象发生的可能结果及各种结果发生的可能性的大小.

由于随机现象的不确定性,令人把握不定,但这只是对个别的观察而言.在大量观察中,随机现象将呈现出一定的规律性,称为随机现象的统计规律.

2. 随机试验

研究随机现象的基本方法是进行随机试验.随机试验是指满足下面三个条件的试验:

Ⅰ)试验的所有可能结果不只一个,并且可以事先明确;

Ⅱ)每次试验的结果不确定:一次试验将发生哪个结果在试验之前不能预言;

Ⅲ)试验可以重复进行:试验的条件可以重复地实现.

一类随机现象联系于一个确定的随机试验.随机试验的可重复性使我们有可能对一类随机现象进行大量次数的试验,通过试验与观察认识随机现象的统计规律.

3. 概率论

概率论是研究随机现象的数学分支.

(二)样本空间 随机事件 概率

研究随机现象的基本方法是随机试验,我们来建立刻画随机试验的数学模型.设 E 是一个随机试验(简称试验).

1. 样本空间

试验 E 的基本结果称为基本事件,全体基本事件组成的集合称为样本空间,常用 Ω 表示样本空间,由于随机试验的所有可能结果可以事先明确,故集合 Ω 是确定的.

基本事件与样本空间具备下面的两个基本性质:

Ⅰ)完备性:每次试验必出现一个基本事件 ω,ω 是 Ω 中的一个元素;

Ⅱ)互斥性:每次试验只出现一个基本事件,任何两个基本事件不同时发生.

由Ⅰ)、Ⅱ),在一次试验中有且只有一个基本事件发生.通常我们还要求基本事件具有下面的性质:

Ⅲ)最简性:基本事件是最简单的试验结果,它不能划分为更简单的情形,即不能通过更简单的结果来表示.

2. 事件域

1)随机事件

基本事件是最简单的随机事件,一般的随机事件可由若干基本事件来表示,因而是若干基本事件的集合,也就是样本空间 Ω 的子集.

若 A 是随机事件，A 所含的基本事件称为对 A 有利的基本事件；若 $\omega \in A$，则基本事件 ω 发生导致随机事件 A 发生.

空集 $\varnothing$ 不含任何基本事件，故任何基本事件发生都不能导致 $\varnothing$ 发生，因而 $\varnothing$ 是不可能事件；空间 Ω 含有所有基本事件，故任何基本事件发生都导致 Ω 发生，因而 Ω 是必然事件. 不可能事件 $\varnothing$ 和必然事件 Ω 不具有随机性，但它们是随机事件的两个极端情形，仍视为随机事件.

2) 随机事件的相互关系

Ⅰ) 包含关系

若事件 A 发生时事件 B 必发生，即 A 所包含的基本事件都是 B 的基本事件（“$\omega \in A$”⇒“$\omega \in B$”），则称“事件 A 包含于事件 B”，记为 $A \subset B$.

Ⅱ) 相等关系

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，即 A、B 含有完全相同的基本事件，则称“A、B 相等”，记为 $A = B$.

Ⅲ) 互斥关系

若事件 A、B 不同时发生，即 A、B 不含有共同的基本事件，则称 A、B 互斥.

3) 随机事件的运算

随机事件之间可以进行运算，运算的结果产生新的随机事件.

Ⅰ) 基本运算　　设 A、B 为随机事件

加法：事件“A、B 至少一个发生”称为事件 A、B 的“和”或“并”，记为 $A \cup B$，它由包含在 A 或 B 中的所有基本事件组成：

$$A \cup B = \{\omega : \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}.$$

乘法：事件“A、B 同时发生”称为事件 A、B 的“积”或“交”，记为 $A \cap B$ 或 AB，它由同时属于 A 及 B（即 A、B 共有）的基本事件组成：

$$A \cap B = AB = \{\omega : \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}.$$

对立事件：事件“A 不发生”称为 A 的“对立事件”，记为 $\overline{A}$，它由不属于 A 的基本事件组成：

$\overline{A} = \{\omega : \omega \in \Omega$ 但 $\omega \notin A\}$.

减法:事件“A 发生而 B 不发生”称为事件 A、B 的“差”,记为 $A \setminus B$:

$A \setminus B = \{\omega : \omega \in A$ 但 $\omega \notin B\}$.

注　由以上定义可知

1° A、B 互斥 $\Leftrightarrow A \cap B = AB = \varnothing$;

2° $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A\overline{B}$;

3° $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

4° 加法、乘法均可推广到有限个或可列个事件的情形:

有限并:$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \{\omega$:存在 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 使 $\omega \in A_i\}$

可列并:$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega$:存在 $i(i \geqslant 1)$ 使 $\omega \in A_i\}$

有限交:$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \{\omega$:所有 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 使 $\omega \in A_i\}$

可列交:$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega$:所有 $i(i \geqslant 1)$ 使 $\omega \in A_i\}$

5° 事件的完备系:设 $\{B_i\}$ 是有限个(或可列个)事件,满足 $\bigcup\limits_{i} B_i = \Omega$;　$B_iB_j = \varnothing$(所有 i、j,$i \neq j$),

则称 $\{B_i\}$ 为事件的完备系.

