分形理论及其应用

辛厚文　主编

中国科学技术大学出版社

5

分形理论及其应用

辛厚文　主编

中国科学技术大学出版社
1993・合肥

内 容 简 介

分形是非线性科学中的一个重要分支。本书充分反映了我国近年来在分形理论及其应用等方面所取得的重要成果。它是根据"全国第三届分形理论及应用学术会议"的论文精选、并按一定体系编排和汇集而成的。所收论文涉及到分形研究前沿展望，分形数学，分形物理，分形的计算机产生、模拟和图像处理，分形在化学、生物学、材料科学、地学以及人文和社会科学中应用等。

本书可供分形研究和应用者使用。

(皖)新登字 08 号

分形理论及其应用
辛厚文 主编

*

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号，230026)
中国科学技术大学印刷厂印刷
新华书店经销

*

开本：787×1092/16 印张：29 字数：702 千
1993 年 10 月第 1 版 1993 年 10 月第 1 次印刷
印数：1—500 册
ISBN 7-312-00550-0/O·139 定价：18.00 元

前　言

分形(Fractal)是于1973年由曼德布罗特(Mandelbrot)首先提出来的，他的专著《分形——形，机遇和维数》于1975年出版，标志着分形理论的正式诞生。他对分形是这样定义的：其组成部分与整体以某种方式相似的“形”叫做分形。大量事实表明，分形在自然界中广泛存在着。从发表的论文来看，所涉及的领域已遍及数学、物理、化学、材料科学、表面科学、生物与医学、地质和地理学、地震和天文科学以及计算机科学等。分形的研究受到如此广泛重视的原因可归结为：一是它具有广泛而巨大的实用价值；二是它有着重大的理论价值，分形给人们展示了一类具有标度不变对称性的新世界，在此世界中可能存在着新的物理规律和特征。

目前，分形理论已经得到了广泛的应用。它在推动许多学科的发展上，起到了重要作用。从国内外分形理论的研究来看，尽管已取得了重要进展，但仍有一些带根本性的问题有待于深入解决。分形的数学理论是分形理论的核心，除了分形几何正在发展和完善之外，分形上的运算规律——微积分等有待建立。分形的物理理论，对于揭示自然界中自相似结构产生的物理机制以及分形结构上新的物理规律，起着更重要的作用，许多重要课题有待于深入研究。例如：分形生长动力学、分形子动力学、分形上相变和临界动力学、远离平衡态的自相似性与分形的自组织临界现象等。

本书是“全国第三届分形理论及应用学术会议”的论文集，它充分反映了我国近年来在分形理论及其应用方面所取得的可喜的成果，一些工作处于本门学科的国际前沿水平，许多工作都在解决各门学科领域的各种复杂问题中发挥了重要作用。应该指出，由于时间仓促和通信联系不够等多方面原因，还有许多优秀的论文没有被收入到本书之中，这是很遗憾的。本书的结构是按其内容进行分类编排的，因此所列章节只能限于论文所涉及到的领域，这并不意味着没有被编入的学科领域，分形理论就没有得到应用。至于每篇论文的编排，限于编者水平，定有许多不当之处，望批评指正。

