

欧几里得和

巴拿赫空间内

方程的解法

● A. M. Ostrowski 著

● 黎 益 等 译

四川大学出版社

欧几里得和巴拿赫空间内方程的解法

A. M. 奥斯特洛夫斯基 著

黎 益 刘人丽
陶辅周 尚禄清 译

陈绍仲 校

四 川 大 学 出 版 社

1988年·成都

内 容 简 介

本书介绍了非线性方程和方程组解法的基本理论与成果。内容可分为三部分，一是本书需要的分析、代数及泛函基础知识，二是方法的叙述（插值法、试位法、一般迭代法、平方根法、最速下降法、Newton—Raphson 法、…），三是专题研究（见13个附录）。本书注重理论与实用结合，内容精炼明晰，叙述由浅入深，自成系统，便于自学。

本书可作为计算数学、数学及大专院校有关专业学生的教材，也是有关专业的教师、研究生、高年级学生、从事计算机应用的科技工作者及工程技术人员的有益参考书。

责任编辑 陈昭麟

A.M. OSTROWSKI

SOLUTION OF EQUATIONS IN EUCLIDEAN AND BANACH SPACES

(Third Edition) ACADEMIC PRESS, 1973

欧几里得和巴拿赫空间内方程的解法

A.M. 奥斯特洛夫斯基 著

黎 益 刘人丽 译
陶辅周 尚禄清
陈绍仲 校

四川大学出版社出版发行（成都四川大学内）

四川省新华书店发行 四川大学印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 22.125 字数 522千

1988年9月第一版 1988年9月第一次印刷

印数 1—2500册

ISBN 7-5614-0067-5/O·14 定价：4.35元

前 言

本书作者 A.M.OSTROWSKI (1893—1986) 是近代杰出的数学家，一生数学著作四千页左右，内容涉及代数学、解析学、函数方程式等领域。他在六十年代写的三本教科书：A.M.OSTROWSKI, Vorlesungen über Differential und Integralrechnung I, II, III. Birkhäuser, Basel, second edition (1960—1961), 至今仍被广泛使用。

本书是关于非线性方程与方程组解法的一本名著，由世界著名的“学术出版社(AP)”出版。五十年代，作者曾应邀在美国国家标准局(NBS)作过一次讲演，本书第一版由该讲演稿扩充而成。由于本书的价值，很快被译成俄文。译者是 L.S.Rumshiski 与 B.L.Rumshiski。在随后的十多年中，作者不断充实、提高、扩充本书的内容，又出了两版，这是第三版的译文。

本书叙述了种种实用的迭代解法，对著名的 Newton—Raphson 方法作了深刻的阐述与发展。作者巧妙地应用微积分、代数及泛函分析的基础知识对数值方法的原理与解法的收敛性作了精细的讨论，把“纯粹”数学与“实用”数学有机地联系了起来，很富启发性。我们用本书的部分内容作过教材，效果良好。对有志于方程解法的读者，本书也许能把他们带进一个新的境地。

本书自成系统，叙述深入浅出。一个问题常分为若干小段，每段附有标题，读起来条理清晰，难点分散，便于自学。

《随着计算机技术的迅猛发展，科学与工程计算已被推向人类科学活动的前沿，它的应用范围扩大到所有的学科领域，与实验、理论三足鼎立，相辅相成，成为人类科学活动的三大方法之一。世界发达国家和我国自身发展的历史经验表明，科学与工程计算是关系国家安全、经济发展和科技进步的重要环节，是关系到国家命脉的大事，它与我国四化建设有着广泛的紧密的联系，具有特殊的重要意义》(科技日报，87.7.4)。

实践表明，科学与工程计算的主要任务就是解方程——描述自然规律或社会规律的各种数学方程。我们相信，本书的中译本将对这个任务作出积极的贡献。

译者的分工如下：

黎 益(四川大学)：第三版序言摘要、目录、记号表与缩写表、第23—24、第31—42章、附录 U。

刘人丽(四川师范大学)：附录 A—T，文献注释，索引。

陶辅周(四川大学)：第1—7、第25—30章。

尚禄清(四川大学)：第8—22章。

审校：

陈绍仲(宁波大学)。

由于水平所限，译文不当之处，敬请指正。

北京大学徐献瑜教授一直关心、鼓励、支持本书的翻译工作，在此，谨向他致以衷心的感谢！

译 者

1987年10月·成都

世界上最实用的东西是好的理论

——H. Von. Helmholtz.

