欧几里得和

巴拿赫空间内

方程的解法

● A. M. ostrowski 著

● 黎 益 等译

四川大学出版社

欧儿里得和巴拿赫空间内方程的解法

A. M. 奥斯特洛夫斯基 著

黎 益 刘人丽
陶辅周 尚禄清 译

陈绍仲 校

四 川 大 学 出 版 社

1988年·成都

内 容 简 介

本书介紹了非綫性方程和方程組解法的基本理論与成果。内容可分为三部分，一是本书需要的分析、代数及泛函基础知識，二是方法的叙述（插值法、試位法、一般迭代法、平方根法、最速下降法、Newton—Raphson 法、…），三是专题研究（見13个附录）。本书注重理論与实用結合，內容精炼明晰，叙述由浅入深，自成系統，便于自学。

本书可作为計算数学、数学及大专院校有关专业学生的教材，也是有关专业的教师、研究生、高年级学生、从事計算机应用的科技工作者及工程技术人員的有益参考书。

责任编辑　陈昭麟

A.M.OSTROWSKI

SOLUTION OF EQUATIONS IN EUCLIDEAN AND BANACH SPACES

(Third Edition) ACADEMIC PRESS, 1973

欧几里得和巴拿赫空间内方程的解法

*A.M.*奥斯特洛夫斯基　著

黎　益　刘人丽
陶辅周　尚禄清　译

陈绍仲　校

四川大学出版社出版发行（成都四川大学内）

四川省新华书店发行　　四川大学印刷厂印刷

开本787×1092　1/16　印张　22.125　字数　522千

1988年9月第一版　1988年9月第一次印刷

印数　1—2500册

ISBN 7—5614—0067—5/O·14　定价：4.35元

前　　言

本书作者 A.M.OSTROWSKI (1893—1986) 是近代杰出的数学家，一生数学著作四千页左右，内容涉及代数学、解析学、函数方程式等领域。他在六十年代写的三本教科书：A.M.OSTROWSKI, Vorlesungen über Differential und Integralrechnung I, Ⅱ，Ⅲ. Birkhäuser, Basel, second edition (1960—1961)，至今仍被广泛使用。

本书是关于非线性方程与方程组解法的一本名著，由世界著名的"学术出版社(AP)"出版。五十年代，作者曾应邀在美国国家标准局（NBS）作过一次讲演，本书第一版由该讲演稿扩充而成。由于本书的价值，很快被译成俄文。译者是 L.S.Rumshiski 与 B.L.Rumshiski。在随后的十多年中，作者不断充实、提高、扩充本书的内容，又出了两版，这是第三版的译文。

本书叙述了种种实用的迭代解法，对著名的 Newton—Raphson 方法作了深刻的阐述与发展。作者巧妙地应用微积分、代数及泛函分析的基础知识对数值方法的原理与解法的收敛性作了精细的讨论，把"纯粹"数学与"实用"数学有机地联系了起来，很富启发性。我们用本书的部分内容作过教材，效果良好。对有志于方程解法的读者，本书也许能把他们带进一个新的境地。

本书自成系统，叙述深入浅出。一个问题常分为若干小段，每段附有标题，读起来条理清晰，难点分散，便于自学。

《随着计算机技术的迅猛发展，科学与工程计算已被推向人类科学活动的前沿，它的应用范围扩大到所有的学科领域，与实验、理论三足鼎立，相辅相成，成为人类科学活动的三大方法之一。世界发达国家和我国自身发展的历史经验表明，科学与工程计算是关系国家安全、经济发展和科技进步的重要环节，是关系到国家命脉的大事，它与我国四化建设有着广泛的紧密的联系，具有特殊的重要意义》（科技日报，87.7.4）。

实践表明，科学与工程计算的主要任务就是解方程——描述自然规律或社会规律的各种数学方程。我们相信，本书的中译本将对这个任务作出积极的贡献。

译者的分工如下：

黎　益（四川大学）：第三版序言摘要、目录、记号表与缩写表、第23—24、第31—42章、附录 U。

刘人丽（四川师范大学）：附录 A—T，文献注释，索引。

陶辅周（四川大学）：第1—7、第25—30章。

尚禄清（四川大学）：第8—22章。

审校：

陈绍仲（宁波大学）。

由于水平所限，译文不当之处，敬请指正。

北京大学徐献瑜教授一直关心、鼓励、支持本书的翻译工作，在此，谨向他致以衷心的谢意！

译　者

1987年10月·成都

世界上最实用的东西是好的理论

——H. Von. Helmholtz.