在本书出版过程中，得到了中国科学技术大学出版社、近代化学系和非线性科学中心的大力支持，张宏光博士付出了辛勤劳动，在此一并表示感谢。

辛厚文

1993年6月20日于中国科学技术大学

目　录

概　　论

分形数学

分形的计算机产生、模拟和图像处理

分 形 物 理

分形在化学、生物学中的应用

分形在材料科学中的应用

*　　*　　*

分形在地质、水文和气象科学中的应用

分形在地震科学中的应用

分形在地理、人文和社会科学中的应用

分形研究的若干问题及动向

李后强
（四川大学物理系，成都 610064）

近年来，分形理论在国内外发展很快。自然科学领域（如物理、化学、地学及生物学等）中的分形学术论文有指数增长趋势，哲学社会科学领域涉及分形的论文和书籍也不断增加。有关分形的专题讨论会有增无减。"国际学术讨论会自然科学中的分形——关于自然界复杂几何的国际会议"（Fractals in Natural Sciences: International Conference on the Complex Geometry in Nature）今年 8 月 30 日至 9 月 2 日在匈牙利布达佩斯召开。国际学术刊物《混沌、孤子和分形》（Chaos, Solitons and Fractals）（Pergamon Press, 1991）和《分形学》（Fractals— An interdisciplinary Journal on the Complex Geometry of Nature（World Scientific, 1993）已先后问世，从而使分形理论有了属于自己的阵地。

在我国的攀登计划《非线性科学》项目中，列出了"分形的数学理论"、"分形的物理机理"（分形上统计模型的相变、多分形结构、动力学集团生长等）两个大方向，国家自然科学基金申请指南中已列出"分形论及其应用"（A01020405）内容，这表明我国对分形理论也持肯定和欢迎态度。

但是，这些年来关于分形的争论也很多。特别是 1988 年以来，B. B. Mandelbrot 与 S. Krantz 一直在为分形的价值而争吵不休[1]。Krantz 认为，"对分形一词没有明确的定义，作为一个数学家，我觉得这不是一个好兆头""分形几何同微积分的显著差别是，分形几何还没有解决任何问题"，"分形几何学家不证明定理"，"他们产生图形是为了得到更多的图形，而不是为了得到更深刻的思想"。Mandelbrot 则认为，分形工作是充满想象力，具有挑战性的。这方面的研究加深了我们对自然的理解。"如果我只是证明了少数几个定理的话，那么用这些定理很难发现现在还没有创立的或潜在的研究领域"，"我的一个定理回答了自从 Poincarē 定义了克莱因群的极限集后一直处于未解决状态的一个问题"。"如何定义现代的数学，以及是否把我看成是数学家，这些不是重要的。相反，重要的是，我在不同的领域中'追求美好的问题'而得到的结果"。Mandelbrot 与 Krantz 的争论是最具有代表性的，有人称[2]"这是一场关于数学灵魂的战斗"。

虽然，Karntz 的言论偏激了一些，但他提出的问题是值得认真思考的。就我的认识水平而言，下列问题值得我们花精力和时间。

（一）如何判断一个对象是分形或多分形的问题

Mandelbrot 曾（1982）指出，Hausdorff Besicovitch 维数严格大于拓扑维数的集合称为分形（A fractal is by definition a set for which the Hausdorff Besicovitch dimension strictly

国家自然科学基金资助项目

exceeds the topological dimension)。但这仅是试验性定义(tentative definition of a fractal),很不严格,也无可操作性。1986 年,Mandelbrot 修改了这个尝试性定义,提出[3]"其组成部分以某种方式与整体相似的形体叫分形"(A fractal is a shape made of parts similar to the whole in some way)。这是 Mandelbrot 在给 Feder 的私人通信(1987)中提出的。Mandelbrot 还说(1986)[4],"分形是非线性变换下的不变性,但我首先研究的是在线性变换下不变的自相似性。"这也算是对分形的一种表述。然而,他自己也认为,目前仍然没有关于分形的完整而精确的定义。

许多学者认为,分形是"看"出来的,而无法严格证明"什么"是"分形"。因此,给分形一个好定义,还需努力。没有公认的定义之前,要判断分形与非分形是有困难的。当然,也有学者(如 Falconer)认为,无需给分形一个严格定义,只要都理解其含义就行了,正如"生命"一词一样,虽然目前尚无一致公认的定义,但人们照用不误。

我们认为,自仿射性应是分形的本质特征,因此首先要研究的是自仿射性(包括统计意义上的)与定义之间的关系。对于实际问题中出现的分形图案的判断,仍是一个尚待解决的问题。