Ⅱ)运算律

1° 交换律:$A \cup B = B \cup A$;　$AB = BA$;

2° 结合律:$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$,

$(AB)C = A(BC) = ABC$;

3° 分配律:

乘法对加法:$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

加法对乘法:$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

4° 吸收律:若 $A \subset B$,则　$A \cup B = B, A \cap B = A$;

5° 对偶律:(德·摩根律):$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

4) 事件域

联系于一个随机试验的所有随机事件组成的集合称为事件域,记为$\mathscr{F}$,$\mathscr{F}$是 Ω 的子集族.

3. 概率

概率是随机事件发生的可能性大小的数量表征,是定义于 F 上而取值于[0,1] 中的函数.

1) 频数与频率

在 n 次重复试验中,事件 A 出现的次数 n_A 称为事件A 的频数,n_A 与试验总次数n 之比f_A 称为事件A 的频率:

$$f_A = n_A/n$$

频率有下面的性质:

Ⅰ) 非负性:$f_A \geqslant 0$;

Ⅱ) 归一性:$f_\Omega = 1$;

Ⅲ) 可加性:若 A、B 互斥,则 $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.

2) 频率稳定性

在大量次数的试验中,在大多数情况下,随着试验次数的增加,随机事件 A 发生的频率将稳定在某个常数的附近,即在一个常数的近旁摆动,这种性质称为随机事件的频率稳定性,它是随机事件固有的性质.

3) 概率的统计定义

设 A 是随机事件,由频率稳定性,在大量试验的大多数情况下频率 f_A 将稳定在某个常数的附近,称此常数为事件 A 的概率,记为 $P(A)$.

4) 概率的公理化定义

由概率的统计定义及频率的性质,在概率论中引入概率的公理化定义作为研究和讨论的出发点.

设 E 为随机试验,Ω 为其样本空间,F 为事件域.对于每个随机事件 $A \in \mathscr{F}$,对应着一个实数 $P(A)$,称 $P(A)(A \in \mathscr{F})$ 为概率,

若满足:

Ⅰ) 非负性: $P(A) \geqslant 0 \quad (A \in \mathscr{F})$;

Ⅱ) 归一性: $P(\Omega) = 1$;

Ⅲ) 可列可加性: 设 $A_i (i \geqslant 1)$ 两两互斥: $A_iA_j = \varnothing (i \neq j)$, 则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

5) 概率的性质

由概率的公理化定义可推出概率的性质:

Ⅰ) 不可能事件的概率为0: $P(\varnothing) = 0$;

Ⅱ) 有限可加性: 设 $A_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 两两互斥: $A_iA_j = \varnothing (i \neq j)$, 则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

Ⅲ) 单调性: 若 $A \subset B$, 则 $P(A) \leqslant P(B)$;

Ⅳ) 可减性: 若 $A \subset B$, 则 $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;

Ⅴ) 对立事件的概率: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

Ⅵ) 加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

Ⅶ) 一般加法公式:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n).$$

4. 概率空间

样本空间 Ω, 事件域 $\mathscr{F}$ 及概率 $P(A)(A \in \mathscr{F})$ 合在一起, 组成随机试验 E 的数字模型, 记为 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, 称为概率空间. 概率空间是研究概率论的基本框架.

(三) 古典概型

1. 古典型随机试验

投均匀硬币、掷均匀骰子、从袋中随机摸球等一类随机试验具有下面的两个特性:

Ⅰ）有限性：只有有限个基本试验结果；

Ⅱ）等可能性：每个基本试验结果出现的可能性相同，

称这一类试验为古典型随机试验.

2. 古典概型

古典型随机试验的数学模型称为古典概型，对于古典概型$(\Omega、\mathscr{F}、P)$：

Ⅰ）样本空间 Ω 是有限集：

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}.$$

Ⅱ）事件域$\mathscr{F}$由 Ω 的所有子集组成：

$$\mathscr{F} = \{A : A \subset \Omega\}.$$

Ⅲ）概率 P 按下面的公式定义：

$P(A) = |A| / |\Omega| =$ 对 A 有利的基本事件的数目 / 基本事件总数

（记号 $|M|$ 表示有限集 M 中的元素的数目）.

容易验证：古典概型所定义的概率 $P(A)$ 满足概率的公理化定义所要求的性质.

3. 利用古典概型计算随机事件 A 的概率的步骤

Ⅰ）设计与随机事件 A 相联系的随机试验 E；

Ⅱ）计算 E 的样本空间 Ω 中所含基本事件的数目 $|\Omega|$；

Ⅲ）计算事件 A 中所含基本事件的数目 $|A|$；

Ⅳ）计算概率：$P(A) = |A| / |\Omega|$.

