普通高等教育电气工程与自动化（应用型）“十二五”规划教材

Fundamentals of Modern Control Theory

现代控制理论基础

◎ 王立国 主 编
◎ 冯 雷 刘英晖 副主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育电气工程与自动化（应用型）“十二五”规划教材

现代控制理论基础

主　编　王立国
副主编　冯　雷　刘英晖
参　编　韩光信　张　欣
主　审　翟玉文

机 械 工 业 出 版 社

本书主要介绍以状态空间方法为主的线性系统理论的基本内容和基本方法，包括状态空间的基本概念、状态空间表达式的建立及其求解、线性系统的可控性和可观性、极点配置、系统镇定及解耦问题、状态观测器原理及其设计方法、李雅普诺夫稳定性分析、最优控制理论等。同时，本书还适当介绍了相关内容的MATLAB仿真求解方法，以加深对相关知识的理解。

本书可作为普通工科院校自动化、测控技术与仪器、电气工程及其自动化等专业本科学生教材，也可供相关工程技术人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

现代控制理论基础/王立国主编. —北京：机械工业出版社，2012.4
普通高等教育电气工程与自动化（应用型）“十二五”规划教材
ISBN 978-7-111-37989-8

Ⅰ. ①现…　Ⅱ. ①王…　Ⅲ. ①现代控制理论—高等学校—教材
Ⅳ. ①O231

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第064708号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：徐　凡　责任编辑：徐　凡
版式设计：霍永明　责任校对：肖　琳
封面设计：张　静　责任印制：乔　宇
北京瑞德印刷有限公司印刷（三河市胜利装订厂装订）
2012年5月第1版第1次印刷
184mm×260mm · 18印张 · 445千字
标准书号：ISBN 978-7-111-37989-8
定价：35.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010)88361066	门户网：http://www.cmpbook.com
销售一部：(010)68326294	教材网：http://www.cmpedu.com
销售二部：(010)88379649	
读者购书热线：(010)88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　言

本书是一本现代控制理论的入门教材，主要介绍以状态空间方法为主的线性系统理论的基本内容和基本方法，包括状态空间的基本概念、状态空间表达式的建立及其求解、线性系统的可控性和可观性、极点配置、系统镇定及解耦问题、状态观测器原理及其设计方法、李雅普诺夫稳定性分析、最优控制理论等。同时，本书也适当介绍了所涉及的矩阵论、MATLAB 等知识。

本书编写的特点是，立足基础、注重实践、侧重基础理论的说明和应用，尽量避免无谓的公式推导和证明；注重体系的完整，强调现代控制理论的基本概念、基本原理和基本方法；例题、习题层次明晰，利于学生循序渐进地理解、消化和掌握所学的内容，逐步提高分析和解决问题的能力；与 MATLAB 等仿真工具交互，培养学生应用计算机辅助分析和设计控制系统的能力。

本书是编者结合长期从事现代控制理论教学的经验，在参阅并吸收部分国内外优秀教材内容的基础上编写而成的。此书出版前的讲义已在相关院校的现代控制理论课程教学中进行了多轮次的使用，并不断得到了修改和完善。

本书由吉林化工学院王立国任主编，长春工程学院冯雷、北华大学刘英晖任副主编。全书共 7 章，其中第 1、2、7 章由王立国编写，第 6 章由冯雷编写，第 3、4 章由刘英晖编写，第 5 章由长春工程学院张欣编写，附录由吉林化工学院韩光信编写。全书由王立国统稿，嘉兴学院翟玉文教授主审。

由于编者水平有限，书中难免有一些遗漏和不妥之处，敬请批评指正。

本书配有免费电子课件，欢迎选用本书作教材的老师登录 www. cmpedu. com 注册下载或发邮件到 xufan666@ 163. com 索取。

编　者

目　　录

第1章　绪　　论

1.1　控制理论的发展

控制理论是在人类的实践活动中发展起来的，是基于被控对象的数学模型，构建完成一定任务需要的人造系统的普遍性原理、理论和方法。控制理论来源于控制过程的实践，又反过来指导实践。

