最佳结构设计
理论和应用

国防工业出版社

内容简介

最佳结构设计可高度自动化地、快速地设计出重量轻、效能高、可靠性强的结构。最佳结构有时也称为最小重量设计，是指在满足一些必须满足的约束条件下，选定设计参数的一组值，使结构以最小的重量完成所需的功能。

本书从最佳结构设计的背景、基本概念开始，探讨了满应力设计、线性规划法、迭代线性规划法、可行方向法等的基本理论和应用。探讨了最佳结构设计在航空、机械工程及土木工程和船舶等方面的应用。

本书可供从事结构设计及结构计算的技术人员参考。

OPTIMUM STRUCTURAL DESIGN
(THEORY AND APPLICATIONS)
R. H. Gallagher, O. C. Zienkiewicz, J. W. & Sons Ltd.

*

最 佳 结 构 设 计
理 论 和 应 用
〔英〕R. H. 加拉格尔, O. C. 齐恩基威克茨 著
陈孝安 丁惠梁 译
陈伯平 俞锦云 校

*

国防工业出版社出版
北京市书刊出版业营业許可証出字第074号
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
上海商务印刷厂排版 国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32 印张 10 3/8 272 千字
1978年12月第一版 1978年12月第一次印刷 印数：00,001—30,800 册
统一书号：15034·1723 定价：1.30 元

原　序

近二十年来,结构分析领域进展显著。就我们所知,几乎所有的结构问题都能借助于计算机求解。虽然这些进展的本身对于评定一个具体设计的性状极为重要,然而,只当反映在改进结构设计使之获益时,才可为社会服务。

作出一个好设计,使之既满足安全与性能的"限制",且费用又最小,这并不是新课题。自古以来,慎重的工程人员总是要研究几个候选方案再从中择其"最优"者。但是,因时间和费用的关系,能研究的候选方案数受到很大限制。随着结构分析过程"计算机化",自然就要求建立一些更迅速有效的方法,以探求"绝对最好的"即"最佳的"设计。显然有很多可供选择的方法,它们分属于两个截然不同的极端:其一是充分利用计算机的潜力,使之自动化地进行探索;另一种则利用人的直觉,以人机配合的方式指导计算机进行运算。

近年来,有不少研究者分别对这两类方法做了很多工作。现在已是鉴定这些方法的发展情况及实用可能性并把它们介绍给工程人员的时候了。本书的目的就是进行这种鉴定。

本书的主要部分,即第1至15章,涉及第一种途径——"自动化的"方法。第1章概述自动最佳结构设计基础,对有关数学方法加以粗略分类,并指出已发表资料的主要来源。第2章奠定了大多数理论工作的基础,定义了术语并提供某些基本定义和定理。

第3章对历史上最引人的设计分析方法即满应力设计的原理和方法进行探讨。第4章把它引伸,形成所谓的最佳性准则方法,它不受满应力设计方法的局限,但与较精良的方法相比,仍保留了该法计算简单的优点。

现代最佳结构设计的绝大部分工作都应用数学规划方法。第

5 章概述这些数学规划方法，而不涉及它们在结构领域的应用，还给出了按问题的数学类型找寻适当方法用的“导游图”。本章还对很多数学论文及书籍加以摘要，对各种可能用的方法向工程人员提供广泛的见解。

第 6 至 13 章接着这个评述从结构工程人员角度提出各类主要数学规划方法的背景，基本理论和基本考虑，介绍某些应用的经验。研究了线性规划方法(第 6 章)、迭代的线性规划方法(第 7 章)、可行方向法(第 8 章)、罚函数法(第 9 章)、动态规划(第 10 章)及离散变量法(第 11 及 12 章)。每种方法均建立在或者推导出一种“定数论的”(“deterministic”)设计原理。然而，很大的趋势是朝着以概率为基础的设计原理发展，因此第 13 章讨论把它用于最佳结构的有关问题。第 14 至 16 章是土木工程人员直接感兴趣的。由当前在钢结构和混凝土结构中应用的情况和结果证明，在实际工程中已取得了很大效益。在宇航、机械工程、海军舰艇等其它领域结构工程中的应用情况及其成就已在前面各章分别讨论。