其中 $|A|$ 与 $|\Omega|$ 的计算需要用到组合论中的计数公式与方法，这是初学时可能感到困难的地方.

（四）几何概型

古典概型要求样本空间的有限性，因而有一定的局限性，如果一个随机试验有无限多个等可能的基本结果，每个基本结果可用平面（或直线、空间）中的一点来表示，而所有的基本结果对应于一个区域 Ω. 随机事件 A 则对应于 Ω 的一个子集（也记为 A），由基本事件的等可能性，A 的面积（长度、体积）越大，则事件 A 发生的可能性越大，也就是说，概率 $P(A)$ 与 A 的面积 S_A 成正比，但

$P(\Omega)=1$,故应有

$$P(A)=S_A/S_\Omega.$$

几何概型就是这类随机试验的数学模型,其定义如下:

称概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$为几何概型,如果

Ⅰ)Ω为具有正的面积(或长度、体积)的平面(或直线、空间)区域;

Ⅱ)$\mathscr{F}$由Ω的全体具有面积(或长度、体积)的子集组成;

Ⅲ)对任意的$A\in\mathscr{F}$,A的概率定义为

$$P(A)=S_A/S_\Omega,$$

其中S_A、S_Ω分别表示A、Ω的面积(或长度、体积).可以验证几何概型所定义的概率满足概率公理化定义中的三条公理,因而也具有概率的所有性质.

(五)条件概率

设$(\Omega$、$\mathscr{F}$、$P)$为概率空间,A,B为随机事件,$P(B)\neq 0$.在一般情形下,事件B的发生对事件A发生的可能性将有影响,称"在事件B发生的条件下事物A的概率"为条件概率,记为$P(A\mid B)$,且定义

$$P(A\mid B)=P(AB)/P(B).$$

容易验证,条件概率满足概率的公理化定义中的三条公理,因而条件概率具有概率的所有性质.

下面的三个公式(概率的乘法公式、全概公式、逆概公式)都与条件概率有关,通常称为条件概率三公式.

1)概率的乘法公式

由条件概率的定义可得

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B).$$

同样地,若$P(A)\neq 0$,则

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A).$$

称这两个式子为概率的乘法公式,用语言叙述为:"两个事件同时发生的概率,等于其中一个事件的概率与这个事件发生的条件下

另一个事件发生的条件概率的乘积."

2) 全概公式

设 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是一组两两互斥的事件, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ (即 A 发生必导致 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中的一个(且仅一个)发生),则

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i)) && \text{(吸收律)} \\ &= P(\bigcup_{i=1}^{n} AB_i) && \text{(分配律)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) && \text{(有限可加性)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i) && \text{(概率的乘法公式)} \end{aligned}$$

称

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

为全概公式.

全概公式的特例.

1° 若 $\{B_i : i=1,2,\cdots,n\}$ 是事件的完备系,则对任意事件 A,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i).$$

2° 对任意事件 B, $\{B,\overline{B}\}$ 是事件的完备系,故有

$$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(\overline{B})P(A \mid \overline{B}).$$

3) 逆概公式(贝叶斯公式)

在全概公式的条件下,对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$,由概率的乘法公式

$$P(AB_i) = P(A)P(B_i \mid A) = P(B_i)P(A \mid B_i).$$

故由全概公式得

$$P(B_i \mid A) = P(B_i)P(A \mid B_i)/P(A) =$$

$$P(B_i)P(A \mid B_i)/\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i),$$

称此式为逆概公式或贝叶斯公式.

(六) 独立性

1. 直观意义

两个事件独立,直观上指其中一个事件发生与否并不影响另一事件发生的可能性(概率).

2. 定义

若 $P(B)\neq 0$,且 $P(A\mid B)=P(A)$,则称 A、B 独立;若 $P(B)=0$,则对任意事件 A,称 A、B 独立.

3. 等价定义

事件 A、B 独立,当且仅当 $P(AB)=P(A)P(B)$.

由此可知,若 A、B 独立,则 B、A 独立,即 A、B 相互独立.

4. 性质

A 与 B;$\overline{A}$ 与 B;A 与 $\overline{B}$;$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 四组事件中有一组独立,则其余三组亦独立.

5. 多个事件的独立性

称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 独立,若以下各式均成立:

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)\quad(i<j),$$

$$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k)(i<j<k),$$

………………

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

注 由此定义,n 个事件独立,需有

$$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)-C_n^0-C_n^1=2^n-n-1$$

个式子同时成立.

(七) 独立重复试验

1. 贝努利试验

如果随机试验只有两个可能的基本结果,则称为贝努利试验,通常称其中的一个结果为“成功”,且记“成功”的概率为 p,则另一结果为“成功”的对立事件,称为“失败”,记“失败”的概率为 $q=$