高等院校企业管理
干部专修科试用教材

GAODENG YUANXIAO
QIYE GUANLI
GANBU ZHUANXIUKE
SHIYONG JIAOCAI

管理数学

第一分册

解析几何与微积分

同济大学　沈荣芳　主编

机械工业出版社

高等院校企业管理干部专修科试用教材

管 理 数 学

第一分册

解析几何与微积分

同济大学 沈荣芳 主编

机 械 工 业 出 版 社

《管理数学》全书共分三个分册，本书为第一分册。内容包括平面解析几何、空间解析几何、一元函数微积分、多元函数微积分、级数和微分方程初步。

本书内容以平面解析几何和一元函数微积分为主，同时介绍了学习第二分册概率论与数理统计、第三分册线性代数与运筹学，以及管理类专业其他有关课程，如经济计量学、技术经济学、生产管理与经营、系统工程等课程涉及的数学基础知识。本书着重介绍基本概念和运算。为便于读者掌握教材内容，各章都有大量例题和习题，并附有答案。

本书系高等院校企业管理干部专修科试用教材。也可作为管理工程类专业本科生及研究生的教学参考书，还可供工业企业、各级管理机关和研究设计单位的管理人员和工程技术人员岗位培训及学习参考。

管理数学

第一分册

解析几何与微积分

同济大学　沈荣芳　主编

*

责任编辑：刘同桥

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787\times1092^{1}/_{16}$·印张 $18^{1}/_{2}$·字数 451 千字

1987年11月北京第一版·1987年11月北京第一次印刷

印数　0,001—(5,700·定价：3.10 元

*

统一书号：15033·7112

前　言

本书是根据机械工业管理工程类专业教材编审委员会1983年4月在杭州会议上讨论通过的《管理数学》教学大纲编写的。本书系高等院校企业管理干部专修科（两年制）试用教材。

全书共分三个分册。

第一分册：解析几何与微积分。内容包括：平面解析几何，空间解析几何，一元函数微积分，多元函数微积分，级数和微分方程初步。

第二分册：概率论与数理统计。内容包括：集合、排列和组合，概率及其运算，随机变量分布，参数估计和假设检验，方差分析，相关与回归，抽样检验。

第三分册：线性代数与运筹学。内容包括：行列式，矩阵，线性方程组，线性规划，目标规划，动态规划，网络计划技术，决策分析，马尔柯夫过程，仿真技术。

三个分册之间具有相对的独立性。

编写本书的目的是希望能用较少的时间，通过本书三个分册的学习，使学生基本上能够掌握管理类专业教学计划中各门课程所涉及的数学内容。书中避免前后脱节和不必要的重复。学生在学习数学内容的同时，也学习一些初步的管理知识。全书授课学时约240学时。

本书对有关管理学科中常用的数学知识都作了比较系统的阐述。同时，结合管理类专业的特点，书中着重于讨论问题的基本概念，运算方法和具体应用，避免不必要的数学理论推导。全书除数学的基础部分外，都立足于结合企业管理中的实际问题引出概念。书中也注意引入近代管理科学的新内容。为便于学生掌握教材内容，各章都有大量例题和习题，并附有答案。

本书第一分册第一、二、三、七、八、十一章由同济大学沈荣芳编写；第四、五、六、九、十、十二章由上海工程技术大学叶庆桐、上海工程技术大学蒋仲刚编写；第二分册第一至第六章由华中工学院张建明、同济大学王永安编写；第七至第十二章由同济大学陈炳权编写；第三分册第一至第七章由吉林工业大学郑大本编写；第八至第十四章由同济大学周士富编写。全书由沈荣芳担任主编，上海交通大学黄洁纲担任主审。

本书除供高等院校企业管理干部专修科使用外，也可作为管理工程类专业本科生及研究生的教学参考书，还可供工业企业、各级管理机关和研究设计单位的管理人员和工程技术人员岗位培训及学习参考。

参加本书审稿会的有：黄洁纲、刘同桥、王福楹、何叔俭、朱自强、丁伯金、郁宗隽、吴立煦、黄世玲、刘贤鹏。本书在编写过程中，得到翟立林、王永安、杨道生等同志的指导和协助，在此一并表示衷心感谢。

