高等学校试用教材

空间解析几何引论

下册

南开大学数学系《空间解析几何引论》编写组编

人民教育出版社

高等学校试用教材

空间解析几何引论

下册

南开大学数学系
《空间解析几何引论》编写组编

人民教育出版社
1978年·北京

本书是由南开大学数学系《空间解析几何引论》编写组吴大任、陈鹦、姚家超、李秉贞、涂蓁生五同志编写的．全书共有八章和两个附录，分上、下册出版．上册包括：第一章　空间直角坐标系，第二章　矢量、直线与平面(上)，第三章　矢量、直线与平面(下)，第四章　几种常见的曲面，附录Ⅰ　线性方程组与行列式，附录Ⅱ 二阶曲线的一般理论．下册包括：第五章　坐标变换与线性变换，第六章　二阶曲面的一般理论，第七章　欧氏几何与仿射几何，第八章　射影几何简介．

本书以欧氏几何，仿射几何为主要内容，简略地介绍了射影几何中的一些要点；部分集中和部分分散地介绍了必需的线代数、矩阵及群论的知识；各章末尾都写了长短不同的结束语，指出该章的要点以及与书中其他部分的关系，有的结束语中包含了一些补充内容，以扩大读者的视野．因此，本书有较强的适应性，可供综合性大学和师范院校数学系数学专业作为《解析几何》课程的试用教材．各不同类型的学校可根据教学要求参考本书上册"编者的话"讲授其中的一部或全部．

空间解析几何引论

下　册

南开大学数学系

《空间解析几何引论》编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

山东新华印刷厂德州厂印装

*

1978年5月第1版　1978年9月第1次印刷

书号 13012·0100　　定价 0.49 元

目　录

（下　册）

第五章　坐标变换与线性变换

在确定的坐标系下，空间每一点的坐标和每一矢的分量都随之确定．但在不同坐标系下，同一点一般有不同的坐标，同一矢一般有不同的分量．因此，有必要考察，在不同坐标系下，点的坐标和矢的分量的变化．本章首先要讨论坐标系改变后，点的坐标和矢的分量的变化．

建立坐标系是为了便于运用代数方法来处理几何问题．但是，既然在不同坐标系下点的坐标一般不相同，那么作为点的轨迹的(或由点的集合所构成的)几何图形，如直线，平面，曲线，曲面等的方程也不相同．已给一个图形，往往有可能适当地选择坐标系，使它的方程较简单，从而使它的几何性质便于分析．换句话说，通过坐标变换，代表一个几何图形的方程可以由繁化简．在下面几章里，我们将根据这个原理，对二阶曲面(由三元二次方程所代表的曲面)进行分类，其办法就是根据不同情况，分别通过坐标变换把已给方程简化为不同的"标准方程"．此外，在数学的其他领域，以及物理，力学，运动学等等方面，研究一个客观事物时，往往涉及不只是一个坐标系，因此坐标变换也是一个必须研究的问题．

在本章里，先讨论直角坐标变换，再讨论一般的仿射坐标变换．在这两种坐标系变换中，点的坐标变换都是由满秩线性变换表达的，而矢的分量变换则都是由满秩齐次线性变换表达的．除此之外，有关线性变换的代数理论，在以后几章中，特别是在第七和第八章中，另有重要的几何应用．这就促使我们进一步深入研究线

性变换的规律，特别是它们的结合规律. 由于这种结合规律和矩阵的结合规律关系极为密切，我们就把这两方面联系起来论述. 直角坐标系是特殊的仿射坐标系，因而直角坐标变换也有其特殊性，称为正交变换，其对应的矩阵就称为正交矩阵. 线性变换理论中的一个十分重要的概念是线性变换群. 这个概念和一般变换群的概念以及更一般的群的概念，不但渗入到几何及其他数学分支里，也渗入到自然科学的广泛领域里. 在本章，我们引进线性变换群的概念并略加论述，主要还是为了最后两章的需要. 由此，尽管到此为止我们的几何知识还不能对线性变换提供足够的几何背景，只能主要地从代数观点加以论述，但仍然是为了几何的目的.

§1 直角坐标变换

1.1 底矢变换

为了便于表明某些代数量的几何意义，坐标系的底矢，以前是用 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 表示的，在本章里，依次暂时用 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 表示. 这样，一个坐标系就用 $[O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 表示，其中 O 是坐标原点.