第三版序言摘要

本书第一版对有限方程组的处理方法，现在已经完全由 Banach 空间内方程的一般理论所代替。这版将叙述该理论的近代发展与成就，借以弥补前两版的不足。同时，正如我在第一版序言中所说，希望本书“在一定程度上能够作为‘纯粹’数学与‘实用’数学之间的桥梁”。

第二版的某些章节，在这版中，有的作了修改与扩充，有的删去，内容作了新的安排。在第二版中增加的均差一章，不完全令人满意，现已改写扩充为第一章(A)、(B)两部分。

第八章关于重根 Newton—Raphson 算法的 Schröder 修正，已改写。一方面是为附录 Q 的反馈法作准备，一方面是为了说明根的重数是未知的情况。为了给第四十一章与第四十二章讨论有限方程组作准备，在第二十三章与第二十四章增加了很多关于向量范数与矩阵范数的内容。新增加的第二十八章、第二十九章与第三十章，讨论了多项式方程解的一个自动恒收敛的方法。虽然，我们未对此方法给出一个计算的程序，但是，按照第三十章末的框图编制程序是不难的。

本书的最后部分，第三十一章至四十二章，探讨了 Banach 空间内方程的解法。在第三十一章至第三十六章，介绍了赋范线性空间与距离空间的理论。虽然，对这个专题已有一些优秀的论文，但在这个领域的专门术语还不完全统一，为了自成系统，作这样一个解释性的介绍是有益的。在第三十七章中，我们引入了一个包含 Euclid 空间内有限方程组的中心存在定理，用以代替第二版第二十四章的存在定理。

最后，在第三十八章至第四十章中，给出了 Banach 空间内带有最佳常数组的 Newton—Raphson 迭代法的完整理论。在第四十一章与第四十二章中，研究了这个一般理论对有限方程组的应用。

一些专门性的问题，在正文里讨论颇嫌繁琐，现整理成五个新的附录 Q—U。第二版的原十六个附录 A—P，除了对 A 中不正确的部分作了改写外，其余变动甚少。

A.M. OSTROWSKI

目 录

前言

第三版序言摘要

记号表与缩写表

第一章(A) 均差	(1)
关于互异自变量的均差	(1)
对称性	(2)
Hermite 积分表示法	(3)
平均值公式	(4)
第一章(B) 汇合均差、插值法	(7)
汇合均差	(7)
汇合均差的连续性	(8)
均差的各种公式	(9)
Newton 插值公式	(10)
一般插值问题	(12)
多项式插值	(13)
一般插值函数的余项	(13)
计算均差的三角形格式	(13)
第二章 反插值、反函数的导数、一个插值点	(15)
反插值的概念	(15)
关于导数值 $f'(x)$ 的 Darboux 定理	(16)
反函数的导数	(16)
一个插值点	(18)
$f(x)$ 的根的展开式	(20)
第三章 试位法	(22)
试位法的定义	(22)
反插值的使用	(23)
几何解释 (Fourier 条件)	(24)
具有逐次相邻点的迭代	(25)
Horner 单位及效率指数	(26)
舍入法则	(27)
用试位法确定零点的位置	(28)
用试位法计算的例子	(29)

第四章 迭代法	(31)
迭代法的收敛性判别准则	(31)
吸力点与斥力点	(31)
收敛性的改进	(33)
第五章 迭代法(续)、重根	(39)
利用单调迭代函数的迭代法	(39)
重根	(40)
迭代法理论与试位法的联系	(43)
第六章 Newton—Raphson 法	(44)
方法概述	(44)
反插值的使用	(44)
试位法与 Newton—Raphson 法的比较	(45)
第七章 Newton—Raphson 法的基本存在定理	(47)
先验误差估计与后验误差估计	(47)
基本存在定理	(47)
第八章 有重根时一种类似于 Newton—Raphson 法的方法	(52)
有重根时 Schröder 迭代的收敛性	(52)
先验误差估计	(54)
递推误差估计	(56)
精确重数的计算法	(57)
第九章 Newton—Raphson 法的 Fourier 界	(59)
第十章 Newton—Raphson 法的 Dandelin 界	(62)
第十一章 三个插值点	(67)
用线性分式插值	(67)
两个重合的插值点	(67)
误差估计	(68)
迭代过程中的应用	(70)
第十二章 线性差分方程	(72)
非齐次与齐次差分方程	(72)
齐次差分方程的通解	(72)
关于幂级数除法的引理	(73)
常系数线性差分方程解的渐近性质	(74)
试位法迭代中误差的渐近性质	(76)
关于一类代数方程的根的定理	(78)
第十三章 n 个不同的插值点	(80)
误差估计	(80)
具有 n 个不同插值点的迭代法	(81)
某些特殊方程的根的讨论	(82)
第十四章 $n+1$ 个重合的插值点及根的 Taylor 展式	(87)