限于编写水平，书中不妥与错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

1986年10月

目　录

第一篇　解　析　几　何

第一章　平面解析几何

解析几何是应用代数方法研究几何的一门数学。它把几何问题化为代数的计算来研究，使数与形密切地结合起来。在这一章里，将简单地介绍平面解析几何的基础知识。

§1-1　平面上的直角坐标系

坐标系是解析几何中讨论问题的基础。最常用的坐标系是直角坐标系。这一节里，将从数轴开始，讨论平面上的直角坐标系。

一、轴和轴上的线段

任意一条直线，都有两个相反的方向，可以随意指定其中的一个叫做它的正向。这样，指定了正向的直线称为**轴**。

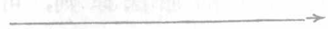


图　1-1

图 1-1 表示一个轴，它的正向是从左到右的。为了表示这个正向，在右端加一箭头。

设有任意两点 A 和 B，用直线连接 A 和 B 得一线段。认定其中的一点为起点，另一点为终点，则从起点到终点的方向就是线段的方向。有方向的线段叫做**有向线段**。以 A 为起点，B 为终点的有向线段，用记号 $\overline{AB}$ 表示（当不发生混淆时也可记作 AB）。这样，$\overline{AB}$ 同 $\overline{BA}$ 表示两个不同的有向线段，它们的长度相同，方向相反。

设已知一轴 l，见图 1-2，箭头表示轴的正向，A 和 B 是该轴上任意两点。这样 $\overline{AB}$ 就是轴上的有向线段。如果用单位长度去度量有向线段 AB 的长度，并且量出的结果是 3，那末，线段 AB 的**长度**是 3 个单位，可用记号表示为：

$$|AB| = 3$$

又因为有向线段 AB 是正向的，所以有向线段 AB 的值是正 3，用记号表示为：

$$AB = 3$$

同样，有向线段 BA 的长度也是 3，即：

$$|BA| = 3$$

因为它是负向的，所以有向线段 BA 的值是负 3，并记为：

$$BA = -3$$

象这样一条有向线段的长度，连同表示它方向的正负号，叫做这条有向线段的**值**。

起点与终点重合的有向线段称为零线段，记作 0；例如 $AA = 0$。

设 A、B、C 是轴上任意排列的三点，参见图 1-3，则 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，和 $\overline{AC}$ 的值 AB，BC 和 AC 之间存在下列关系式：

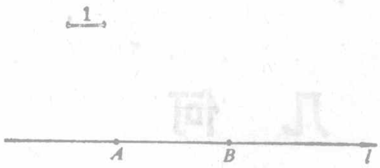


图 1-2

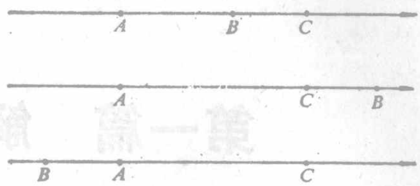


图 1-3

$$AB + BC = AC \qquad (1\text{-}1)$$

要证明式（1-1）成立，必须证明它对于 A、B、C 三点在轴上一切可能的排列都成立。为此，可以把 A、B、C 在轴上排列的情形分成两类：

1. $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 的方向相同；

2. $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 的方向相反。

必须证明式（1-1）在上述两种场合中都成立。

如果 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 的方向相同，则 $|AC| = |AB| + |BC|$，而且 AB、BC 和 AC 正负号都相同，因此式（1-1）成立。

如果 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 的方向相反，则 $|AC|$ 为 $|AB|$ 与 $|BC|$ 之差，AC 的正负号同 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 中较长者的值的正负号相同。因此，根据代数中的加法原则，可知式（1-1）成立。

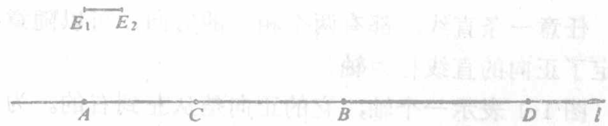


图 1-4

式（1-1）还可以推广。设 A_1、A_2、A_3、…、A_n 是轴上任意排列的点，则有向线段 A_1A_2、A_2A_3、…、$A_{n-1}A_n$ 的值之间满足下列关系式：

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n = A_1A_n \qquad (1\text{-}2)$$

事实上，只要应用数学归纳法和式（1-1），式（1-2）便可得证。

例 1 在图 1-4 中表示着一个轴 l 和轴上的四个点 A、C、B、D，E_1E_2 是单位长度。假设：A 与 C 之间为 3，C 与 B 之间为 4，B 与 D 之间为 5，求有向线段 AB、DA 的长度和值。