自动控制思想及其实践可以说历史悠久，它是人类在认识世界和改造世界的过程中产生的。古代中国、古埃及和古巴比伦都使用过自动计时漏壶。公元前4世纪，希腊柏拉图（Platon）首先使用了“控制论”一词。公元前300年，古希腊人设计出浮子控制器。公元235年，我国发明了按开环控制的自动指示方向的指南车。公元1086年左右，我国北宋时代的苏颂和韩公廉等人发明了按闭环控制原理工作的具有“天衡”自动调节结构和报时机构的水运仪象台。1681年，法国物理学家、发明家巴本（D. Papin）发明了用作安全调节装置的锅炉压力调节器。1765年，俄国人普尔佐诺夫（I. Polzunov）发明了蒸汽锅炉水位调节器。1788年，英国人瓦特（J. Watt）在他发明的蒸汽机上使用了离心调速器，解决了蒸汽机的速度控制问题，引起了人们对控制技术的重视。1868年，英国物理学家麦克斯韦（J. C. Maxwell）通过对调速系统线性常微分方程的建立和分析，解释了瓦特蒸汽机速度控制系统中出现的剧烈振荡的不稳定问题，提出了简单的稳定性代数判据，开辟了用数学方法研究控制系统的途径。1877年和1895年，英国数学家劳斯（E. J. Routh）和德国数学家胡尔维茨（A. Hurwitz）分别提出了直接根据代数方程的系数判别系统稳定性的准则。1892年，俄国数学家李雅普诺夫（A. M. Liyapunov）在其博士论文《论运动稳定性的一般问题》中提出了根据一种能量函数的正定性及其导数的负定性判别系统稳定性的准则，建立了从概念到方法的关于稳定性理论的完整体系。近现代以来，随着社会的发展和科学技术的进步，控制理论更是得到了极为迅速的发展。

一般来说，控制理论的发展可分为三个阶段。

1. 经典控制理论阶段

经典控制理论也称为古典控制理论，形成于20世纪30—50年代。该理论以传递函数为基础，主要是研究和解决单输入单输出（SISO）线性定常系统的分析和设计问题，采用传递函数、频率特性、根轨迹等经典的方法研究系统。对于非线性系统，除了线性化及渐近展开计算以外，主要采用相平面法和描述函数法进行研究。对于离散系统，主要采用z变换法进行研究。

主要代表人物和标志性成果：1927年，布莱克（H. S. Black）发明了负反馈放大器。1932年，奈奎斯特（H. Nyquist）提出了根据频率响应判别系统稳定性的奈奎斯特稳定判据，而且给出稳定裕量的概念。1940年，伯德（H. W. Bode）引入对数坐标系。1942年，哈里斯（H. Harris）引入传递函数概念。1945年，伯德发表《网络分析和反馈放大器设

计》，提出了基于频率响应的分析和综合反馈控制系统的理论和方法，即伯德图法。1948年，埃文斯（W. R. Evans）提出了根轨迹法。1948年，美国科学家维纳（N. Wiener）出版了专著《控制论（或关于在动物和机器中控制和通信的科学）》，系统地论述了控制理论的一般原理和方法，推广了反馈的概念，标志着控制理论作为一个独立的学科正式诞生。1954年，我国著名科学家钱学森出版《工程控制论》，又进一步推动了控制理论与工程技术的密切结合。

经典控制理论主要采用频域法和根轨迹法对系统进行分析和设计，具有物理意义明确、采用作图法分析系统、简单直观、计算量小、可以用实验方法建立系统数学模型等优点，能够很好地解决单输入单输出反馈控制系统的问题，因而受到工程技术人员的欢迎，并在武器控制和工业控制中得到了成功的应用。但经典控制理论具有明显的局限性，其显著的缺点是只能揭示输入—输出间的外部特性，难以揭示系统内部的结构特性，也难以有效应用于时变系统和多输入多输出（MIMO）系统。

2. 现代控制理论阶段

到了20世纪50年代末期，由于计算机技术、航空航天技术的迅速发展以及许多新的研究工具的引入，使控制理论进入一个快速发展时期，即现代控制理论阶段，并取得了很多重大成果。控制理论所研究的对象不再局限于单输入单输出、线性的、定常的、连续的系统，而扩展为多输入多输出、非线性的、时变的、离散的系统。研究内容涉及系统辨识、统计估计、线性控制、非线性控制、最优控制、鲁棒控制、自适应控制、控制系统CAD等理论和方法。其中，线性系统理论是发展最为完善也是最活跃的分支，它以线性代数和微分方程为主要数学工具、以状态空间法为基础分析和设计控制系统。运用状态空间法描述输入—状态—输出诸变量间的因果关系，不但反映了系统的输入—输出外部特性，而且揭示了系统内部的结构特性。在状态空间法的基础上，又先后出现了线性系统的几何理论、线性系统的代数理论和线性系统的多变量频域方法等。现代控制理论分析和综合系统的目标是在揭示其内在规律的基础上，实现系统在某种意义上的最优化，同时使控制系统的结构不再限于单纯的闭环形式。