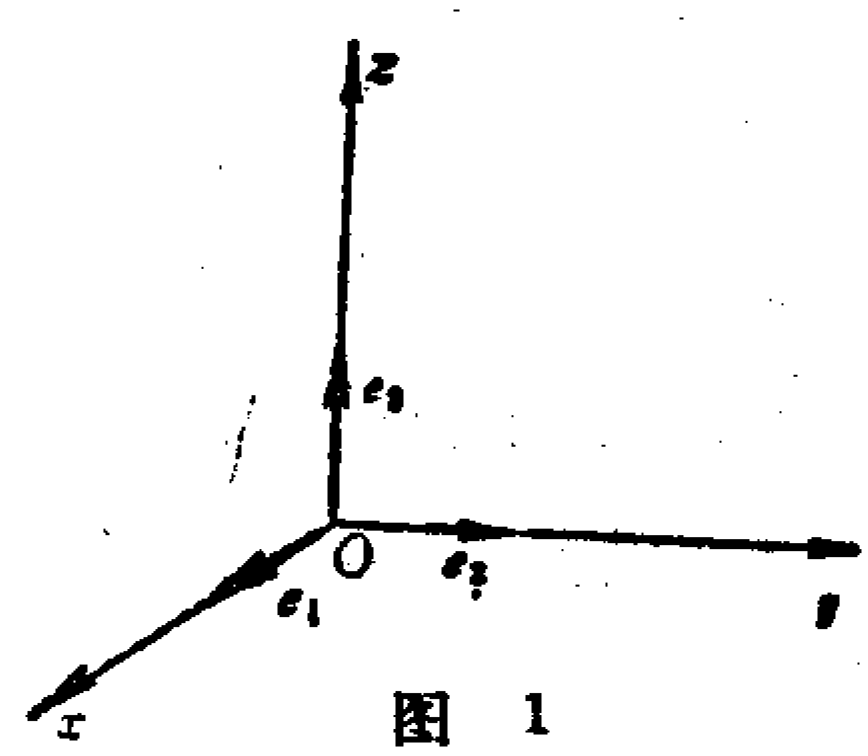

图 1

设已给两个直角坐标系 $\sigma=[O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$, $\sigma'=[O'; \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3]$，我们把 σ 叫做旧坐标系，把 σ' 叫做新坐标系，除非另有声明，都假定它们是右手系.

由于 σ 的底矢 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是互相垂直的幺矢，

$$\boldsymbol{e}_1^2=\boldsymbol{e}_2^2=\boldsymbol{e}_3^2=1 \qquad \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2=0 \tag{1}$$

这个关系可以简写成

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij} \qquad (i, j=1,2,3) \tag{2}$$

其中δ_{ij}叫做克龙纳克尔(Kronecker)符号，它的定义是

$$
\begin{aligned}
&当\ i=j\ 时,\quad \delta_{ij}=1\\
&当\ i\neq j\ 时,\quad \delta_{ij}=0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

把σ'的底矢e_1', e_2', e_3'写成σ的底矢e_1, e_2, e_3的线性组合

$$
\begin{cases}
e_1'=a_{11}e_1+a_{12}e_2+a_{13}e_3\\
e_2'=a_{21}e_1+a_{22}e_2+a_{23}e_3\\
e_3'=a_{31}e_1+a_{32}e_2+a_{33}e_3
\end{cases}
\tag{4}
$$

或

$$e_i'=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}e_j \qquad (i=1,2,3) \tag{5}$$

则$a_{ij}(j=1,\ 2,\ 3)$是e_i'在坐标系σ下的分量，即矢e_i'和e_j的数积，

$$a_{ij}=e_i'e_j \qquad (j=1,2,3) \tag{6}$$

也是e_i'在σ下的方向余弦．由于e_1', e_2', e_3'是互相垂直的幺矢

$$e_1'^2=e_2'^2=e_3'^2=1 \qquad e_2'e_3'=e_3'e_1'=e_1'e_2'=0 \tag{7}$$

或

$$e_i'e_j'=\delta_{ij} \qquad (i,j=1,2,3) \tag{8}$$

把(4)代入，并且利用(1)或(2)，就得

$$
\begin{cases}
a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1\\
a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=1\\
a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=1
\end{cases}
\tag{9}
$$

$$
\begin{cases}
a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}=0\\
a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12}+a_{33}a_{13}=0\\
a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0
\end{cases}
\tag{10}
$$