问题的陈述	(87)
关于反函数与保角映射的一个定理	(87)
关于根的 Taylor 近似值的误差定理	(89)
定理14.2的条件的讨论	(90)
第十五章 平方根迭代法	(93)
仅具有单实零点的多项式	(93)
对重零点的修改	(95)
可微函数及复零点	(97)
第十六章 平方根迭代法(续)	(100)
局部收敛性和存在性定理	(100)
扩张到整函数	(104)
第十七章 插值多项式零点的一般定理	(107)
第十八章 用给定次数的代数方程来逼近方程。单根时的渐近误差	(111)
插值多项式零点的收敛性	(111)
单根时的渐近误差	(112)
第十九章 向量和矩阵的范数	(114)
向量范数	(114)
矩阵范数 $ A _1$ 与 $ A _\infty$	(115)
A的特征值	(117)
第二十章 关于矩阵乘积收敛性的两个定理	(121)
第二十一章 关于矩阵乘积发散性的一个定理	(123)
第二十二章 多变元迭代时吸力点与斥力点的特征	(127)
吸力点与斥力点	(127)
一个例子	(129)
第二十三章 Euclid 数范	(131)
Euclid 长度与 Frobenius 范数	(131)
Hermite 矩阵	(131)
矩阵的 Euclid 范数	(132)
第二十四章 Minkowski 范数, $\Delta_p(A)$, $\Delta_{p,p'}(A)$	(135)
Minkowski 范数	(135)
$ A _p$ 与 $ A _{p,p'}$	(135)
$\Delta_{p,p'}(A)$ 与 $\Delta_p(A)$	(136)
关于 $\Delta_{p,p'}(A)$ 的不等式	(138)
逆矩阵的变差	(139)
第二十五章 最速下降法(一)。过程的收敛性	(141)
方法概述	(141)
过程的收敛性	(143)
应用于 $ f(X + iY) ^2$	(144)
第二十六章 最速下降法(二)。 ξ_μ 的弱线性收敛性	(146)

ξ_μ 的导集	(146)
弱线性收敛性	(146)
关于函数 (25.3) 的正则极小值的条件	(148)
一元代数方程	(149)
第二十七章 最速下降法 (三). ξ_μ 的线性收敛性	(150)
严格线性收敛性的条件	(150)
一个例子	(152)
和 Newton—Raphson 方法的联系	(154)
第二十八章 多项式方程的收敛过程	(156)
方法的第一步	(156)
迭代过程的收敛性	(158)
转换到 Newton—Raphson 方法	(159)
Ω -检验	(160)
第二十九章 J-检验与 J-程序	(163)
基本定理	(163)
J -检验	(165)
J_m -程序	(166)
第三十章 q-加速方法的实践	(168)
q -加速的定义	(168)
基本引理	(168)
收敛性讨论	(170)
收敛速度	(171)
框图	(172)
第三十一章 赋范线性空间	(174)
线性空间	(174)
范数	(175)
收敛性	(175)
完备性与列紧性	(176)
几个例子	(177)
空间 $C^k(J)$	(177)
空间 $L_\alpha(G)$	(178)
第三十二章 距离空间	(179)
距离空间的定义	(179)
压缩算子原理	(180)
第三十三章 赋范线性空间内的算子	(183)
映射与算子	(183)
有界算子	(183)
线性算子	(184)
强收敛与弱收敛	(185)