前已指出，另一种最佳化途径是用人机配合方式；第 16、17 章专门讨论这种方法，其它各章也在一定程度上涉及了这个问题。

编写过程中，编者力图使符号即使不能统一也要力求一致，且避免过多重复。只在讨论有关最佳化数学方法的各章做到了符号统一，在同时强调分析与设计方法的第 6、12、13 章则未做到。至于在多大程度上实现了连贯性和逻辑性还有待读者评判。对一本多作者的书，这要求是难于完满达到的。

R. H. Gallagher

O. C. Zienkiewicz

目　录

第1章 引 言

与结构分析技术的情况恰相反，对最佳结构设计技术迄今尚未作透彻研究。因而，实际的设计计算现仍极大地依赖于迭代分析。最佳结构设计的现代发展以试图引用数学规划的新成就为其特征，这在 10 年前首次出现。之后不久，最早的人机配合设计系统(即用计算机辅助设计的系统)就达到实际使用的程度。虽然整个设计技术的这两个方面各有某些特点证明是成功的，但那一种也没有得到所预言的应用。

很难全面断定这类有效设计方法被人们接受较慢的原因。这些原因包括：设计人员不熟悉数学规划的概念、数学规划中各种令人头痛的探索路线以及最佳设计的费用超出于简单的结构分析等。尽管如此，这些困难正在被克服。这期间累积了非常丰富的最佳结构设计的文献，因此，设计者如要加以应用，首先必须加以评价，然后再详尽研究可用的方法。本章用来帮助读者评价各种方法；以后各章再加以详细研究。

从最佳结构设计发展过程可看出四个以前相互独立的主要领域(在一定程度上也表明发展年代的顺序)。它们是(a)布局理论；(b) 同时破坏方式理论；(c) 基于最佳性准则的方法以及 (d) 数学规划方法。

第一种布局理论，是在规定载荷和结构材料的条件下求出最小体积单轴力元件结构的结构布局。其基本原理早在 1854 年就已由 Maxwell[1] 建立，而概念扩充和得到首次重要应用则是由 Michell[2] 于 1904 年完成的。由于该理论对结构几何形式不加任何有实际意义的限制，因而所得解是不现实的。Cox[3] 和 Hemp[4] 又重新考虑了布局理论，现有很多研究者正进一步发展其相关的概念。

同时破坏方式理论假定，整个结构破坏时每个元件都达到强度极限，这就是最佳结构。“同时”是指在某个单独的载荷情况下。这个限制几乎支配了1940到1950年间的全部工作，这些工作已载入 Shanley[5]、Gerard[6] 和 Cox[3] 等人的书中。在电子计算机出现前做的这些工作仅处理一些简单的结构形式，借助的是经典的函数极小化的概念。由于简单的结构形式事实上不多，加之对实际设计问题其适用性有限，因此近十年来这方面的文章极少。

如果把同时破坏方式理论推广，使之能考虑多组载荷而又仅对应力加上强度限制，这就成为满应力设计法。通常此法进行反复迭代分析，得出一个设计，其每个元件至少在一个规定的载荷情况下承受极限应力。虽然所得的结果是设计者传统观念中的最佳结构，但是，这种概念并没有得到广泛合理的研究。本书第3章把已发表的资料加以整理介绍。

以最佳性准则概念作为选取最小体积结构的基础，这早在1960年就已出现。它来源于结构力学的极值原理，大部局限于简单的结构形式和载荷情况。Prager[7] 和 Taylor[8] 推进了这项工作的发展；本书将介绍 Venkayya[9] 和 Gellatly 与 Berke[10] 的方法。Gellatly 与 Berke 编的第4章就是按他们的方法写的。

最后谈谈以数学规划方式为特征的一类方法。第2章将扼要介绍数学规划的基本概念。简要地说，数学规划就是在等式或不等式表示的限制(约束)条件下求多变量函数的极小值或极大值。提出不等式约束极重要，这样就可找出一个在规定载荷作用下所有元件不全处于极限情况下的设计，从而避免前述某些方法固有的局限性。此外，数学规划公式着眼于多变量问题，这与结构分析中倾向于有限元方法需要多元方程组的趋势相吻合。当然，应该强调指出，以后各章所述的方法一般并不局限于某种特定的结构分析方法。