(二) 分维的物理意义问题

分维是描述分形特征的定量参数。但分维有什么用?这是经常听到的议论。Hausdorff 维数的意义似乎明确一些,它定量地描述一个点集规则或不规则的几何尺度,同时其整数部分反映出图形的空间规模。对动力系统而言,Hausdorff 维数大体上表示独立变量的数目。广义维数 Dq 或奇异谱 f(α),主要表征多分形的非均衡性和奇异性。在材料科学中,发现分维与材料的某些性质参数有关;在化学领域,发现分维同催化剂的催化性和选择性有关。但是,分维能否作为一个独立参数存在,现在还不太清楚。在时间序列分析中,关联维数 D_2 或广义维数 Dq,似乎有其独特的作用。寻找分维的更深刻的意义和实际的用途,应是值得高度重视的工作,否则分形理论就失去了其优势和存在的价值。

(三) 分形的动力学机制问题

分形理论主要致力于形态的描述,对动力学机制(包括分形产生的充要条件)几乎没有涉及,这不是一个好事。为改变这种"知其然而不知其所以然"的状况,有必要引入非平衡态物理学、协同学等学科中一些概念和方法,还要把时间参量纳入研究之中。同时,应对分数阶微分方程、非线性发展方程、辛几何等方面的进展给予关注。目前,在化学动力学及酶动力学领域已有进展,主要是通过分形子维数 d_s(谱维数)沟通时间与概率之间的关系。但远远不能说明分形的生长动力学。今后的研究应从以下三方面展开:①通过专门的仪器设备(如高速摄影机)详细记录 DLA 生长过程,根据观测资料建立其生长动力学模型(不能只滞留于 Laplace 方程)。换言之,我们必须研究集团生长的时间演化规律和集团的结构标度行为。国外已有这方面的报道。②应当考虑耗散结构及自组织临界(SOC)理论,进行有效的解析和数值研究。同时,要重视随机力和噪声对系统的影响。③从细胞自动机 CA 和神经网络 NN 方面对生长问题进行模拟研究。

总之,分形动力学是需要努力开拓的领域。

(四) 分形重构问题

分形集有多种方式形成,但基本上都与迭代和递归过程有关。所形成的分形集都表现出某种自相似性或拟自相似性(quasi—selfsimilar)。分形重构问题广义而言是任给一个几何上

认为是分形的图形，能否以某个指定的方式生成它?狭义而言则是指能否通过映射迭代来实现这一分形图形？这是动力系统研究的逆问题。

问　题：给定一个分形集，找出一动力系统其吸引集是此分形集；或者，更广泛地说，给出一测度，找出一动力系统其不变测度等于或接近于给定集合。

对于自相似的分形，目前已有“拼贴定理”，即任意分形集总可以用一系列自相似分形来逼近。

若把分形重构问题更加扩大，则是“如何由分维重构分形”。即已知一个分形的维数，如何重新构建(还原)这个分形？目前关于时间序列的动力学重构，已有一些进展，但还限于已知系统。显然，由于存在“一因多果”或“一果多因”，由分维重构分形还必须加入另外的辅助参数，仅靠一个分维是不够的。

(五) 关于 Julia 集和 Mandelbrot 集的问题。

动力系统中的 Julia 集(记 J 集)和 Mandelbrot(记 M 集)是复多项式[5,6]如二次多项式 $f_c(Z)=Z^2+C$(C 为给定的复数)迭代的结果(Riemann 球面)。二者密切相关。迭代序列保持有界的复数 Z_0 的集合叫 Julia 填充集，记为 K_c。J 集是闭子集且有界。J 集有完全不连通的 Cantor 型和拟圆周形状的连通型两类，取决于二次多项式的系数。M 集定义为由复平面的使 Julia 填充集 K_c 成为连通集的复数 C 构成的集合。它本身是一个平面紧致集，又是连通的。但其内部似乎是不连通的，由众多的块片组成。当 C 是 M 集的一点，则它也是 Julia 填充集 K_c 的一点。M 集是否是局部连通的及其边界维数的计算，是值得研究的问题。最近有人[7](如 J. C. Yccoz 及 B. Branner)证明 M 集几乎是局部连通的，而 M. Shishikura 提出 M 集边界的分维是 2，这些都是还需进一步研究的问题。