第三版序言摘要

本书第一版对有限方程组的处理方法，现在已经完全由 Banach 空间内方程的一般理论所代替。这版将叙述该理论的近代发展与成就，借以弥补前两版的不足。同时，正如我在第一版序言中所说，希望本书“在一定程度上能够作为‘纯粹’数学与‘实用’数学之间的桥梁”。

第二版的某些章节，在这版中，有的作了修改与扩充，有的删去，内容作了新的安排。在第二版中增加的均差一章，不完全令人满意，现已改写扩充为第一章(A)、(B)两部分。

第八章关于重根 Newton—Raphson 算法的 Schröder 修正，已改写。一方面是为附录 Q 的反馈法作准备，一方面是为了说明根的重数是未知的情况。为了给第四十一章与第四十二章讨论有限方程组作准备，在第二十三章与第二十四章增加了很多关于向量范数与矩阵范数的内容。新增加的第二十八章、第二十九章与第三十章，讨论了多项式方程解的一个自动恒收敛的方法。虽然，我们未对此方法给出一个计算的程序，但是，按照第三十章末的框图编制程序是不难的。

本书的最后部分，第三十一章至四十二章，探讨了 Banach 空间内方程的解法。在第三十一章至第三十六章，介绍了赋范线性空间与矩离空间的理论。虽然，对这个专题已有一些优秀的论文，但在这个领域的专门术语还不完全统一，为了自成系统，作这样一个解释性的介绍是有益的。在第三十七章中，我们引入了一个包含 Euclid 空间内有限方程组的中心存在定理，用以代替第二版第二十四章的存在定理。

最后，在第三十八章至第四十章中，给出了 Banach 空间内带有最佳常数组的 Newton—Raphson 迭代法的完整理论。在第四十一章与第四十二章中，研究了这个一般理论对有限方程组的应用。

一些专门性的问题，在正文里讨论颇嫌繁琐，现整理成五个新的附录 Q—U。第二版的原十六个附录 A—P，除了对 A 中不正确的部分作了改写外，其余变动甚少。

A. M. OSTROWSKI

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 (A) 均差

关于互异自变量的均差

1. 本书中，J_x 表示 x 轴上的一个区间．它可以是开的，闭的，或半开半闭的．以 (J) 表区间 J 的**内部**，即，不包含端点的区间 J．(J) 是一个开区间．

所使用的函数及变量不一定是实的．如果是复变量，并用到函数的导数时，则假定在所考虑的点集上它们是**解析函数**．在实数的情况，讨论中所出现的导数，假定是连续的，如果不是这样，就要明确的指出（参看附录 M）．

2. 对于在 $x=x_1$ 及 $x=x_2$ 有定义的任意函数 $f(x)$，当 $x_1 \neq x_2$ 时，我们把符号 $[x_1,x_2]_x f$ 定义为

$$[x_1,x_2]_x f := \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad (x_1 \neq x_2). \tag{1A.1}$$

当 $x_1=x_2$ 时，只要 $f'(x_1)$ 存在，此符号自然定义为

$$[x_1,x_2]_x f := f'(x)_{x=x_1} \tag{1A.2}$$

下标中的变量 x，表示通用目标变量．当 $f(x)$ 仅仅是单变量 x 的函数时，这个下标就可省掉．表示目标变量的字母也可以用其它字母来代替，只要这个字母在函数 f 中作为不同变量还未出现过：

$$[x_1,x_2]f(x) = [x_1,x_2]_u f(u). \tag{1A.3}$$

若 $f(x)$ 不依赖于作为参变量的 x_1,x_2，则表达式 (1A.1) 是 x_1 与 x_2 的**对称函数**．

3. 若 x,x_1,x_2 互不相同，只要 $f(x)$ 不依赖于 x_1 及 x_2，则两个算子 $[x_1,x]$ 及 $[x_2,x]$ **可换**，也就是说，我们有