50年代末数学规划方法被首次用于结构最佳化。早期著作中，Livesley[11] 和 Pearson[12] 把极限设计作为线性规划问题处理，Schmit[13] 把弹性设计问题作为一般非线性规划问题处理。这

里不拟详述结构最佳化工作的历史发展，因为已发表了很多新的评述，所以只在下面援引以作参考。另外也因为以后各章已对整个方法的各方面进行了综合。

还有另外一些不属于上述分类的现代结构最佳化方法。某些可归入控制理论[14]，另一些还难于归入特定的数学学科（例如 Melosh 和 Luik 的工作[15]）。这些方法可能实际很有效但未引起普遍注意。

结束本章前再作一评述，以帮助读者去看一些文献，进而研究书中未包括的某些方法。

Wasiutynski 和 Brandt[16] 在 1963 年首先广泛评述了有关文献。随后，Prager 和 Sheu[17] 评述了迄止 1968 年的发展。Barnett[18]、McNunn 和 Jorgenson[19]、Gerard[20] 从不同角度进行了专门的评述。Schmit[21~23] 较完整地评论了应用数学规划方法的结构设计工作。这些文献通过简单的例子和基本术语建立了基本概念，具有特别价值。

从基本原理出发建立数学规划概念和方法的文献并未侧重考虑结构设计问题。Fox[24] 的书是值得一提的，他在应用方面的兴趣主要是结构最佳化。此外 Whittle[25] 的书说明了线性规划方法在结构布局理论的应用。

还有一种对应的发展，即由结构理论工作者及设计者编辑结构最佳化的研究成果。Pope 和 Schmit[26] 编了一份这种材料；Moe 和 Gisvold[27] 也编了一份材料。1969 年出版了一份结构最佳化讨论会文集[28]，加拿大 Waterloo 出了一份讲义集[29]。Spunt[30] 的书概括了数学规划的一些概念，主要引证早期提出的较为经典的方案。

尽管结构最佳化的文献仍在迅速增加，但可认为现有文献已可供应用，并能够为感兴趣的个人可加以融会理解。从一定意义看，文献增多有助于人们对此学科加深理解，因事实上新发表的文献大都是说明而非研究性的。本书各章的参考文献目录加上前面援引的评述性文献几乎就包含了迄今为止这项课题的全部书目。

R. H. Gallagher

参 考 文 献

1. J. C. Maxwell, *Scientific Papers*, Vol. 2, 1869, p. 175.
2. A. G. M. Michell, 'The limits of economy of material in framed structures', *Phil. Mag.* (*Series 6*), **8**, 589–597 (1904).
3. H. Cox, *The Design of Structures of Least Weight*, Pergamon, Oxford, 1965.
4. W. Hemp, 'Theory of structural design', Report 214, AGARD, October 1958.
5. F. Shanley, *Weight–Strength Analysis of Aircraft Structures*, Dover, New York, 1960.
6. G. Gerard, *Minimum Weight Analysis of Compression Structures*, New York University Press, 1956.
7. W. Prager and P. Marcal, 'Optimality criteria in structural design', AFFDL-TR-70-166, May 1971.
8. J. Taylor, 'Optimal design of structural systems: an energy formulation', *AIAA J.*, **7**, 1404–1406 (1969).
9. V. Venkayya, 'Design of optimum structures', *Computers and Structures*, **1**, No. 1/2, 265–309 (1971).
10. R. A. Gellatly and L. Berke, 'Optimal structural design', AFFDL-TR-70-165, February 1971.
11. R. K. Livesley, 'The automatic design of structural frames', *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **9**, Part 3 (1956).
12. C. Pearson, 'Structural design by high-speed computing machines', *Proc. of ASCE Conf. on Electronic Computation, Kansas City, Missouri, 1958*.
13. L. Schmit, 'Structural design by systematic synthesis', *Proc. of ASCE 2nd Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., 1960*.
14. E. Haug and P. Kirmser, 'Minimum weight design of beams with inequality constraints on stress and deflection', *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **89**, 999–1004 (1967).
15. R. Melosh and R. Luik, 'Approximate multiple configuration analysis and allocation for least weight structural design', AFFDL-TR-67-59, April 1969.
16. E. Wasiutynski and A. Brandt, 'The present state of knowledge in the field of optimum design of structures', *Applied Mechanics Reviews*, May (1963).
17. W. Prager and C. Sheu, 'Recent developments in optimal structural design', *Applied Mechanics Reviews*, October (1968).
18. R. Barnett, 'Survey of optimum structural design', *Experimental Mechanics*, **6**, No. 12, December (1966).
19. J. McNunn and G. Jorgenson, 'A review of the literature on optimization techniques and minimax structural response problems', TR 66-5, Dept. of Aero. and Engrg. Mech., University of Minnesota, 1966.
20. G. Gerard, 'Optimum structural design concepts for aerospace vehicles: bibliography and assessment', Allied Research Associates Technical Report 272-2, March 1965.
21. L. Schmit, 'Structural synthesis: 1959–1969: a decade of progress', in *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design* (Ed. R. H. Gallagher *et al.*), University of Alabama Press, 1971.
22. L. Schmit, 'Structural engineering applications of mathematical programming techniques', in *Symposium on Structural Optimization, AGARD Conf. Proc. No. 36* (Ed. R. Gellatly), Advisory Group for Aero. Res. and Devel., NATO, October 1970.