对任一 d 次复多项式

$$P(Z)=Z^d+a_{d-2}Z^{d-2}+\cdots+a_0$$

其参数空间是$(a_{d-2},a_{d-3},\cdots,a_0)\in C^{d-1}$，Mandelbrot 集可推广为下述轨迹连通

$$L_d=\{\lambda\in C^{d-1}\,|\,K_{p\lambda}\text{是连通集}\}$$

其中$K_p=\{Z\,|\,P^n(Z)\not\to\infty\}$称为多项式的 Julia 填充集。已证明 Mandelbrot 集 L_2,L_3 是连通的。

问　题：Mandelbrot 集 L_d 也是连通的吗?

P. Moussa 等人研究了整系数多项式和代数整系数多项式的填充 Julia 集内准周期点的代数特性，发现准周期点与代数整数有关。

问　题：对于 d 次多项式族的 Mandelbrot 集，其中所含有的代数数有何特点?

对于临界有限的整超越函数族的 Julia 集，当参数变化时，其 Julia 集可能发生“爆炸”。在复指数函数族和复正弦函数族中都发现这种现象。

问　题：设 E_λ 是一整超越函数族，每一 E_λ 是临界有限的。参数平面上什么样的分歧点可能产生 Julia 集爆炸?

关于整数函数，有理函数的迭代问题可参阅杨路、张景中、曾振柄的文章[8]。

除了以上五个大问题外，以下十个方面也应当有所突破。

1、随机多分形的数学问题；

2、分形曲线的导数问题(如 Gibbs 导数)；

3、分维计算的方法特别是由混沌时序计算分维的可信度问题；

4、多分形的热力学、相变实质及相变普适性划分判据问题；

5、分形的小波分析及小波变换产生分形的问题[9]；

6、生物膜的分形结构及其与细胞膜病变的关系问题；

7、原子、分子的分形问题(包括量子混沌)；

8、胖分形(fat fractal)及重正化混沌(renormchaos)问题[10]；

9、自组织临界现象(SOC)及负幂律问题；

10、图象的分形压缩问题；

今年秋季在布达佩斯举行的国际分形会议上，列出了如下议题：

生物学：Growth morphologies (bacteria colonies, neurons, plants, etc.,), complex signals；

化学：Polymers, corrosion, absorption；

地球科学：Geomorphology(river networks, transect profiles), fractures, nonlinear ocean waves；

物理学：Percolation and Aggregation phenomena, turbulence, self — organized criticality, rough surfaces, granular materials。

这些议题在一定程度上代表了当前分形研究的热点。此外，在哲学社会科学领域也可能获得新进展。总之，分形理论作为非线性科学的一个组成部分，它必将在发展中不断完善和走向成熟。

参考文献

[1] Krantz, S. G; Mandelbrot. B. B. 数学译林，1992:11(4),337—345

[2] Bown, W; New—Wave mathematics, New. Scientist,1991:3,August,33—37

[3] Feder,J; Fractals. Plenum Press,1988,11

[4] Mandelbrot,B. B; Fractals and the Rebirth of Iteration Theory, in The Beauty of Fractals——Images of Complex Dynamical Systems, Springer—Verlag, 1986:151—160

[5] Keen. L, The Julia set, in Chaos and Fractals: The mathematics behind the Computer Graphics Lecture Notes, 1988:1—35

[6] Branner,B, The Mandelbort set, in Introductory Survey Lectures on Chaos and Fractals. The Mathematics behind the Computer graphics, Providence Rhole Island, August,6—71988,K