$$[x_1,x][x_2,x]f = [x_2,x][x_1,x]f. \tag{1A.4}$$

事实上，可立即看出(1A.4)两端的共同值是

$$\frac{(x-x_1)f(x_2)+(x_1-x_2)f(x)+(x_2-x)f(x_1)}{(x-x_1)(x_1-x_2)(x-x_2)},$$

且这显然是 x,x_1,x_2 的对称函数．

若 $x,x_1,\cdots,x_m$ 互不相同，令

$$[x_1,x][x_2,x]\cdots[x_m,x]_t f =: [x,x_1,\cdots,x_m]_t f. \tag{1A.5}$$

称此为函数 $f(t)$ 的（m 阶）均差．

在建立(1A.5)时，含有 $f(x)$ 的项，在 $[x_\nu,x]$ 的作用下就是除以 $(x-x_\nu)$．由此得出，(1A.5)中含有 $f(x)$ 的项可以写为

$$f(x)\Big/\prod_{\mu=1}^{m}(x-x_\mu).$$

以下，符号 $[x]f(u)$ 表示 $f(x)$.

对　称　性

4. 如果 $f(t)$ 不含有作为参变量的 $x,x_1,\cdots,x_m$ 中的任何一个，则由 (1A.4) 知，表达式 (1A.5) 是 m 个自变量 $x_1,\cdots,x_m$ 的对称函数. **我们来证明 (1A.5) 是所有 $m+1$ 个自变量的对称函数**. 为此，只要证明 x 与 x_1 交换时 (1A.5) 不改变就足够了. 令

$$[x_2,x]\cdots[x_m,x]_tf=g(x,x_2,\cdots,x_m),$$

表达式(1A.5)就成为

$$[x_1,x]g(t,x_2,\cdots x_m),$$

由第 2 段，这显然对 x,x_1 是对称的.

按照关于 (1A.5) 所已经谈及的，现在从对称性可得一般性公式

$$[x_1,\cdots,x_m]f=\sum_{\mu=1}^{m}f(x_\mu)\quad\prod_{\nu\neq\mu}(x_\mu-x_\nu).\tag{1A.6}$$

(1A.5)中 $[x,x_1,\cdots,x_m]$，对任意两个函数 f,g 及任意两个常数 a,b，只要 $a[x,x_1,\cdots,x_m]f+b[x,x_1,\cdots,x_m]g$ 存在，就有

$$[x,x_1,\cdots,x_m](af+bg)=a[x,x_1,\cdots,x_m]f+b[x,x_1,\cdots,x_m]g,$$

于是，$[x,x_1,\cdots,x_m]$ 是一个**线性算子**.

(1A.5)符号中的下标 t，当 f 作为一元函数引入时，可以略去. 有时，$[x,x_1,\cdots,x_m]f$ 也记为 $f(x,x_1,\cdots,x_m)$.

从(1A.5)右端表达式的对称性，若把 x 同 x_k 交换，以 $m-1$ 代替 m，并相应地移动下标，则可得以下公式

$$[x_1,\cdots,x_m]f=[x_1,\cdots,x_k]_{x_k}[x_k,\cdots,x_m]f;\tag{1A.7}$$

更一般地，我们可以写为

$$[x_1,\cdots x_m]f=[x_1,x_2,\cdots x_k]_u[u,x_{k+1},\cdots x_m]f,\tag{1A.8}$$

其中，目标变量 u 与 f 及 x_μ 都是无关的.

若有 k 组变量

$$x_1,\cdots,x_{m_1+1},y_1,\cdots,y_{m_2+1},\cdots,z_1,\cdots,z_{m_k+1},\tag{1A.9}$$

那么，重复(1A.7)，有

$$\begin{aligned}&[x_1,\cdots,z_{m_k+1}]f\\&=[x_1,\cdots,x_{m_1+1}]_x[y_1,\cdots,y_{m_2+1}]_y\cdots[z_1,\cdots,z_{m_k+1}]_z[x,y,\cdots,z]f,\end{aligned}\tag{1A.10}$$

其中，我们必须假定所有变量 $x_1,\cdots,z_{m_k+1}$ 仍然是互异的.