或

$$\sum_{j=1}^{3}a_{ij}a_{kj}=\delta_{ik} \qquad (i,k=1,2,3) \tag{11}$$

应当声明：我们把(1)简写成(2)，又把(4)，(7)，(9)和(10)依次缩写成(5)，(8)，(11)，只是希望读者逐步熟悉缩写形式；在没有熟悉这种形式之前，读者可以继续使用繁式，即把每个关系式以及各关系式中每项都具体写出来．我们以下将继续繁简并用，而且一般先繁后简．

底矢变换公式(4)被系数a_{ij}完全确定．我们把a_{ij}按其在(4)里的位置列成正方形，叫做正方矩阵．

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{12}$$

叫做底矢变换的矩阵，它的元素a_{ij}满足条件(9)和(10)或即(11)，这样的矩阵叫做正交矩阵，(9)和(10)就叫做正交条件．此外，由于假定σ，σ'都是右手系，行列式

$$(e_1', e_2', e_3')=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1^{①} \tag{13}$$

(参看第三章§5、§6)．这个行列式叫做矩阵A的行列式或底矢变换的行列式，我们用$|A|$表示，以便和矩阵的记号相区别：

$$|A|=|a_{ij}|=(e_1', e_2', e_3')=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{14}$$

(注意：$|A|$，$|a_{ij}|$在这里不表示绝对值)于是以上结果可以说成：

由一个右手直角坐标系到另一个右手直角坐标系的底矢变换矩阵是行列式等于1的正交矩阵．

---

① 若σ是右手系而σ'是左手系，则行列式$|a_{ij}|=-1$．一般地说，若σ，σ'都是右手系或都是左手系时，$|a_{ij}|=1$；否则$|a_{ij}|=-1$．

倒转来，若 e_1，e_2，e_3 是一个右手直角坐标系的底矢，而 $A=(a_{ij})$是行列式等于 1 的正交矩阵，则根据(7)，(8)由(4)或(5)所确定的矢量 e_1'，e_2'，e_3' 是构成右手系的彼此垂直的幺矢，因而也可以作为一个右手直角坐标系的底矢.

在(4)里，把直角坐标系 σ' 的底矢 e_1',e_2',e_3' 写成 σ 的底矢 e_1，e_2，e_3 的线性组合. 若把 σ 的底矢写成 σ' 的底矢的线性组合，其结果将是怎么的呢？这是容易解决的. 若把(4)所表达的 σ,σ' 的底矢之间的关系列成一个表格：

$e_i'e_j$	e_1	e_2	e_3
e_1'	a_{11}	a_{12}	a_{13}
e_2'	a_{21}	a_{22}	a_{23}
e_3'	a_{31}	a_{32}	a_{33}

(15)

则由于 $a_{ij}=e_i'e_j$（即(6)），它是 e_i' 和 e_j 之间的角的余弦. 因此，在 σ' 里，幺矢 e_1 的方向余弦是矩阵中的第一列元素，即 a_{11}，a_{21}，a_{31}. 同样，幺矢 e_2,e_3 在 σ' 里的方向余弦依次是 a_{12}，a_{22},a_{32}；a_{13}，a_{23},a_{33}，因此，

$$\begin{cases} e_1=a_{11}e_1'+a_{21}e_2'+a_{31}e_3' \\ e_2=a_{12}e_1'+a_{22}e_2'+a_{32}e_3' \\ e_3=a_{13}e_1'+a_{23}e_2'+a_{33}e_3' \end{cases} \tag{16}$$

这里的矩阵我们用 A' 表示

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{17}$$

它的元素和 A 相同，所不同的是它的第一，第二，第三行依次是 A 的第一，第二，第三列. 这样从正方矩阵 A，把行和列对调所得到的正方矩阵就叫做 A 的**转置矩阵**. 由 σ，σ' 的对称关系，可知 A'

也是行列式等于 1 的正交矩阵，但现在的正交条件是

$$\begin{cases} a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2=1 \\ a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2=1 \\ a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2=1 \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33}=0 \\ a_{13}a_{11}+a_{23}a_{21}+a_{33}a_{31}=0 \\ a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}=0 \end{cases} \tag{19}$$