[7] Douady, A; Boudine J. P,Mandelbrot 集的秘密，数学译林，1993,12(1). 79—84

[8] 杨路、张景中、曾振柄，动力系统中的分形集，数学进展，1990:19(2). 137—188

[9] 李后强、汪富泉，《分形理论及其在分子科学中的应用》，科学出版社，1993

[10] Chirikov. B. V. Patterns in Chaos,Chaos, Solitons & Fractals 1991:1(1),79—103

关于分形理论研究中若干基本问题的思考

赵 辉 孙博文 王德伟 张本祥
（哈尔滨工业大学） （哈尔滨机电专科学校） （黑龙江社会科学院）

“分形”一词传入我国后，在各行各业中引起了广泛的传播，研究分形的队伍日益壮大。从发表的文献上来看，多数研究工作者侧重于分形理论的发展和分形理论应用方面的研究。我们黑龙江省 CFS 学会的同志们在学习和研究分形理论的过程中，感到分形理论中的许多基本问题，例如：维数的含义，分数维时空观，分形的定义，以及分形方法论等都处在含混和不确定状态。本文把我们对分形理论中几个基本问题的认识提出来和大家商榷。

1. 维数的本质

众所周知，分形集的 Hausdorff 维数一般不是整数。分形理论的创始人 Mandelbrot 在给出分形的定义时，把 Hausdorff 维数严格大于拓扑维数的集合称为分形集，这引起人们对分数维集合研究的新浪潮。根据 Mandelbrot 定义，人们已把分数维集合和分形等同看待。由于 Hausdorff 维数和拓扑维数都是严格的数学概念，且分数维集合对于我们来说具有复杂性。因此有必要从更高的层次上探索维数的本质，进而达到认识分数维集合乃至分形的目的。

我们认为被考察的集合若其中的元素相对于考察的角度来说具有差异性，那么总可以对该集合赋予某种“层次结构”，集合中的元素按照这种“层次结构”进行分组，每个组内的元素属于同一“层次”。这种可划分性是客观的，而具体层次的划分是受考察的角度和层次划分方法的制约由人们在主观上进行的。正确的层次划分方法应使得不同层次中的元素相对于考察的内容具有“质”的区别，这表现在不同层次的元素性质绝对不同，或按照某种序关系比较产生绝对化的结果。不同层次元素比较结果的绝对化对应着观测的奇异性；在确定的层次里考察（注意要按照划分层次时的考察角度进行考察）不属于该层次的元素，考察结果与确定层次中的元素相比较具有“奇异性”。例如，可以按照 Hausdorff 测度定义给集合从测度角度划分层次，而 Hausdorff 维数则成为层次的标号。在 1 维的层次里（即使用该层次下的考察尺度—1—测度）观测有界直线的测度（长度），我们得到一个确定的有界实数；而若在该层次下用 1—测度考察尺度观测三次 koch 曲线的测度时，我们得到了数学上称为“无穷大”的结果。“无穷大”与有界实数相比较结果是绝对化的。反之在 Koch 曲线的层次里（即使用考察尺度—log4/log3—测度）进行观测，观测直线的结果是“无穷小”，而三次 Koch 曲线却是一个确定的有界实数（按 Hausdorff 测度定义大于零），二者相比仍产生了绝对化的结果。

从本质上来说，维数是集合层次的一种量值标号。例如，拓扑维数和 Hausdorff 维数都是集合划分层次的层次标号，他们之间的重要区别是从不同的考察角度给集合划分层次。

给集合划分层次的结果可以有多种表现形式，并不一定都要用到“维数”一词，例如，物理学中常用的“相”的概念来区分物质的层次，而社会科学和日常生活中的层次区分方法更加庞杂。

即使是同样的考察角度，由于层次划分方法的多样性，集合的层次结构在不同划分方法下可能产生不同的结果。例如，Hausdorff 维数定义方法可以加以改造而变得更加精细。从层次结构划分的意义上来看分数维集合，分数维数集合和整数维数集合一样，只不过各自属于一个层