23. L. Schmit, 'Automated design', *Int. Science and Technology*, June (1966).
24. R. L. Fox, *Optimization Methods for Engineering Design*, Addison–Wesley, Reading, Mass., 1971.
25. P. Whittle, *Optimization Under Constraints*, Wiley–Interscience, London, 1971.
26. G. G. Pope and L. A. Schmit (Eds.), *Structural Design Applications of Mathematical Programming Techniques*, AGARDograph 149, 2nd ed., Advisory Group for Aero. Res. and Devel., NATO, February 1972.
27. J. Moe and K. M. Gisvold (Eds.), *Optimization and Automated Design of Structures*, Division of Ship Structures, Norges Tekniske Høgskole, University of Trondheim, Meddelelse SK/M 21, December 1971.
28. R. A. Gellatly (Ed.), *Symposium on Structural Optimization, AGARD Conf. Proc. No. 36*, Advisory Group for Aero. Res. and Devel., NATO, October 1970.
29. M. Z. Cohn (Ed.), *An Introduction to Structural Optimization*, S. M. Study No. 1, University of Waterloo Press, 1969.
30. L. Spunt, *Optimum Structural Design*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.

第2章 术语与基本概念

2.1 引 言

本章概要说明最佳结构设计问题有关数学实质的某些特点。它是以后各章中属于数学规划的各种方法共有的特点，因此，先对数学规划的基本概念与术语进行定义并予评论。这里提供的资料大都取自第一流的材料（例如文献[1～3]），在这些材料中有较详尽较严格的阐述，也作了专门的工作以建立数学规划与结构最佳化问题的关系。

结构最佳化是在规定的载荷或环境条件下，在对结构性态、几何关系或在对其它因素的限制（约束）范围内，选取设计变量，使目标函数取得最佳值。设计变量、目标函数和约束这三种基本特点在设计空间的几何表示中构成设计问题。现依次讨论这几个问题。

2.2 设 计 变 量

在最佳结构设计问题中，设计变量可以包括元件尺寸、说明结构布置的参数、材料的力学或物理特性，以及设计过程中可预定量处理的各种量。整个结构的拓扑关系（亦即数学模型中元件联接的图样）很难考虑，虽然，当所用算法允许元件尺寸变为零时，已在一定程度上处理了这问题。此外不允许在连续的设计过程中把一种性质的结构变换为另一种性质的结构〔例如从桁架（轴力元件）变为刚架（抗弯元件）〕。

各类设计变量有不同的固有特质或复杂程度。最简单的变量是元件尺寸，如杆元件的横截面积、抗弯元件的惯性矩和板厚等。已发表的大多数最佳结构设计文献仅涉及选择元件尺寸（就象本书的很多例子一样），因为这可使问题相对简单些，同时也是因为很多实际结构的几何关系和材料特性已经选定。决定结构布置情