此外，

$$|A'|=|A|=1 \tag{20}$$

正交条件(18)(19)可以缩写成

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij}a_{ik}=\delta_{jk} \qquad (j,k=1,2,3) \tag{21}$$

正如由底矢变换(4)可以得到底矢变换(16)那样，由正交条件(9)，(10)可以得到正交条件(18)，(19)，或者说，由 A 是正交矩阵可知 A' 也是正交矩阵. 因此，条件(9)，(10)和(18)，(19)是等价的，是同一条件的两种表现形式. 这个结论在 §3.4 里将再次得到验证.

1.2 矢的分量变换

现设矢量 $\boldsymbol{v}$ 在直角坐标系 σ 和 σ' 的分量依次是 X，Y，Z 和 X'，Y'，Z'：

$$\boldsymbol{v}=X\boldsymbol{e}_1+Y\boldsymbol{e}_2+Z\boldsymbol{e}_3 \tag{22}$$

$$\boldsymbol{v}=X'\boldsymbol{e}_1'+Y'\boldsymbol{e}_2'+Z'\boldsymbol{e}_3' \tag{23}$$

我们来求 X,Y,Z 和 X',Y',Z' 的关系.

把(16)代入(22)，经过整理，就得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}=&(a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}Z)\boldsymbol{e}_1' \\ &+(a_{21}X+a_{22}Y+a_{23}Z)\boldsymbol{e}_2' \\ &+(a_{31}X+a_{32}Y+a_{33}Z)\boldsymbol{e}_3' \end{aligned} \tag{24}$$

但我们知道(第二章§5)，v 在 σ' 里的分量是唯一的，所以，比较(23)和(24)，就得

$$\begin{cases} X'=a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}Z \\ Y'=a_{21}X+a_{22}Y+a_{23}Z \\ Z'=a_{31}X+a_{32}Y+a_{33}Z \end{cases} \tag{25}$$

这里 σ 到 σ' 的矢的分量变换的矩阵是正交矩阵 A.

由 σ,σ' 的对称关系，或者把(4)代入(23)，然后和(22)比较又得

$$\begin{cases} X=a_{11}X'+a_{21}Y'+a_{31}Z' \\ Y=a_{12}X'+a_{22}Y'+a_{32}Z' \\ Z=a_{13}X'+a_{23}Y'+a_{33}Z' \end{cases} \tag{26}$$

这个分量变换的矩阵是 A 的转置矩阵 A'. 我们知道 A' 也是行列式等于 1 的正交矩阵.

若把(25)作为以 X,Y,Z 为未知数的三元线性方程组，则(参看附录 I §4.1)由于行列式 $|A|=1$，这个方程组有唯一的解.

$$\begin{cases} X=\begin{vmatrix} X' & a_{12} & a_{13} \\ Y' & a_{22} & a_{23} \\ Z' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ Y=\begin{vmatrix} a_{11} & X' & a_{13} \\ a_{21} & Y' & a_{23} \\ a_{31} & Z' & a_{33} \end{vmatrix} \\ Z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & X' \\ a_{21} & a_{22} & Y' \\ a_{31} & a_{32} & Z' \end{vmatrix} \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} X=A_{11}X'+A_{21}Y'+A_{31}Z' \\ Y=A_{12}X'+A_{22}Y'+A_{32}Z' \\ Z=A_{13}X'+A_{23}Y'+A_{33}Z' \end{cases}$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 在 $|A|$ 里的余因子. 和(26)比较, 可知

$$a_{ij}=A_{ij} \qquad (i,j=1,2,3)$$

于是就得

定理 1 正交矩阵 $A=(a_{ij})$, 若 $|A|=1$, 则它的元素 a_{ij} 在行列式 $|A|$ 里的余因子 $A_{ij}=a_{ij}$.①

注意, 在 § 1.1 和 § 1.2 里, 所得到的底矢变换公式或矢的分量变换公式都和坐标系 σ, σ' 的原点 O, O' 的位置无关. 这是当然的, 因为当我们只考虑矢量时, 它们始点的位置是不起作用的; 起作用的只是它们之间的角.