第三十四章 逆算子	(187)
逆算子的定义.....	(187)
逆算子的存在性.....	(187)
另一个存在性定理.....	(188)
Banach 定理	(189)
第三十五章 映射直线区间的算子	(191)
Borel 复盖定理的加细	(191)
$H(t)$ 的 Lipschitz 条件	(192)
Taylor 展式	(194)
第三十六章 算子的方向导数与梯度	(197)
方向导数.....	(197)
Gateau 梯度.....	(198)
F 微分与 F 梯度.....	(199)
第三十七章 中心存在定理	(201)
中心存在定理的建立.....	(201)
一个局部存在定理.....	(201)
定理37.1的证明.....	(204)
第三十八章 Banach 空间内的 Newton—Raphson 迭代法. 定理的叙述	(206)
α_r 的定义.....	(206)
定理38.1—38.3的建立.....	(207)
一个引理.....	(209)
第三十九章 定理 38.1—38.3 的证明	(211)
另一个引理.....	(211)
对二次多项式的应用.....	(212)
定理38.1—38.3的证明.....	(213)
第四十章 Newton—Raphson 方法的补充	(217)
对二次多项式估值的等式.....	(217)
重根情形.....	(217)
唯一性定理.....	(218)
第四十一章 有限方程组的中心存在定理	(221)
中心存在定理的建立.....	(221)
范数的选取.....	(221)
唯一性定理.....	(222)
例.....	(223)
第四十二章 有限方程组的 Newton—Raphson 迭代法	(225)
定理的建立.....	(225)
范数的选取.....	(226)
对一个复变元的复函数的应用.....	(229)

附录 A	代数方程的根的连续性	(230)
附录 B	代数方程的根的相对连续性	(233)
附录 C	反函数的 n 阶导数的一个显式公式	(240)
附录 D	二元方程组的类似试位法	(243)
附录 E	Steffensen 对迭代法则的改进	(244)
附录 F	对于二次多项式的 Newton—Raphson 算法	(248)
附录 G	Newton—Raphson 方法的一些变形与改进	(252)
附录 H	反插值的舍入	(254)
附录 I	具有超线性收敛的加速迭代	(262)
附录 J	用 $1/f(z)$ 的展开式的系数表示 $f(z) \approx 0$ 的根	(265)
附录 K	特征根作为矩阵元素的函数的连续性	(273)
附录 L	均差的行列式公式	(274)
附录 M	插值公式的余项	(276)
附录 N	推广到重根情况的 Schröder 级数	(279)
附录 O	Laguerre 迭代法	(287)
附录 P	用给定次数的代数方程来逼近方程。重根的渐近误差	(295)
附录 Q	误差估计的反馈法	(303)
	一个数值例子	(307)
附录 R	多项式方程的简化形式	(307)
附录 S	q 加速的讨论	(310)
附录 T	解析函数 Taylor 展式的余项	(315)
附录 U	Newton—Raphson 迭代法的等式条件	(317)
	一个引理	(317)
	赋范空间的等式条件	(318)
	严格赋范空间的等式条件	(319)
文献注释		(324)
索引		(334)

第一章 (A) 均差

关于互异自变量的均差

1. 本书中, J_x 表示 x 轴上的一个区间. 它可以是开的, 闭的, 或半开半闭的. 以 (J) 表区间 J 的内部, 即, 不包含端点的区间 J . (J) 是一个开区间.

所使用的函数及变量不一定是实的. 如果是复变量, 并用到函数的导数时, 则假定在所考虑的点集上它们是**解析函数**. 在实数的情况, 讨论中所出现的导数, 假定是连续的, 如果不是这样, 就要明确的指出 (参看附录 M).

2. 对于在 $x = x_1$ 及 $x = x_2$ 有定义的任意函数 $f(x)$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 我们把符号 $[x_1, x_2]_x f$ 定义为

$$[x_1, x_2]_x f = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2). \quad (1A.1)$$

当 $x_1 = x_2$ 时, 只要 $f'(x_1)$ 存在, 此符号自然定义为

$$[x_1, x_2]_x f = f'(x)_{x=x_1} \quad (1A.2)$$

下标中的变量 x , 表示通用目标变量. 当 $f(x)$ 仅仅是单变量 x 的函数时, 这个下标就可省掉. 表示目标变量的字母也可以用其它字母来代替, 只要这个字母在函数 f 中作为不同变量还未出现过:

$$[x_1, x_2]f(x) = [x_1, x_2]_u f(u). \quad (1A.3)$$

若 $f(x)$ 不依赖于作为参变量的 x_1, x_2 , 则表达式 (1A.1) 是 x_1 与 x_2 的**对称函数**.