解 有向线段 AC、CB 的长度和值分别为：

$$|AC| = 3 \qquad AC = 3$$

$$|CB| = 4 \qquad CB = 4$$

所以有向线段 AB 的长度和值分别为：

$$|AB| = |AC| + |CB| = 3 + 4 = 7$$

$$AB = AC + CB = 3 + 4 = 7$$

又因

$$|DB| = 5 \qquad DB = -5$$

$$|BC| = |CB| = 4 \qquad BC = -CB = -4$$

$$|CA| = |AC| = 3 \qquad CA = -AC = -3$$

所以

$$|DA| = |DB| + |BC| + |CA| = 5 + 4 + 3 = 12$$

$$DA = DB + BC + CA = -5 - 4 - 3 = -12$$

二、直线上的坐标系

在一条直线（一般取水平位置的直线）l 上任意取一点 O 作为原点；取一单位长度；再取一个方向（习惯上取自左至右）作为直线的正向。于是，对于直线 l 上的任一点 P，则总可以把 OP 看作是以 O 为起点，P 为终点的有向线段，见图1-5。用单位长度去度量，就可以得到有向线段 OP 的值，设这个值是 x。如果 OP 与 l 的方向相同，则 x 是正数（即 $x>0$）；如果 OP 与 l 方向相反，则 x 是负数（即 $x<0$）；如果 P 点在 O 点上，则 $OP=0$（即 $x=0$）。x 叫做轴上 P 点的坐标（简称 P 点的坐标），用 $P(x)$ 表示。例如，图1-6上，$OP_1=4$，说明 P_1 点的坐标是4，可记为 $P_1(4)$；同样，$OP_2=-3$，P_2 点的坐标是 -3，记为 $P_2(-3)$。

图 1-5

图 1-6

反过来，对于给定的任意一个实数 x，可以把它看成是以 O 为起点，某一点 P 为终点的有向线段 OP 的值，即 $OP=x$。这样，对于一个给定的实数 x，总可以在直线 l 上找到唯一的点 P，它以 x 为坐标。例如，给定一个数是 -5，那末可以在直线上找到一个点 P，使得 $OP=-5$。-5 就是 P 点的坐标。

象这样：

1. 在给定的直线 l 上指定正方向；
2. 在直线 l 上取一定点作为原点（一般以 O 表示这一点）；
3. 任取一条一定长度的线段作为单位长度。即在直线 l 上建立了直线坐标系，这一条直线叫做**轴**，也叫做**数轴**。

上述分析可知实数和数轴上的点可以建立一一对应的关系。即对于任何一个实数，总可以用数轴上的一个（唯一的）点表示；反之，数轴上的任何一个点，都表示一个（唯一的）实数。通常，数轴用 x 表示，并称为 x 轴。

例 2　如图1-7所示数轴 x 上，原点为 O，且 $OA=2$，$AB=3$，$OC=-4$，求 A、B、C 三点的坐标。

图 1-7

解　因为 $OA=2$，$OB=5$，$OC=-4$，所以 A、B、C 三点的坐标分别为2、5、-4，或 $A(2)$、$B(5)$、$C(-4)$。

下面，证明一个很有用的公式。设 P_1、P_2 是任意两点。P_1 的坐标为 x_1，P_2 的坐标为 x_2，则 $\overline{P_1P_2}$ 的值 P_1P_2 等于 x_2-x_1，即：

$$P_1P_2=x_2-x_1 \tag{1-3}$$

证　根据式（1-1），可得

$$OP_1+P_1P_2=OP_2$$

或改写成：

$$P_1P_2=OP_2-OP_1$$

因为　$OP_2=x_2$　　$OP_1=x_1$

所以

$$P_1P_2=x_2-x_1$$

例 3　已知直线上点 A、B、C、D 的坐标依次为 $A(5)$、$B(-1)$、$C(-8)$、$D(2)$，求 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 和 $\overline{DB}$ 的值和长度。

解

$$AB=(-1)-(5)=-6 \qquad |AB|=6$$

$$CD=(2)-(-8)=10 \qquad |CD|=10$$

$$DB=(-1)-(2)=-3 \qquad |DB|=3$$

三、数轴上线段的定比分点

1. 内分点和外分点　在一根轴上取两点 P_1 和 P_2，形成线段 P_1P_2，见图 1-8，（图中 P_1P_2 恰与轴同向，这不是必须的）。今在轴上另取一点 P，P 可能在 P_1，P_2 两点之间，也可能在线段 P_1P_2 或 P_2P_1 的延长线上。P 点称为线段 P_1P_2 的**分点**。如果：