况的变量通常以元素节点坐标表示，其困难要大些，最困难的是表示材料特性的变量。

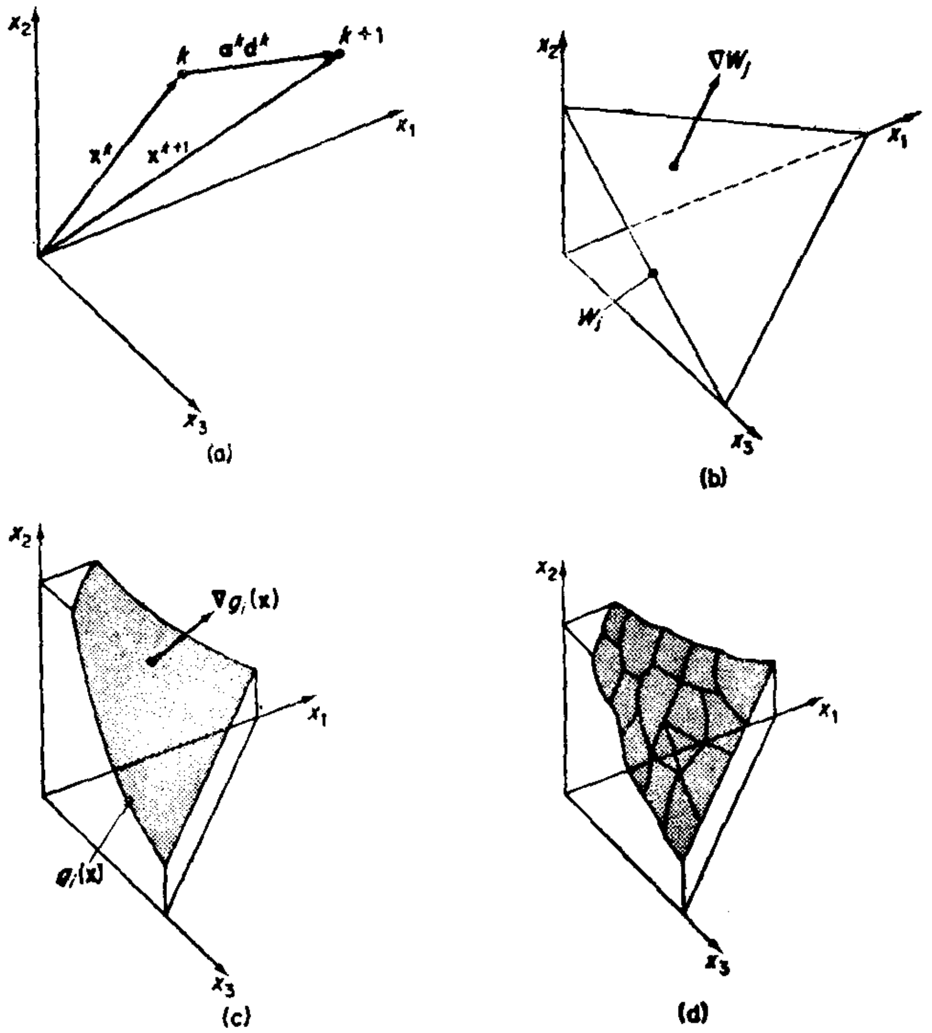

图 2.1　三变量设计空间：
(a) 设计空间；(b) 等重量面；(c) 典型的辅助约束与性态约束；(d) 组合约束面

通常所用材料的特性是离散值，选择材料出现了特殊问题。选择元件时也会遇到这问题，但更多的是元件特性可有很大的选择范围。离散变量的选取在最佳设计中还处于发展初期，这将在第 11 章说明。动态规划方法（第 10 章）也适合于处理这类问题。尽管这样，大多数设计算法均假定设计变量有个连续变化的区域。

这里，把第 i 个设计变量记为 x_i，并把该给定结构的全部变量排列成一个矢量 $\mathbf{x}$。相应于这种表示方法的重要概念就是设计空间，设计空间由代表各该设计变量的坐标轴加以描述。图2.1(a)

给出一个三变量(因而也是三维)的设计空间。三杆桁架(图 2.2)就是在此空间中表示的一个代表性问题。通常，设计变量个数 n 要比 3 大得多，并且很难用图象表示；这种 n 维的空间就叫做**超越空间**。设计空间中的某点 k 就是设计变量为 $\mathbf{x}^k$ 的一个设计。