3. 若 x, x_1, x_2 互不相同, 只要 $f(x)$ 不依赖于 x_1 及 x_2 , 则两个算子 $[x_1, x]$ 及 $[x_2, x]$ 可换, 也就是说, 我们有

$$[x_1, x][x_2, x]f = [x_2, x][x_1, x]f. \quad (1A.4)$$

事实上, 可立即看出 (1A.4) 两端的共同值是

$$\frac{(x - x_1)f(x_2) + (x_1 - x_2)f(x) + (x_2 - x)f(x_1)}{(x - x_1)(x_1 - x_2)(x - x_2)},$$

且这显然是 x, x_1, x_2 的对称函数.

若 $x, x_1, \dots, x_m$ 互不相同, 令

$$[x_1, x][x_2, x] \cdots [x_m, x]f = :[x, x_1, \dots, x_m]_i f. \quad (1A.5)$$

称此为函数 $f(t)$ 的 (m 阶) 均差.

在建立 (1A.5) 时, 含有 $f(x)$ 的项, 在 $[x, x]$ 的作用下就是除以 $(x - x)$. 由此得出, (1A.5) 中含有 $f(x)$ 的项可以写为

$$f(x) / \prod_{\mu=1}^m (x - x_{\mu}) .$$

以下, 符号 $[x] f(u)$ 表示 $f(x)$.

对 称 性

4. 如果 $f(t)$ 不含有作为参变量的 $x, x_1, \dots, x_m$ 中的任何一个, 则由 (1A.4) 知, 表达式 (1A.5) 是 m 个自变量 $x_1, \dots, x_m$ 的对称函数. 我们来证明 (1A.5) 是所有 $m+1$ 个自变量的对称函数. 为此, 只要证明 x 与 x_1 交换时 (1A.5) 不改变就足够了. 令

$$[x_2, x] \cdots [x_m, x] f = g(x, x_2, \dots, x_m),$$

表达式 (1A.5) 就成为

$$[x_1, x] g(t, x_2, \dots, x_m),$$

由第 2 段, 这显然对 x, x_1 是对称的.

按照关于 (1A.5) 所已经谈及的, 现在从对称性可得一般性公式

$$[x_1, \dots, x_m] f = \sum_{\mu=1}^m f(x_{\mu}) \prod_{\nu \neq \mu} (x_{\mu} - x_{\nu}). \quad (1A.6)$$

(1A.5) 中 $[x, x_1, \dots, x_m]$, 对任意两个函数 f, g 及任意两个常数 a, b , 只要 $a[x, x_1, \dots, x_m] f + b[x, x_1, \dots, x_m] g$ 存在, 就有

$$[x, x_1, \dots, x_m] (af + bg) = a[x, x_1, \dots, x_m] f + b[x, x_1, \dots, x_m] g,$$

于是, $[x, x_1, \dots, x_m]$ 是一个线性算子.

(1A.5) 符号中的下标 t , 当 f 作为一元函数引入时, 可以略去. 有时, $[x, x_1, \dots, x_m] f$ 也记为 $f(x, x_1, \dots, x_m)$.

从 (1A.5) 右端表达式的对称性, 若把 x 同 x_k 交换, 以 $m-1$ 代替 m , 并相应地移动下标, 则可得以下公式

$$[x_1, \dots, x_m] f = [x_1, \dots, x_k]_{x_k} [x_k, \dots, x_m] f; \quad (1A.7)$$

更一般地, 我们可以写为

$$[x_1, \dots, x_m] f = [x_1, x_2, \dots, x_k]_u [u, x_{k+1}, \dots, x_m] f, \quad (1A.8)$$

其中, 目标变量 u 与 f 及 x_{μ} 都是无关的.

若有 k 组变量

$$x_1, \dots, x_{m_1+1}, y_1, \dots, y_{m_2+1}, \dots, z_1, \dots, z_{m_k+1}, \quad (1A.9)$$

那么, 重复 (1A.7), 有

$$\begin{aligned} & [x_1, \dots, z_{m_k+1}] f \\ &= [x_1, \dots, x_{m_1+1}]_x [y_1, \dots, y_{m_2+1}]_y \cdots [z_1, \dots, z_{m_k+1}]_z [x, y, \dots, z] f, \end{aligned} \quad (1A.10)$$

其中, 我们必须假定所有变量 $x_1, \dots, z_{m_k+1}$ 仍然是互异的.