5. 作为一个例子，考虑 $f(x)=x^m$. 以 $p,q_1,\cdots,q_m$ 表示非负整数，可以递推地得出

$$[x_1,x]x^m=\frac{x_1{}^m-x^m}{x_1-x}=\sum x^p x_1{}^{q_1}\qquad (p+q_1=m-1),$$

$$[x_2,x][x_1,x]x^m=\sum_{p+q_1=m-1} x_1{}^{q_1}[x_2,x]x^p=\sum x_1{}^{q_1}x^p x_2{}^{q_2}\qquad (p+q_1+q_2=m-2),$$

$$[x_k,x_{k-1},\cdots,x_1,x]x^m=\sum x^p x_1{}^{q_1}\cdots x_k{}^{q_k}\qquad (p+q_1+\cdots+q_k=m-k)\tag{1A.11}$$

$$[x_{m-1},\cdots,x_1,x]x^m=x_{m-1}+x_{m-2}+\cdots+x_1+x\ ,$$

$$[x_m,x_{m-1},\cdots,x_1,x]x^m=1,\ [x_{m+1},x_m,\cdots,x_1,x]x^m=0\ .\tag{1A.12}$$

对于次数 $\leqslant m$ 的多项式，阶数 $>m$ 的均差为零。

HERMITE 积分表示法

6. 我们以 $\langle x,x_1,\cdots,x_m\rangle$ 来表示含有一切 $x,x_\nu(\nu=1,\cdots,m)$ 的最小凸多边形（闭）区域。特别地，在 x 及 x_ν 都是实数时，$\langle x,x_1,\cdots,x_m\rangle$ 便表示它们所在的相应闭区间。若所有 $x,x_1,\cdots,x_m$ 重合，则不论实数或复数的情况，都成为一点。若 x,x_ν 全是实数，我们假设 $f^{(m)}(t)$ 在 $\langle x,x_1,\cdots,x_m\rangle$ 内连续；若不全为实数，则设 $f^{(m)}(t)$ 在 $\langle x,x_1,\cdots,x_m\rangle$ 内解析，我们显然有

$$[x_1,x_2]f=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f'(t)dt\ .$$

按 $t=(1-t_1)x_1+t_1x_2$ 引入新积分变量 t_1 ，$dt=(x_2-x_1)dt_1$ ，并以 x 代替 x_2 ，我们得到一阶均差的积分表示

$$[x_1,x]f=\int_0^1 f'[(1-t_1)x_1+t_1x]dt_1\ .$$

类似地，把算子 $[x_2,x]$ 作用在上式的两端，并在积分号下求导数，我们得到二阶均差的积分表示

$$[x_2,x_1,x]f=\int_0^1 dt_1\int_0^1 t_1f''[(1-t_1)x_1+t_1(1-\tau_2)x_2+t_1\tau_2x]d\tau_2\ ;$$

在内层积分引入新积分变量 $t_2=t_1\tau_2$ ，$dt_2=t_1d\tau_2$ ，则得

$$[x_2,x_1,x]=\int_0^1\int_0^{t_1}f''[(1-t_1)x_1+(t_1-t_2)x_2+t_2x]dt_2dt_1\ .$$

7. 同样地进行讨论，我们得到

$$[x_m,\cdots,x_1,x]\,f=\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{m-1}}f^{(m)}[(1-t_1)x_1+(t_1-t_2)x_2+\cdots$$
$$+(t_{m-1}-t_m)x_m+t_mx]dt_m\cdots dt_1\ ,\tag{1A.13}$$

此公式可用归纳法直接验证。

对于 $f=x^m/m!$ ，由(1A.12)知(1A.13)左端为 $1/m!$ 并且 $f^{(m)}\equiv1$.

我们便有

$$\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{m-1}} dt_m\cdots dt_1=\frac{1}{m!}\,. \tag{1A.14}$$