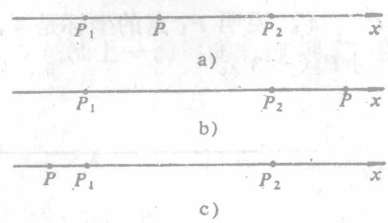


图 1-8

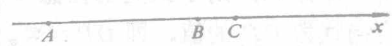


图 1-9

（1）分点 P 在 P_1，P_2 两点之间，称 P 为 F_1P_2 的**内分点**，或说 P 内分 P_1P_2；

（2）分点 P 在 P_1P_2 线段两端延长线上，则称 P 为 P_1P_2 的**外分点**，或说 P 外分 P_1P_2。

不论 P 内分或外分 P_1P_2，均规定 P 分割 P_1P_2 指的就是分成两个线段 P_1P 和 PP_2，两线段之比用 λ 表示，即

$$\frac{P_1P_2}{PP_2}=\lambda$$

从图 1-8 a）可以看出，如果 P 点在 P_1、P_2 之间，因为 P_1P 与 PP_2 方向相同，所以 $\lambda>0$；如果 P 点在 P_1，P_2 之外（图 1-8 b）和图 1-8 c）），则 P_1P 与 PP_2 的方向相反，所以 $\lambda<0(\lambda\neq-1)$。如果 P 与 P_1 重合，则 $P_1P=0$，所以 $\lambda=0$。如果 P 与 P_2 重合，则 $PP_2=0$，此时 λ 不存在。

例 4　延长线段 AB 至 C，使延长线的长度为原长度的 1/4，求 C 分 AB 所成的比。

解　假定 AB 线段在 x 轴上（图 1-9）。令 $|BC|=\frac{1}{4}|AB|$。

根据题意有：

$$|AC|=|AB|+\frac{1}{4}|AB|=\frac{5}{4}|AB|$$

所以

$$\lambda=\frac{AC}{CB}=\frac{\frac{5}{4}|AB|}{-\frac{1}{4}|AB|}=-5$$

2. 定比分点的坐标　设有向线段 P_1P_2 两端点的坐标分别是 x_1 和 x_2，分点 P 的坐标为 x，λ 是不等于 -1 的已知数，那末 P 点分 P_1P_2 所成的比是

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda \tag{1-4}$$

从图 1-10 可以看出，$P_1P=x-x_1$，$PP_2=x_2-x$⊖，所以，式 (1-4) 可改写成

⊖ 当 $PP_2\to0$ 时，则极限 $\lim\limits_{P\to P_2}\frac{P_1P}{PP_2}=\infty$，即 $\lambda\to\infty$

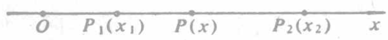


图 1-10

图 1-11

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$$

因为 $\lambda \neq -1$，故 x 得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \tag{1-5}$$