次罢了。但是由于我们传统的数学方法是在整数维的层次里建立的，因此我们用传统的方法(即用整数维中的观测工具)去考察不属于整数维层次的分数维集合时，当然考察的结果与传统经验相比是“奇异的”；因此人们说分数维集合是复杂集合，乃至被称为“怪兽”。假如我们建立了分数维层次中的数学方法，用于考察自身，则观测结果一定是平凡的、简单的；而若用于考察整数维集合，则整数维集合成为了复杂集合。复杂性的产生只是我们跨越层次考察事物的结果。那么分形与分数维是什么样的关系呢？我们留待第3个问题中来谈。

集合存在着层次结构告诫我们，一旦对集合中的元素划分了层次，那么考察该集合中的元素时，既要考察集合中的元素的量，又要注意到该元素所在的层次(维数、量纲等等)。当某个元素的考察结果是“奇异”的时侯，要追究一下该元素所在的层次与考察工具所在的层次是否一致。

一个集合其元素之间的关系是错综复杂的，无论按何种划分层次的方法，不同层次下的元素总要放在一个体系下一起考察，这时层次标号(“维数”、“量纲”、“相”等)也是一个重要的考察内容，而层次之间的关系是我们整体考察一个集合的重要保证。下面我们利用这种思考方法给出“分数维时空观”的理论依据。

2. 分数维时空观

物理学家们发现了奇异性态物理量和发散过程之后，开始怀疑某些物理量的量纲数可能是介于整数之间的某一分数。“分形”的提出使人们从新开始认识分数维，这使得许多人确信存在量纲数不是整数的物理量，更有人提出我们生活的时空本身就不是整数维的。下面我们根据层次结构理论和维数的本质来说明“分数维时空观”的合理性。

传统的时空概念和时空维数全部源于欧氏空间理论。欧氏空间的建立是通过集合的笛卡尔(Cartesian)乘积实现的，而传统的欧氏空间维数是指参与乘积的集合的元素个数。这样时空维数就成了决定时空的物理量的个数，当然它是个整数。有的研究工作者为了说明时空的分维性，把物理量的个数推广成非整数的分数。我们认为这种作法欠妥。给元素计数的方法完全可由集合论的公理体系建立起来，计数的结果是无关重要的，关键是计数系统的规则。现行的自然数计数体系是由集合论公理体系建立起来的符号体系，也是人们千百年来感知自然的结晶。以分数给元素计数严重地破坏了计数系统的规则，与集合论公理体系相抵触。那么怎样说明时空可能是分数维的呢？问题的关键在于欧氏维数的定义。事实上，欧氏空间的维数应定义为决定欧氏空间的乘积空间维数。根据乘积空间维数理论，乘积空间的维数由参与乘积的各集合的维数和集合之间的关系确定，若乘积空间由若干个独立元素通过笛卡尔乘积获得时，乘积空间的维数等于各元素的维数之和。当按某些划分层次方法使得参与乘积的各集合元素的维数参差不齐时，那么乘积空间的维数就不一定是整数，即可能存在分数维时空。这里的关键是时空的维数由各物理量的维数通过运算获得，而不是通过数物理量的个数获得，这与我们的层次结构理论是一致的。物理量的层次差异被引入到时空中，这样即可很好地理解分数维时空的存在性，同时也可以正确解释奇异性态物理量和发散过程。

乘积空间方法或多或少地在数学领域解决了层次结构之间的关系。当我们观察时空的工具是确立在某一层次上时，若其他层次的物理量参入进该时空，则其被观测到的性态必然是奇异的，乃至引起整个时空维数的分数化。

3. 分形的定义

Mandelbrot 在他早期的论文中，定义了分形集是满足 Hausdorff 维数严格大于拓扑维数的集合。“分形”一词源于拉丁文 fractus ，本意是指“破碎的”，用传统的几何观点来看即是不规则