可以看出，(1A.13)中 $f^{(m)}$ 的变元的所有系数 $1-t_1$，t_1-t_2，$\cdots$，$t_{m-1}-t_m$，t_m 都非负。由此可知，不论对实数或复数的情况，

$$(1-t_1)x_1+(t_1-t_2)x_2+\cdots+(t_{m-1}-t_m)x_m+t_m x$$

均在 $\langle x,x_1,x_2,\cdots x_m\rangle$ 之中。

平均值公式

8. 先假定 x 及所有 x_ν 都是**实数**，并把 $f^{(m)}(t)$ 在 $\langle x,x_1,\cdots,x_m\rangle$ 内的极大值与极小值分别记为 Ω 与 ω 。那么，以常数 Ω 及 ω 代替(1A.13)中的 $f^{(m)}$，例如，以 $\Omega x^m/m!$ 及 $\omega x^m/m!$ 代替 f，我们得到式(1A.13)的一个上界和一个下界。可以看出，(1A.13)是被包含在 $\Omega/m!$ 与 $\omega/m!$ 之间。因此，在 $f^{(m)}$ 连续的假设下，我们有

$$[x_m,\cdots,x_1,x]\,f=\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!},\quad \xi\in\ \langle x,x_1,\cdots,x_m\rangle\ . \tag{1A.15}$$

若 x,x_ν 不全是实数，设 $f^{(m)}$ 的模在 $\langle x,x_1,\cdots,x_m\rangle$ 中的点 ξ 处达到极大，那么，(1A.13)的模就

$$\leqslant\frac{|f^{(m)}(\xi)|}{m!}\,,$$

于是，我们有

$$[x_m,\cdots,x_1,x]f=\theta\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!},\quad |\theta|\leqslant 1,\ \ \xi\in\langle x,x_1,\cdots,x_m\rangle \tag{1A.16}$$

9. 在复数情况下并且也在实数情况下，若 $f^{(m+1)}(x)$ 在 $\langle x,x_1,\cdots x_m\rangle$ 内连续，我们可以得到一个较好的结果。令

$$M_{m+1}=\max|f^{(m+1)}(t)|\qquad (t\in\langle x,x_1,\cdots,x_m\rangle).$$

以 ζ 表示 $\langle x,x_1,\cdots,x_m\rangle$ 中任取的一点，从 (1A.13) 两端减去 $f^{(m)}(\zeta)/m!$，并利用(1A.14)，则我们有

$$[x_m,\cdots,x_1,x]f-\frac{f^{(m)}(\zeta)}{m!}=\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{m-1}}F(t_1,\cdots,t_m)dt_m\cdots dt_1\,,$$

$$F(t_1,\cdots,t_m)=f^{(m)}[(1-t_1)x_1+\cdots+(t_{m-1}-t_m)x_m+t_m x]-f^{(m)}(\zeta).$$

另一方面，若 D 是 $\langle x,x_1,\cdots,x_m\rangle$ 中的两点间的最大距离($\langle x,x_1,\cdots,x_m\rangle$ 的**直径**)，我们有 $|F(t_1,\cdots,t_m)|\leqslant DM_{m+1}$，且因此

$$\left|\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{m-1}}F(t_1,\cdots,t_m)dt_m\cdots dt_1\right|\leqslant\frac{DM_{m+1}}{m!}\,,$$

$$[x_m,\cdots x_1,x]f=\frac{f^{(m)}(\zeta)}{m!}+\theta D\frac{M_{m+1}}{m!}, \quad |\theta|\leqslant 1 . \tag{1A.17}$$

10. 为了推广（1A.13），必须把它写得紧凑些，我们引入几个方便的记号．在公式（1A.13）中，有一个算子，可以写为

$$J_{m_1}(t):=\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_{m_1-1}}dt_{m_1}, \tag{1A.18}$$

它还必须应用于 $t_1,\cdots,t_{m_1}$ 的函数，此函数在相应的 m_1 维区域内连续．同样意义下，以下一些符号不言而喻

$$J_{m_2}(u),\cdots,J_{m_k}(v) .$$

其次，若 $x_1,\cdots,x_{m_1+1}$ 是给定的，我们记

$$X_t:=(1-t_1)x_1+(t_1-t_2)x_2+\cdots+(t_{m_1-1}-t_{m_1})x_{m_1}+t_{m_1}x_{m_1+1} . \tag{1A.19}$$