式 (1-5) 为定比分点的坐标公式。当 $\lambda=1$ 时，$P_1P=PP_2$，即 P 为 P_1P_2 的中点时，得中点坐标公式

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \tag{1-6}$$

例 5 在数轴上有 $A(4)$、$B(-2)$ 两点，延长 BA 到 P，使 $|AP|=\frac{1}{2}|AB|$，求 P 点的坐标。

解 先求出 P 点分 AB 所成的比 λ 的值。从图 1-11 可知

$$|BP|=|AB|+|AP|=|AB|+\frac{1}{2}|AB|=\frac{3}{2}|AB|$$

由式 (1-4) 得

$$\lambda=\frac{BP}{PA}=\frac{\frac{3}{2}|AB|}{-\frac{1}{2}|AB|}=-3$$

再由式 (1-5) 得

$$x=\frac{-2+(-3)\times 4}{1+(-3)}=\frac{-14}{-2}=7$$

故 P 点的坐标是 7 。

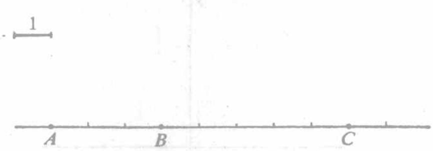
习题 1-1（1）

1. 轴与数轴有什么区别？建立一条数轴应具有哪些条件？

2. 轴上的有向线段 AB，有向线段 AB 的值，有向线段 AB 的长度，这三者在意义上有什么不同？它们的表示方法有什么不同？

3. 在下图中，求：

AB、BC、AC 的值和它们的长度。



（第 3 题）

4. 在数轴上求出下列各点，已知它们的坐标是：

（1）$-\frac{5}{3}$，（2）4，（3）π，（4）0 。

5. 已知数轴上有 $A(-3)$、$B(4)$、$C(7)$ 三点，求：

（1）AB、BA、BC、CA 的值；

（2）$BC+CA+AB$ 的值。

6. 在数轴上求下列每两点间的距离：

（1）$A(-3)$ 与 $B(5)$，（2）$C(2)$ 与 $D(-6)$， （3） $E(-7)$与$F(-8)$，（4） $G(-2)$与$O(0)$。

7．求下列每两点间的中点坐标：

（1） $A(-5)$与$B(3)$，（2） $E(5)$与$F(-3)$，

（3） $P(-5)$与$Q(-3)$，（4） $C(a)$与$D(-a)$。

8．把$A(-2)$与$B(4)$两点间的线段，依照下列所给的比λ把AB分成两段，求分点的坐标：

（1） $\lambda=1$，（2） $\lambda=4$，（3） $\lambda=-3$，

（4） $\lambda=\frac{1}{3}$，（5） $\lambda=0$，（6） $\lambda=-0.25$。

9．数轴上有$A(5)$、$B(3)$两点，在轴上求一点C，使$AC=3AB$，问C点的坐标怎样？

四、平面上的直角坐标系

1．直角坐标系的建立　为了确定平面上点的位置：

（1）在平面上选定两条互相垂直的直线，并指定正方向（用箭头表示）。

（2）两条直线的交点O作为原点。

（3）选取任意长的线段作为两直线的公共单位长度。这样，在平面上就建立了一个直角坐标系（图1-12）。

这两条互相垂直的直线叫做**坐标轴**。习惯上把其中的一条放在水平的位置上，从左到右的方向是它的正向，这条轴叫做**横坐标轴**，简称为**横轴**或 **x 轴**。与x垂直的一条叫做**纵坐标轴**，简称为**纵轴**或 **y 轴**，从下到上的方向是它的正向。两轴的公共原点O叫做**坐标原点**。

2．平面上点的坐标　建立了平面直角坐标系之后，便可以使平面上任意一点P的位置用两个有一定次序的数来决定。其方法是：由P点分别向x轴和y轴作垂线，交点分别为M和N，见图1-13，设x轴上有向线段OM的值为a，y轴上有向线段ON的值为b。称a为P点的**横坐标**（简称**横标**），b为P点的**纵坐标**（简称**纵标**）。记成（a，b）或$P(a, b)$的形式，这样的一对有序实数（a，b）叫做P点的**坐标**。

反过来，如果已知一对实数（a，b），则可在平面上确定一点P的位置。其方法是：把a看成是x轴上某一条有向线段OM的值，把b看成是y轴上某一条有向线段ON的值，然后由M和N分别作x轴和y轴的垂线，这两条垂线的交点就是点P的位置。

由此得出结论，在平面上建立了坐标系后，平面上的点和一对有序的实数（a，b）之间，建立了一一对应的关系。一般，上述有序实数（a，b）常用（x，y）代替。在平面上

图　1-12

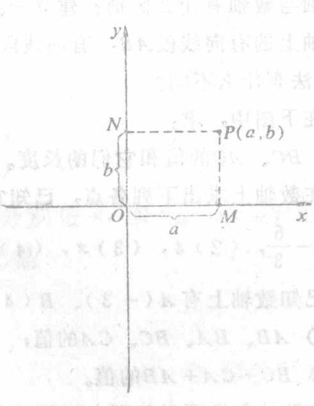


图　1-13

确定 x 轴和 y 轴，使平面上点的位置用它的坐标 (x, y) 来决定称为在平面上导入**坐标系** xOy。以后的章节中，常假定平面上已导入坐标系 xOy 而不再予以说明。

上述使平面上点的位置用两个有序的数（即点的坐标）来决定的方法，是 17 世纪法国数学家笛卡儿（Rene Descarte，1596～1650 年）所提出的，因此这种点的坐标也称为平面上点的笛卡儿直角坐标。

3. 象限和坐标的正负号　两坐标轴将平面分成四个部分。每一部分称为一个象限，见图 1-14。四个象限有一定的次序。根据数轴上有向线段的值，可知第Ⅰ象限内点的坐标正负号为 $(+,+)$，第Ⅱ象限内为 $(-,+)$，第Ⅲ象限内为 $(-,-)$，第Ⅳ象限内为 $(+,-)$。

坐标轴上的点不属于任何象限。在 x 轴正方向上的点，坐标正负号为 $(+,0)$；负方向上的点为 $(-,0)$。同理，在 y 轴正方向上的点，坐标正负号为 $(0,+)$；负方向上的点为 $(0,-)$。