最后还可以指出, 若 v_i 在坐标系 σ 下的分量是 X_i, Y_i, Z_i 而在 σ' 下的分量是 $X'_i, Y'_i, Z'_i (i=1,2,3)$, 则

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=X'_1X'_2+Y'_1Y'_2+Z'_1Z'_2 \tag{27}$$

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X'_1 & Y'_1 & Z'_1 \\ X'_2 & Y'_2 & Z'_2 \\ X'_3 & Y'_3 & Z'_3 \end{vmatrix} \tag{28}$$

这是因为数积 v_1v_2 和混合积 (v_1, v_2, v_3) 的坐标表示式在一切(右手)直角坐标系下都是一样的. 这两个关系也可以通过公式(26), 利用正交条件直接验证. 当 X, Y, Z 和 X', Y', Z' 为同一个矢量依次在 σ, σ' 下的分量时, 则

$$X^2+Y^2+Z^2=X'^2+Y'^2+Z'^2 \tag{29}$$

这不过是公式(27)的一种特殊情况.

例 1 设已给两个直角坐标系 $\sigma=[O; e_1, e_2, e_3]$, $\sigma'=[O; e'_1, e'_2, e'_3]$. 在 σ 下, 已知 $e'_1=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $e'_2=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$,

---

① 若 $|A|=-1$, 则 $A_{ij}=-a_{ij}$.

$e_3' = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

1）求 σ 到 σ' 的底矢变换公式和矢的分量变换公式.

2）已知矢量 $\boldsymbol{v}_1$ 在 σ 下的分量为$\{1,-1,1\}$，求它在 σ' 下的分量.

3）已知矢量 $\boldsymbol{v}_2$ 在 σ' 下的分量为$\{-1,0,2\}$，求它在 σ 下的分量.

解 1）根据(4)式，σ 到 σ' 的底矢变换公式为

$$e_1' = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3$$

$$e_2' = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2$$

$$e_3' = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3$$

根据(26)(25)，矢的分量变换公式为

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2}X' - \frac{1}{\sqrt{2}}Y' - \frac{1}{2}Z' \\ Y = \frac{1}{2}X' + \frac{1}{\sqrt{2}}Y' - \frac{1}{2}Z' \\ Z = \frac{1}{\sqrt{2}}X' \qquad + \frac{1}{\sqrt{2}}Z' \end{cases} \tag{30}$$

或为

$$\begin{cases} X' = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z \\ Y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ Z' = -\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z \end{cases} \tag{31}$$

2）将 $\boldsymbol{v}_1$ 在 σ 下的分量$\{1,-1,1\}$代入(31)右端，则

$$\begin{cases} X'=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ Y'=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}} \\ Z'=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

故 $\boldsymbol{v}_1$ 在 σ' 下的分量为$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{-2}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

3) 将 $\boldsymbol{v}_2$ 在 σ' 下的分量$\{-1,0,2\}$代入(30)的右端，得

$$\begin{cases} X=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times 2=-\frac{3}{2} \\ Y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times 2=-\frac{3}{2} \\ Z=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

故 $\boldsymbol{v}_2$ 在 σ 下的分量为$\left\{-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

1.3 点的坐标变换

设 P 为空间任意一点，它在直角坐标系 σ,σ' 下的坐标依次是(x,y,z)，(x',y',z')，而 σ' 的原点 O' 在 σ 下的坐标是(x_0,y_0,z_0)，则在 σ 里 P,O' 的径矢依次是