5. 作为一个例子, 考虑 $f(x) = x^m$. 以 $p, q_1, \dots, q_m$ 表示非负整数, 可以递推地得出

$$[x_1, x]x^m = \frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x} = \sum x^p x_1^{q_1} \quad (p + q_1 = m - 1),$$

$$[x_2, x][x_1, x]x^m = \sum_{p+q_1=m-1} x_1^{q_1} [x_2, x]x^p = \sum x_1^{q_1} x^p x_2^{q_2} \quad (p + q_1 + q_2 = m - 2),$$

$$[x, x_{i-1}, \dots, x_1, x]x^m = \sum x^p x_1^{q_1} \dots x_i^{q_i} \quad (p + q_1 + \dots + q_i = m - i) \quad (1A.11)$$

$$[x_{m-1}, \dots, x_1, x]x^m = x_{m-1} + x_{m-2} + \dots + x_1 + x,$$

$$[x_m, x_{m-1}, \dots, x_1, x]x^m = 1, \quad [x_{m+1}, x_m, \dots, x_1, x]x^m = 0. \quad (1A.12)$$

对于次数 $\leq m$ 的多项式, 阶数 $> m$ 的均差为零.

HERMITE 积分表示法

6. 我们以 $\langle x, x_1, \dots, x_m \rangle$ 来表示含有一切 $x, x_v (v=1, \dots, m)$ 的最小凸多边形 (闭) 区域. 特别地, 在 x 及 x_v 都是实数时, $\langle x, x_1, \dots, x_m \rangle$ 便表示它们所在的相应闭区间. 若所有 $x, x_1, \dots, x_m$ 重合, 则不论实数或复数的情况, 都成为一点. 若 x, x_v 全是实数, 我们假设 $f^{(n)}(t)$ 在 $\langle x, x_1, \dots, x_m \rangle$ 内连续; 若不全为实数, 则设 $f^{(n)}(t)$ 在 $\langle x, x_1, \dots, x_m \rangle$ 内解析, 我们显然有

$$[x_1, x_2]f = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f'(t) dt.$$

按 $t = (1 - t_1)x_1 + t_1x_2$ 引入新积分变量 t_1 , $dt = (x_2 - x_1)dt_1$, 并以 x 代替 x_2 , 我们得到一阶均差的积分表示

$$[x_1, x]f = \int_0^1 f'[(1 - t_1)x_1 + t_1x] dt_1.$$

类似地, 把算子 $[x_2, x]$ 作用在上式的两端, 并在积分号下求导数, 我们得到二阶均差的积分表示

$$[x_2, x_1, x]f = \int_0^1 dt_1 \int_0^1 t_1 f''[(1 - t_1)x_1 + t_1(1 - \tau_2)x_2 + t_1\tau_2x] d\tau_2,$$

在内层积分引入新积分变量 $t_2 = t_1\tau_2$, $dt_2 = t_1 d\tau_2$, 则得

$$[x_2, x_1, x]f = \int_0^1 \int_0^{t_1} f''[(1 - t_1)x_1 + (t_1 - t_2)x_2 + t_2x] dt_2 dt_1.$$

7. 同样地进行讨论, 我们得到

$$[x_m, \dots, x_1, x]f = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{m-1}} f^{(m)}[(1 - t_1)x_1 + (t_1 - t_2)x_2 + \dots + (t_{m-1} - t_m)x_m + t_mx] dt_m \dots dt_1, \quad (1A.13)$$

此公式可用归纳法直接验证.

对于 $f = x^m/m!$, 由 (1A.12) 知 (1A.13) 左端为 $1/m!$ 并且 $f^{(n)} \equiv 1$.