例 6　在直角坐标系中作出下列各点

（1）$A(-5,3)$　　　　（2）$B(6,1)$

（3）$C(5,-2)$　　　　（4）$D(-4,-2)$

解　从坐标的正负号可知 A、B、C、D 四点分别属于第Ⅱ、Ⅰ、Ⅳ、Ⅲ象限，见图 1-15。

例 7　分别求点 $A(a, b)$ 关于 x 轴、y 轴和原点的对称点。

解　为了说明的方便，设 A 是第Ⅰ象限内的点，见图（1-16）。

（1）A 点关于 x 轴的对称点 B，其坐标为 $(a,-b)$

（2）A 点关于 y 轴的对称点 C，其坐标为 $(-a,b)$

（3）A 点关于原点的对称点 D，其坐标为 $(-a,-b)$

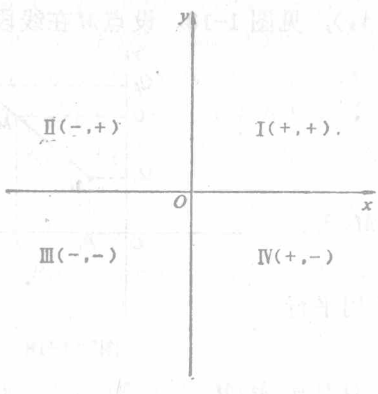


图　1-14

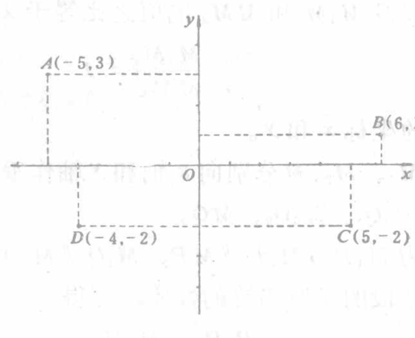


图　1-15

五、两点间的距离

设有两点 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$。现在要计算这两点间的距离 $d=|M_1M_2|$，见图1-17。从 M_1、M_2 分别向 x 轴和 y 轴作垂线 M_1A、M_2B、M_1C 和 M_2D。可知 $OB=x_2$，$OA=x_1$，$OD=y_2$，$OC=y_1$。

设 BM_2 与 CM_1 的延长线相交于 N，可知 $\triangle M_1NM_2$ 是一直角三角形，根据勾股定理，得

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2 \tag{1-7}$$

$$M_1N=AB=OB-OA=x_2-x_1$$

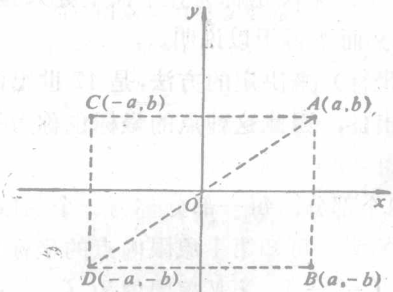


图 1-16

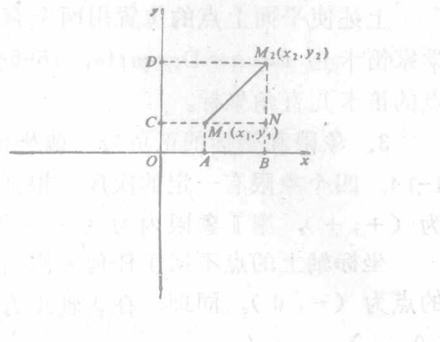


图 1-17

$$NM_2 = CD = OD - OC = y_2 - y_1$$

代入式（1-7）得

$$|M_1M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

故
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1\text{-}8)$$

例 8　求点（3，4）和点（6，0）间的距离

解　$d = \sqrt{(6-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$。

例 9　求点$M(x,y)$与坐标原点$O(0,0)$间的距离

解　$d = \sqrt{x^2 + y^2}$。

六、线段的定比分点

在平面内某一线段上两点$M_1(x_1, y_1)$和$M_2(x_2, y_2)$，见图 1-18。设点M在线段上且使两有向线段M_1M和MM_2的值之比等于λ，即

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$$

求点M的坐标x和y。

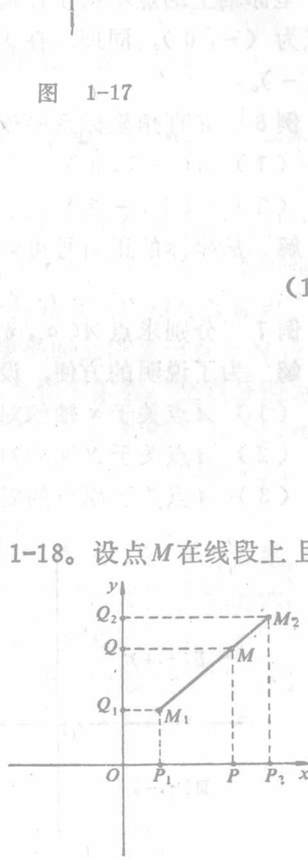


图 1-18

过M_1、M_2、M分别向x轴和y轴作垂线M_1P_1、M_2P_2、MP和M_1Q_1、M_2Q_2、MQ。

因为$M_1P_1 \parallel M_2P_2 \parallel MP$，$M_1Q_1 \parallel M_2Q_2 \parallel MQ$，利用平行线间诸线段的比值相等的性质，可得