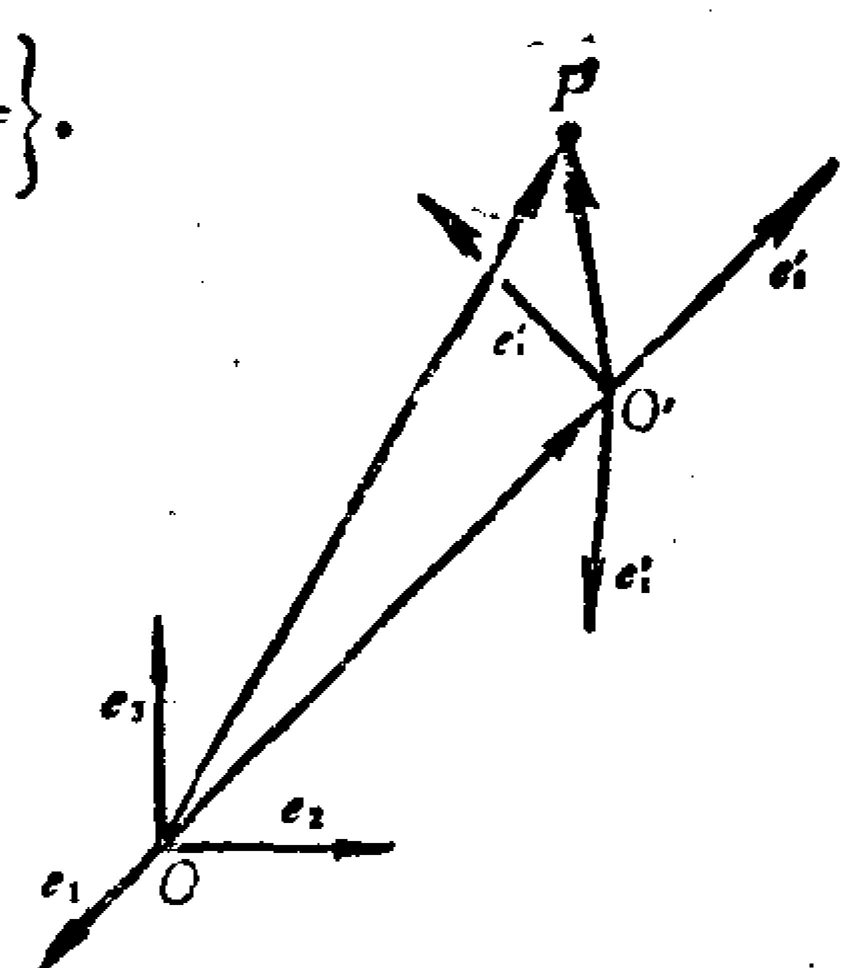

图 2

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3 \tag{32}$$

$$\overrightarrow{OO'}=x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2+z_0\boldsymbol{e}_3 \tag{33}$$

而在 σ' 里 P 的径矢是

$$\boldsymbol{r}'=\overrightarrow{O'P}=x'\boldsymbol{e}_1'+y'\boldsymbol{e}_2'+z'\boldsymbol{e}_3' \tag{34}$$

但

$$\overrightarrow{O'P}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{OP}$$

即

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}-\overrightarrow{OO'} \tag{35}$$

把(16)代入(32)、(33)，然后再代入(35)，经过整理，就得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'=&[a_{11}(x-x_0)+a_{12}(y-y_0)+a_{13}(z-z_0)]\boldsymbol{e}_1'\\&+[a_{21}(x-x_0)+a_{22}(y-y_0)+a_{23}(z-z_0)]\boldsymbol{e}_2'\\&+[a_{31}(x-x_0)+a_{32}(y-y_0)+a_{33}(z-z_0)]\boldsymbol{e}_3'\end{aligned}$$

和(34)比较，就得

$$\begin{cases}x'=a_{11}(x-x_0)+a_{12}(y-y_0)+a_{13}(z-z_0)\\y'=a_{21}(x-x_0)+a_{22}(y-y_0)+a_{23}(z-z_0)\\z'=a_{31}(x-x_0)+a_{32}(y-y_0)+a_{33}(z-z_0)\end{cases} \tag{36}$$

要求坐标系 σ 的原点 O 在 σ' 下的坐标(x_0',y_0',z_0')，只需在(36)里令 $x=y=z=0$. 所得结果是

$$\begin{cases}x_0'=-(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0)\\y_0'=-(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0)\\z_0'=-(a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0)\end{cases}$$

引进记号 x_0',y_0',z_0'，(36)就可以写成

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+x_0'\\y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+y_0'\\z'=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+z_0'\end{cases} \tag{37}$$

不难看出，若(a_{ij})是行列式等于 1 的正交矩阵，则(37)可以看作直角坐标变换(右手系变到右手系).

由 σ, σ' 的对称关系，或者由(36)把 $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ 作为未知数解出来，就得

$$\begin{cases}x=a_{11}x'+a_{21}y'+a_{31}z'+x_0\\y=a_{12}x'+a_{22}y'+a_{32}z'+y_0\\z=a_{13}x'+a_{23}y'+a_{33}z'+z_0\end{cases} \tag{38}$$