我们便有

$$\int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{m-1}} dt_m \cdots dt_1 = \frac{1}{m!}. \quad (1A.14)$$

可以看出, (1A.13) 中 $f^{(m)}$ 的变元的所有系数 $1-t_1, t_1-t_2, \dots, t_{m-1}-t_m, t_m$ 都非负。由此可知, 不论对实数或复数的情况,

$(1-t_1)x_1 + (t_1-t_2)x_2 + \cdots + (t_{m-1}-t_m)x_m + t_mx$ 均在 $\langle x, x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$ 之中。

平均值公式

8. 先假定 x 及所有 x_i 都是实数, 并把 $f^{(m)}(t)$ 在 $\langle x, x_1, \dots, x_m \rangle$ 内的极大值与极小值分别记为 Ω 与 ω 。那么, 以常数 Ω 及 ω 代替 (1A.13) 中的 $f^{(m)}$, 例如, 以 $\Omega x^m/m!$ 及 $\omega x^m/m!$ 代替 f , 我们得到式 (1A.13) 的一个上界和一个下界。可以看出, (1A.13) 是被包含在 $\Omega/m!$ 与 $\omega/m!$ 之间。因此, 在 $f^{(m)}$ 连续的假设下, 我们有

$$[x_m, \dots, x_1, x] f = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}, \quad \xi \in \langle x, x_1, \dots, x_m \rangle. \quad (1A.15)$$

若 x, x_i 不全是实数, 设 $f^{(m)}$ 的模在 $\langle x, x_1, \dots, x_m \rangle$ 中的点 ξ 处达到极大, 那么, (1A.13) 的模就

$$\leq \frac{|f^{(m)}(\xi)|}{m!},$$

于是, 我们有

$$[x_m, \dots, x_1, x] f = \theta \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}, \quad |\theta| \leq 1, \quad \xi \in \langle x, x_1, \dots, x_m \rangle \quad (1A.16)$$

9. 在复数情况下并且也在实数情况下, 若 $f^{(m+1)}(x)$ 在 $\langle x, x_1, \dots, x_m \rangle$ 内连续, 我们可以得到一个较好的结果。令

$$M_{m+1} = \max |f^{(m+1)}(t)| \quad (t \in \langle x, x_1, \dots, x_m \rangle).$$

以 ζ 表示 $\langle x, x_1, \dots, x_m \rangle$ 中任取的一点, 从 (1A.13) 两端减去 $f^{(m)}(\zeta)/m!$, 并利用 (1A.14), 则我们有

$$[x_m, \dots, x_1, x] f - \frac{f^{(m)}(\zeta)}{m!} = \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{m-1}} F(t_1, \dots, t_m) dt_m \cdots dt_1,$$

$$F(t_1, \dots, t_m) = f^{(m)}[(1-t_1)x_1 + \cdots + (t_{m-1}-t_m)x_m + t_mx] - f^{(m)}(\zeta).$$

另一方面, 若 D 是 $\langle x, x_1, \dots, x_m \rangle$ 中的两点间的最大距离 ($\langle x, x_1, \dots, x_m \rangle$ 的直径), 我们有 $|F(t_1, \dots, t_m)| \leq DM_{m+1}$, 且因此

$$\left| \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{m-1}} F(t_1, \dots, t_m) dt_m \cdots dt_1 \right| \leq \frac{DM_{m+1}}{m!},$$

$$[x_m, \dots, x_1, x]f = \frac{f^{(m)}(\zeta)}{m!} + \theta D \frac{M_{m+1}}{m!}, \quad |\theta| \leq 1. \quad (1A.17)$$

10. 为了推广 (1A.13), 必须把它写得紧凑些, 我们引入几个方便的记号. 在公式 (1A.13) 中, 有一个算子, 可以写为

$$J_{m_1}(t) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{m_1-1}} dt_{m_1}, \quad (1A.18)$$

它还必须应用于 $t_1, \dots, t_{m_1}$ 的函数, 此函数在相应的 m_1 维区域内连续. 同样意义下, 以下一些符号不言而喻

$$J_{m_2}(u), \dots, J_{m_k}(v).$$

其次, 若 $x_1, \dots, x_{m_1+1}$ 是给定的, 我们记

$$X_t = (1-t_1)x_1 + (t_1-t_2)x_2 + \dots + (t_{m_1-1}-t_{m_1})x_{m_1} + t_{m_1}x_{m_1+1}. \quad (1A.19)$$