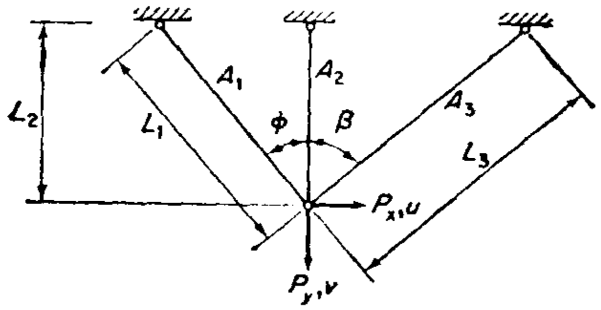

图 2.2　三杆桁架

以后各章讨论的很多设计算法采用**直接探索法**；它在相邻的设计点间作一系列定向的设计改变(移动)。在第 k 点到第 $k+1$ 点间的典型运动情况由下式给出：

$$\mathbf{x}^{k+1}=\mathbf{x}^k+\alpha^k\mathbf{d}^k。\tag{2.1}$$

矢量 $\mathbf{d}^k$〔见图 2.1(a)〕定出移动的方向，α^k 给出移动的步长。

2.3　目 标 函 数

目标函数也叫**费用函数**或**价值函数**，最佳化的过程就是找这个函数的极小(或极大)值，它是从很多候选可行设计中选出某个设计的依据。目标函数是设计变量的标量函数，本书把它记为 $W(\mathbf{x})$。它代表设计的某个最重要的特征，例如费用或重量；但也可用目标函数表示若干所需特性的加权和。

最常见的情况是以重量为目标函数——因而采用的符号是 W。但以后介绍的方法并不依赖于目标函数的特定类型。重量是对价值的最易于定量的一种量度；尽管费用有更大的实际重要性，但通常很难有足够的资料来构成采用费用的目标函数。

以三杆桁架(图 2.2)为例，简单说明重量函数。用 ρ_i 表示第 i 元件的单位体积重量，则

$$W=\rho_1L_1A_1+\rho_2L_2A_2+\rho_3L_3A_3 \tag{2.2}$$

对于有 m 个元件的桁架则有

$$W=\sum_{i=1}^{m}\rho_iL_iA_i。\tag{2.3}$$

通常只取元件横截面尺寸为设计变量，比重及元件长度为给定常数。于是，方程(2.3)写为

$$W=\rho\mathbf{L}^{T}\mathbf{A}。\tag{2.4}$$

比较方便。进而推广到结构有些设计变量不属元件横截面积的情况，目标函数通常就取如下形式

$$W=\mathbf{c}^{T}\mathbf{x}\tag{2.5}$$

其中 $\mathbf{c}^{T}=[c_1,\ \cdots,\ c_n]$ 由几何及材料特性常数组成。显然，方程(2.4)及(2.5)是设计变量的线性函数。

用图来说明设计空间内的线性目标函数〔图2.1(b)〕是有益的。三维空间内的线性函数是个平面，面上的所有点有相同的 W 值。在 n 维空间中的这种面就是超越平面。当目标函数是设计变量的非线性函数时，就是设计空间中的一个超越曲面。

以后各章不断要用的一个重要概念是目标函数的梯度 ∇W。梯度是 W 对各设计变量的导数所组成的矢量，即

$$\nabla W=\left[\frac{\partial W}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial W}{\partial x_n}\right]^{T}。\tag{2.6}$$

因此，对方程(2.5)的线性目标函数就有

$$\nabla W=\mathbf{c}\tag{2.7}$$

对于 $W=[\hat{\mathbf{c}}(\mathbf{x})]^{T}\mathbf{x}$ 的非线性目标函数则有

$$\nabla W=\mathbf{c}(\mathbf{x})。\tag{2.8}$$

梯度表示在其取值点处与该函数面相垂直的矢量。线性函数〔方程(2.4)〕表示一个平面，因此该函数的梯度处处相同(为常量)。当沿梯度的方向改变设计(移动)时，相对给定的步长目标函数增加最快，梯度矢量获得了实际效用。我们的主要兴趣是降低目标函数值，这相当于目标函数梯度的负方向，因此，把方程(2.8)(令 $\mathbf{d}^{k}=-[\mathbf{c}(\mathbf{x})]^{k}$)代入方程(2.1)，得到最大改变量

$$\mathbf{x}^{k+1}=\mathbf{x}^{k}-\alpha^{k}[\mathbf{c}(\mathbf{x})]^{k}。\tag{2.9}$$

这种探索方法就是最陡下降法。