的和复杂的。Mandelbrot 这个定义的目的在于刻划不规则集合，这个定义本身虽然还没有完全作到这一点，但是 Mandelbrot 的思想是十分清楚的，他用分形一词来描述分数维集合。这导致许多研究分形的人实际上是在研究分数维。然而大多数经典分形的例子给人们留下的十分深刻的印象是分形是局部和整体以某种方式相似的集合，这也是 1986 年 Mandelbrot 给出的分形的另一个定义。尽管这个定义含有不确定因素，以至于难于用于演绎，重要的是它与早期的定义出发点完全不同，分形已不在从复杂性角度进行刻划，而致力于从局部和整体的关系上来描述。对这两个定义的选择可以表明我们认识和研究分形的目的。

从集合的层次结构观点来看，复杂集合的存在是一种平凡的、自然的现象。现时我们认识到的分数维集合的复杂性只不过是利用了整数维层次中的观测工具考察不属于整数维层次的集合时产生的认识结果。Mandelbrot 利用 Hausdorff 维数和拓扑维数的差异表征分数维集合只是看到两种维数定义方法相关时而产生的现象，许多实例反馈出这类定义方法存在的缺点。Falconer 指出，分形不存在确切简明的定义，只能罗列出分形的大部分特点，他的目的也是想把所有复杂集合包括进分形中。我们认为从复杂性角度定义分形只存在现时数学上的意义，不具有普适性和深刻的哲学意义。

局部和整体以某种方式相似的集合则极具特殊性。对这类集合的研究可以为我们认识自然、控制自然提供新的工具。从局部看整体乃至控制整体是人类认识史上的一个飞跃，具有深远的哲学意义。这类集合摆脱了复杂性和维数对它的约束，而仅仅把它们作为一个特征，因此具有普适性。

我们认为局部和整体以某种方式相似的集合应该从分数维集合中脱离出来进行定义和研究，这时分数维只是该类集合的一个特性。这类集合可以用一种新的名称来命名，以避免沿用分形一词引起的一系列混淆。

4. 分形方法论

我们在各类有关分形的书刊和文献中看到的被描述为分形的自然体—云层边缘、海岸线、地球表面、断口表面、以及液体湍流等等，其中没有一个是真正的分形。这些自然体在局部和整体的某种相似性上并不是在任何尺度上都成立的，通常只是在某些特定的尺度范围内才成立。这些尺度范围被人们称为“无标度区”。在实际问题中为了考察一个事物是否存在局部和整体的相似性，只要检测该事物是否存在“无标度区”即可。检测“无标度区”区的方法如下：以尺度 r 把事物划分成 N 个相似的部分，对变化的 r 画出 logr—logN 曲线，然后检查曲线上是否有明显的直线段，直线段对应的 r 的区域即是无标度区。这种方法的理论依据是自相似集的相似维数（$-\log N/\log r$）是不依赖于尺度 r 的一个常数。

从我们普遍使用的分形方法论上来看，我们实际上总是默认分形是局部和整体存在相似性的事物，而对于分数维集合，我们实际工作中缺乏方法论工具。

参考文献

(1). Mandelbrot B. B. , The Fractal Geometry of Nature, Freeman, SanFrancisco, (1982).

(2). Feder J. , Fractals, Plenum Press, New York. (1983).

(3). Falconer K. J. ,Fractal Geomrtry: Mathematical Foundation andapplications, Wiley, New York, (1990).

(4). Peitgen H. —O. and Saupe D. , The Science of Fractal Images, Springer, New York, (1988).