以下的符号, 也是意义相同的

$$Y_u, Z_v, \dots$$

11. 公式 (1A.13) 显然可以写为

$$[x_1, \dots, x_{m_1+1}]_x f(x) = J_{m_1}(t) f^{(m_1)}(X_t) \quad (1A.20)$$

现在考虑 k 个变量 $x, y, \dots, z$ 的一个函数, 记为 $F(x, y, \dots, z)$, 并设其导数 $D_x^{m_1} D_y^{m_2} \dots D_z^{m_k} F(x, y, \dots, z)$ 存在, 此导数在以下区域是连续的: x 遍及于 $U(x) = \langle x_1, \dots, x_{m_1+1} \rangle$, y 遍及于 $U(y) = \langle y_1, \dots, y_{m_2+1} \rangle$, $\dots$, z 遍及于 $U(z) = \langle z_1, \dots, z_{m_k+1} \rangle$. 那么, 重复应用 (1A.20), 并令

$$\Omega = [x_1, \dots, x_{m_1+1}]_x [y_1, \dots, y_{m_2+1}]_y \dots [z_1, \dots, z_{m_k+1}]_z F(x, y, \dots, z), \quad (1A.21)$$

可得

$$\Omega = J_{m_1}(t) J_{m_2}(u) \dots J_{m_k}(v) D_{X_t}^{m_1} D_{Y_u}^{m_2} \dots D_{Z_v}^{m_k} F(X_t, Y_u, \dots, Z_v). \quad (1A.22)$$

在此公式中, 我们自然必须假设所有变量 $x_1, \dots, x_{m_1+1}, y_1, \dots, y_{m_2+1}, \dots, z_1, \dots, z_{m_k+1}$ 互不相等.

对函数 x^n 应用公式 (1A.20). 对此

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] x^n \equiv 1,$$

我们得到

$$(x^n)^{(n)} = n!, \quad J_n(t) 1 = \frac{1}{n!}. \quad (1A.23)$$

12. 对公式 (1A.10) 应用 (1A.21) 及 (1A.22), 并且用 $[x, y, \dots, z]f$ 代替 $F(x, y, \dots, z)$, 我们最后得到

$$[x_1, \dots, x_{m_1+1}, y_1, \dots, y_{m_2+1}, \dots, z_1, \dots, z_{m_k+1}] f$$

$$= J_{m_1}(l) J_{m_2}(u) \cdots J_{m_k}(v) D_{x_l}^{m_1} D_{y_u}^{m_2} \cdots D_{z_v}^{m_k} [X_l, Y_u, \cdots, Z_v] f. \quad (1A.24)$$

在这个公式中，我们仍假设所有变量 $x_1, \cdots, z_{m_k+1}$ 是互不相等的。

至于 F 的可微性条件，由(1A.6)可知 $[X_l, Y_u, \cdots, Z_v]f$ 是 $f(X_l), f(Y_u), \cdots, f(Z_v)$ 的线性组合，这个组合的系数是 $X_l, Y_u, \cdots, Z_v$ 的有理函数。所以，若 $D_{x_l}^{m_1} f$ 在 $U(x)$ 内连续， $D_{y_u}^{m_2} f$ 在 $U(y)$ 内连续， $\cdots$ ， $D_{z_v}^{m_k} f$ 在 $U(z)$ 内连续，我们的可微性条件便满足。可以看到，表示式 (1A.24) 所含 f 的导数阶数，低于 Hermite 积分公式中的导数阶数。

若所有变量 $x_1, \cdots, z_{m_k+1}$ 及 $f(x)$ 都是实的，则从(1A.24)及 (1A.23)立即可得平均值公式

$$[x_1, \cdots, x_{m_1+1}, \cdots, z_1, \cdots, z_{m_k+1}] f = \frac{1}{m_1! m_2! \cdots m_k!} D_{\xi}^{m_1} D_{\eta}^{m_2} \cdots D_{\zeta}^{m_k} [\xi, \eta, \cdots, \zeta] f, \quad (1A.25)$$

$$\xi \in U(x), \eta \in U(y), \cdots, \zeta \in U(z),$$

对于复变量的一般情况，我们有估值

$$|[x_1, \cdots, z_{m_k+1}] f| \leq \frac{1}{m_1! m_2! \cdots m_k!} \text{Max} |D_{\xi}^{m_1} D_{\eta}^{m_2} \cdots D_{\zeta}^{m_k} [\xi, \eta, \cdots, \zeta] f|, \quad (1A.26)$$

其中的极大值，是当 ξ 遍及 $U(x)$ ， η 遍及 $U(y)$ ， $\cdots$ ， ζ 遍及 $U(z)$ 时所取得的。

上述公式中，对于略去 n 阶导数连续的可能性，可见附录 M。