以下的符号，也是意义相同的

$$Y_u, Z_v, \cdots .$$

11. 公式（1A.13）显然可以写为

$$[x_1,\cdots,x_{m_1+1}]_x f(x)=J_{m_1}(t)f^{(m_1)}(X_t) \tag{1A.20}$$

现在考虑 k 个变量 $x,y,\cdots,z$ 的一个函数，记为 $F(x,y,\cdots,z)$，并设其导数 $D_x^{m_1}D_y^{m_2}\cdots D_z^{m_k}F(x,y,\cdots z)$ 存在，此导数在以下区域是连续的：x 遍及于 $U(x):=\langle x_1,\cdots,x_{m_1+1}\rangle$，$y$ 遍及于 $U(y):=\langle y_1,\cdots,y_{m_2+1}\rangle$，$\cdots$，$z$ 遍及于 $U(z):=\langle z_1,\cdots,z_{m_k+1}\rangle$．那么，重复应用（1A.20）），并令

$$\Omega:=[x_1,\cdots,x_{m_1+1}]_x[y_1,\cdots,y_{m_2+1}]_y\cdots[z_1,\cdots,z_{m_k+1}]_z F(x,y,\cdots,z), \tag{1A.21}$$

可得

$$\Omega:=J_{m_1}(t)J_{m_2}(u)\cdots J_{m_k}(v)D_{X_t}^{m_1}D_{Y_u}^{m_2}\cdots D_{Z_v}^{m_k}F(X_t,Y_u,\cdots,Z_v). \tag{1A.22}$$

在此公式中，我们自然必须假设所有变量 $x_1,\cdots,x_{m_1+1},y_1,\cdots,y_{m_2+1},\cdots,z_1,\cdots,z_{m_k+1}$ 互不相等．

对函数 x^n 应用公式（1A.20）。对此

$$[x_1,\cdots,x_{n+1}]x^n\equiv 1 ,$$

我们得到

$$(x^n)^{(n)}=n!, \quad J_n(t)1=\frac{1}{n!} . \tag{1A.23}$$

12. 对公式（1A.10）应用（1A.21）及（1A.22），并且用 $[x,y,\cdots,z]f$ 代替 $F(x,y,\cdots,z)$，我们最后得到

$$[x_1,\cdots x_{m_1+1},y_1,\cdots,y_{m_2+1},\cdots,z_1,\cdots,z_{m_k+1}]f$$

$$=J_{m_1}(t)J_{m_2}(u)\cdots J_{m_k}(v)D_{X_t}^{m_1}D_{Y_u}^{m_2}\cdots D_{Z_v}^{m_k}[X_t,Y_u,\cdots Z_v]f. \quad (1A.24)$$

在这个公式中，我们仍假设所有变量 $x_1,\cdots,z_{m_k+1}$ 是**互不相等的**.

至于 F 的可微性条件，由(1A.6)可知 $[X_t,Y_u,\cdots,Z_v]f$ 是 $f(X_t),f(Y_u),\cdots,f(Z_v)$ 的线性组合，这个组合的系数是 $X_t,Y_u,\cdots,Z_v$ 的有理函数。所以，若 $D_x^{m_1}f$ 在 $U(x)$ 内连续，$D_y^{m_2}f$ 在 $U(y)$ 内连续，…，$D_z^{m_k}f$ 在 $U(z)$ 内连续，我们的可微性条件便满足。可以看到，表示式（1A.24）所含 f 的导数阶数，**低于** Hermite 积分公式中的**导数阶数**.

若所有变量 $x_1,\cdots,z_{m_k+1}$ 及 $f(x)$ 都是实的，则从(1A.24)及（1A.23)立即可得**平均值公式**

$$[x_1,\cdots,x_{m_1+1},\cdots,z_1,\cdots,z_{m_k+1}]f=\frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_k!}D_\xi^{m_1}D_\eta^{m_2}\cdots D_\zeta^{m_k}[\xi,\eta,\cdots,\zeta]f, \quad (1A.25)$$

$$\xi\in U(x),\ \eta\in U(y),\ \cdots,\ \zeta\in U(z),$$

对于复变量的一般情况，我们有**估值**

$$|[x_1,\cdots,z_{m_k+1}]f|\leqslant\frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_k!}\mathrm{Max}|D_\xi^{m_1}D_\eta^{m_2}\cdots D_\zeta^{m_k}[\xi,\eta,\cdots,\zeta]f|, \quad (1A.26)$$

其中的极大值，是当 ξ 遍及 $U(x)$，η 遍及 $U(y)$，…，ζ 遍及 $U(z)$ 时所取得的。

上述公式中，对于略去 n 阶导数连续的可能性，可见附录 M.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com