(5). 文志英，分形几何与维数，大自然探索，第二期(1989)。

(6). 张一方，数学物理中分维的发展和分维时空观，大自然探索，第二期(1991)。

分形插值的理论及应用
(摘要)

沙 震　　陈 刚
浙江大学应用数学系

§1 引 言

给定平面上一组点列$\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{N}$,求一个多项式$p(x)$,通过给定的点(x_i,y_i),或给定一连续函数$f(x)$,求一多项式$p(x)$,使在给定的$\{x_i\}_{i=0}^{N}$上插值于$f(x)$,即有$p(x_i)=f(x_i)$,$(0\leqslant i\leqslant N)$,这就是著名的拉格朗日插值法。插值多项式在数据拟合,数值分析以及逼近论的研究中都占有重要的地位。

样条函数是另一种强有力的插值工具,它具有优良的逼近性和稳定性,因而被广泛应用。设$x_0<x_1<\cdots<x_{N-1}<x_N$,是$I=[x_0,x_N]$的一个分划。记$P_k$是次数不超过$k$的多项式全体。定义$I$上的连续函数$s(x)$:

$$\begin{cases} s(x)=p_{i-1}(x)\in P_k, & x_{i-1}<x<x_i \\ p_{i-1}(x_{i-1})=y_{i-1} \\ p_{i-1}(x_i)=y_i \end{cases} \tag{1.1}$$

显然$s(x)$是连续的分段k次多项式,且通过给定的点组$\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{N}$,称为多项式插值样条。

现在我们将上述的的$s(x)$用另一种形式来表述:

记$I_i=[x_{i-1},x_i]$,令$L_i(x)=\dfrac{x_i-x_{i-1}}{x_N-x_0}(x-x_0)+x_{i-1}$,显然$L_i(x):I\to I_i$,又记

$$W_i(x,y)=(L_i(x),p_{i-1}(L_i(x)),\quad i\in\{1,2,\cdots,N\} \tag{1.2}$$

这样$\{W_i;i=1,\cdots,N\}$构成了一个迭代函数系(Iterated Function System)。若A是平面上的任意子集,记$W(A)=\bigcup\limits_{i=1}^{N}W_i(A)$,此时$W$将有一个不动点$G$,即有$W(G)=G$,且$G$是连续函数$s(x)$的图像,$G=\{(x,s(x)|x\in I\}$,可以证明这个$s(x)$与(1.1)所定义的函数是重合的。

现在如果将(1.2)修改成如下的形式:

$$W_i(x,y)=(L_i(x),a_iy+q_i(x)),1\leqslant i\leqslant N$$

这个迭代函数系就可以产生本文所要阐述的对象——分形插值函数。因此可以说,分形插值是样条插值的一种推广,并且更为复杂。

分形插值是美国数学家 M. F. Barnsley 于 1986 年在[1]中首先提出的。它给出了拟合数据的一种新思想,不仅为函数逼近论开辟了崭新的研究领域,而且为计算机图形学提供了有力的工具。目前已充分显示出其强大的生命力。

§2 迭代函数系(*IFS*)

分形插值函数是由迭代函数系产生的,为此我们先介绍这方面的内容。本节的内容可以在[2]、[9]、[10]及[13]中找到。

设(K,d)为某紧度量空间,设$x\in K,A\subset K,B\subset K$定义$d(x,A)=\inf\limits_{y\in A}d(x,y)$,$A$、$B$之间的 Hausdorff 距离为:

$$h(A,B)=max[\sup_{x\in A}d(x,B),\sup_{y\in B}d(A,y)]$$

记$w=\{w_i:i=1,2,\cdots,N\}$其中$w_i:K\to K$是 Borel 可测函数,这样w是K上的集值映射,定义为$w(x)=\{w_i(x):i=1,2,\cdots,N\}$　$x\in K$,对K的非空子集S,定义$w(S)=\{w(x):x\in S\}$。由此产生集值迭代函数系:$\{w^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$,这里$w^0(x)=x,w^n(x)=w(w^{n-1}(x)),n=1,2,3,\cdots$,显然$w^n(x)$含有$N^n$个点(其中可能有重复)。