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda \qquad \frac{Q_1Q}{QQ_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$$

根据式（1-3）知

$$P_1P = x - x_1 \qquad PP_2 = x_2 - x$$
$$Q_1Q = y - y_1 \qquad QQ_2 = y_2 - y$$

因此

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda \qquad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda$$

解出x、y便得出分点M的坐标公式：

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad (1\text{-}9)$$

如果 $\lambda = 1$，即点 M 为有向线段 M_1M_2 的中点时，得到中点坐标公式：

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (1\text{-}10)$$

例10 已知 $A(1,2)$ 和 $B(-1,4)$ 两点，求分割线段 AB 得比值为 $\frac{1}{2}$ 的点 M 的坐标。

解 $x_1 = 1$，$y_1 = 2$，$x_2 = -1$，$y_2 = 4$，$\lambda = \frac{1}{2}$

$$x = \frac{1 + \frac{1}{2}(-1)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \qquad y = \frac{2 + \frac{1}{2}(4)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{8}{3}$$

习题 1-1（2）

1. 在直角坐标系中作出下面各点，已知它们的坐标各为 $(3, -5)$，$(-2, 0)$，$(0, 4)$，$(-3, 5)$，$(3, 5)$，$(-3, -5)$

2. 求下列两点间关于 x 轴、y 轴和原点的对称点：

（1）$(2, 3)$ （2）$(1, -2)$

3. 求下列两点的距离：

（1）$(5, 1)$ 与 $(-3, -4)$

（2）$(-3, 0)$ 与 $(0, 5)$

（3）(a, b) 与 $(-a, b)$

（4）$(a\cos\theta, a\sin\theta)$ 与 $(0, 0)$

4. 在 x 轴上求一点 P，使 P 点到 $A(-4, 3)$ 和 $B(2, 6)$ 两点的距离相等。

5. 已知 P_1，P_2 两点的坐标，求分割线段 P_1P_2 所成的比是 λ 的分点坐标：

（1）$P_1(1, 2)$，$P_2(-1, 4)$，$\lambda = \frac{1}{2}$

（2）$P_1(-1, -6)$，$P_2(3, 0)$，$\lambda = -\frac{3}{4}$

（3）$P_1(2, 6)$，$P_2(-4, 8)$，$\lambda = -\frac{4}{3}$

6. 求连结下列两点的线段的中点坐标：

（1）$P(3, 2)$，$Q(7, 4)$；（2）$A(-3, 1)$，$B(2, 7)$

§1-2 曲线与方程

在初等几何学中，由于数学工具的限制，只就直线、折线和圆作了详细的讨论。但实用上需要研究更多的曲线。下面将利用坐标法对更多的曲线进行研究。

一条曲线可以当作是一个动点按照一定条件或规律运动所产生的轨迹。例如，线段 AB 的垂直平分线是跟 A、B 两点等距离的动点轨迹。这样，凡是曲线上的点都应该满足所说的

条件，而不在曲线上的点便不满足。既然，通过坐标法，平面上任何点已经同一对有序的实数（x，y）有了联系，因此可以利用曲线上任意点P（x，y）所必须满足而且只有曲线上的点才能满足的那个条件，推导出一个含有变量x与y的方程。如果这个方程被曲线上任意点的坐标所满足，而不被曲线外任意点的坐标所满足，那末曲线的几何性质必一一在这个方程中反映出来。因此完全可以用这个方程来表示考虑中的曲线。

定义 1　对应于平面内的一条已知曲线，如果有一个含有变量x、y的方程，且：

（1）凡是曲线上任意点的坐标都满足方程；

（2）凡是坐标满足方程的点都在曲线上（或曲线外任意点的坐标都不满足方程）；

那末，这个方程便称为该已知**曲线的方程**。

方程中所含有的曲线上任意点的坐标x与y叫做**流动坐标**。

一、从曲线求出它的方程

现在举一些例子，说明怎样根据条件建立曲线的方程。

例 1　联结两点$A(1,2)$和$B(-3,4)$得一线段$\overline{AB}$。求垂直且平分$\overline{AB}$的直线的方程。

解　设$P(x,y)$是垂直平分线上的任意点，见图 1-19。

从平面几何知道，这直线是与点A和点B距离相等的动点的轨迹。因此有

$$|AP|=|BP|$$

由距离公式（1-8）得：

$$|AP|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$
$$|BP|=\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}$$

所以

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2} \qquad (1\text{-}11)$$

显然，式（1-11）就是所求垂直平分线的方程。凡是这条垂直平分直线上的点的坐标都满足这个方程。如果点不在这条直线上，那末它的坐标都不能满足这个方程，因为这种点与点A和点B的距离不相等。

把式（1-11）的两边平方且化简　可得所求垂直平分线方程

$$2x-y+5=0$$

例 2　求中心在点$C(a,b)$，半径等于R的圆的方程。

解　设$P(x,y)$为圆周上的任意点，见图 1-20。

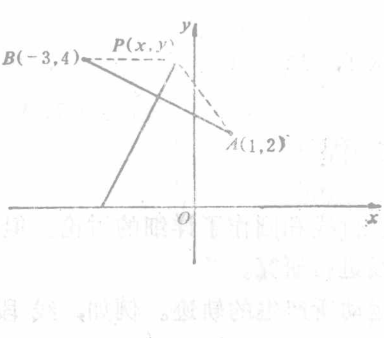


图　1-19

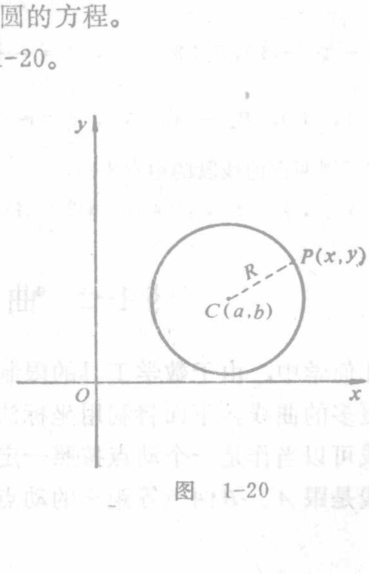


图　1-20

如果把圆看成是到定点C的距离等于R的动点的轨迹，则

$$|CP| = R$$

由距离公式（1-8）得

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$$

显然，这就是所求圆的方程。两边平方消除根号，得中心为点（a，b），半径等于R的圆的方程为：

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$$

从以上两例，可以归结出求曲线的方程的一般步骤如下：

1. 取点　取$P(x, y)$为曲线上的任意一点；
2. 列式　根据动点所应满足的条件（即运动规律），列出等式；
3. 代换　以解析几何的关系式代替上面的公式，得出关于x、y的一个方程；
4. 化简　整理化简后得所求方程。

二、从方程描出它的曲线

上面讨论了怎样从动点形成曲线的规律求出曲线的方程。现在来讨论怎样从一个已知方程作出它所表示的曲线的图形。

设已给一个含x和y二元方程，例如$2x+y-1=0$。一般说，它的解是无穷多的，即满足它的有序实数（x，y）有无穷多对。把每一对有序实数（x，y）当作平面内一点的坐标，就得到了坐标满足该方程的无穷多个点。

定义 2　平面内坐标满足一个已知方程$F(x, y)=0$的所有点的集合，称为该已知方程的图形。

如何作出一已知方程的曲线？在解析几何中，采用的基本方法是所谓的**描点法**。方法是这样的：先设定x为某些确定值，将这些值逐一代入方程中算出对应的y值（如果先设定y来计算x比较方便，也可以反过来做）。这样，每一对对应的数值是曲线上一个点的坐标。其次，按已算得的点的坐标把各点描下来。最后，通过各点作一平滑的曲线。这种描点法虽然不是一个很灵巧的方法，但它是解析几何中用来作图的一个基本方法。因此，必须给予充分重视。下面举一个具体例子说明这个方法。

例 3　作方程$y=x^2-2x-3$的图象

解　（1）算得对应的数值并列成表 1-1。

（2）描点。

（3）过各点连成光滑曲线，如图（1-21）。

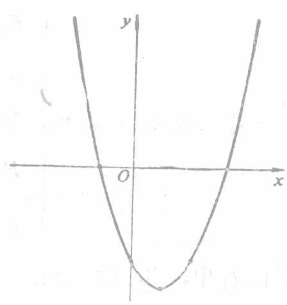


图　1-21

有几种特殊形式的方程值得讨论。

1. 方程可能仅含一个变量，但也确定着一条曲线。例如，$y-2=0$便定义了一条平行于x轴的直线$y=2$。方程$x+1=0$定义了一条平行于y轴的直线$x=-1$。

2. 假如方程$F(x, y)=0$的左侧可以分解为几个因子，那末令各因子分别等于零，可

表1-1　对应数值表

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	21	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12	21