主要代表人物和标志性成果：1957年，美国学者贝尔曼（R. Bellman）发表了《动态规划理论在控制过程中的应用》，提出了寻找最优控制的动态规划法。1958年，卡尔曼（R. E. Kalman）提出递推估计的自动优化控制原理。1958年，前苏联院士庞特里亚金（Л. С. Понтрягин）提出极小值原理。1959年，卡尔曼和伯策姆（Bertram）在美国达拉斯召开的“自动控制年会”上严谨地介绍了非线性系统的稳定性，讨论了自适应控制系统，并首次提出了现代控制理论。随后，卡尔曼又发表了《控制系统的一般理论》、《线性估计和辨识问题的新结果》，引入状态空间分析系统，提出可控性、可观测性、最优调节器和卡尔曼滤波等概念，奠定了现代控制理论的基础。1961年，庞特里亚金在《最优过程的数学理论》中证明并发表了极小值原理，促进了最优控制理论的发展。1967年，阿斯特勒姆（K. J. Astrom）提出最小二乘辨识方法，解决了线性定常系统的参数估计问题和定阶方法，并和朗道（L. D. Landau）等人在自适应控制理论和应用方面做出了贡献。1970年，罗森布罗克（H. H. Rosenbroek）等人提出多变量频域控制理论和多项式矩阵方法。1973年，旺纳姆（W. M. Wonham）发表了《线性多变量控制：一种几何方法》，创立和发展了线性系统的几何理论。1975年，麦克法伦（A. G. MacFalane）提出特征轨迹法。

现代控制理论以状态空间模型为基础，研究系统内部的结构特性，提出了可控性、可观测性等重要概念，并给出了很多设计方法。首先获得实际应用的是 20 世纪 60 年代出现的各种空间技术，然而把它应用到一般工业控制中，却遇到了一些困难。同时，与经典控制理论一样，现代控制理论的分析和综合都是建立在严格、精确的数学模型基础之上的。随着被控对象的复杂性、不确定性和大规模，环境的复杂性，以及控制任务的多目标性和时变性，传统的基于精确数学模型的控制理论的局限性日益凸显。

3. 智能控制理论阶段

20 世纪 60 年代末期，面对复杂的被控对象、复杂的环境、复杂的控制任务，传统的控制理论和方法已经不能满足不断提高的控制要求，于是出现了智能控制理论。所谓智能控制是一种能更好地模仿人类智能（学习、推理等），能适应不断变化的环境，能处理多种信息，能以安全可靠的方式进行规划、产生和执行控制作用，并获得系统全局最优性能指标的控制方法。智能控制理论是控制理论发展的高级阶段，它所采用的理论和方法主要源于控制论、人工智能、信息论、计算机科学、运筹学等学科。智能控制理论主要包括专家控制理论、模糊控制理论、神经网络控制理论等。

主要代表人物和标志性成果：1960 年，史密斯（F. W. Smith）首先采用性能模式识别器来学习最优控制方法。1965 年，美国的菲根鲍姆（Fegenbaum）研制了世界上第一个专家系统 DENDRAL；加利福尼亚大学的扎德（L. A. Zadeh）提出了模糊集合理论，奠定了模糊控制的基础；美国普渡大学电气工程系的美籍华人傅京孙（K. S. Fu）教授将人工智能中的直觉推理方法用于学习控制系统。1966 年，门德尔（J. M. Mendel）在空间飞行器的学习系统中应用了人工智能技术，并提出了“人工智能控制”的概念。1968 年，Leondes 等人首先正式使用“智能控制”一词，并把记忆、分解等一些简单的人工智能技术用于学习控制系统，提高了系统处理不确定性问题的能力，智能控制思想开始萌芽。1968 年，傅京孙和桑托斯（E. S. Saridis）等学者从控制论角度总结了人工智能技术与自适应、自组织、自学习控制的关系，提出了智能控制就是人工智能技术与控制理论的交叉的二元论，创立了人机交互式分级递阶智能控制的系统结构，并在核反应堆、城市交通的控制中应用了智能控制系统。1974 年，英国学者马丹尼（Mandani）提出了基于模糊语言描述控制规则的模糊控制器，将模糊集和模糊语言逻辑用于工业过程控制，之后又成功地研制出自组织模糊控制器，使得模糊控制器的智能化水平有了较大提高。1977 年，桑托斯在二元论基础上，引入了运筹学，提出了三元论的智能控制概念。1982 年，Fox 等人完成了一个称为 ISIS 的加工车间调度的专家系统。1985 年，美国电气及电子工程师学会（IEEE）在纽约召开了“第一届全球智能控制学术研讨会”，标志着智能控制作为一个学科分支正式被学术界接受。1986 年，鲁梅尔哈特（Rumelhart）提出了人工神经网络的“递推”学习算法（简称 BP 算法）。1987 年，在费城举行的国际会议上，提出了智能控制是自动控制、人工智能、运筹学和信息论相结合的四元论的概念。

近年来，智能控制技术在国内外已有了较大的发展，已进入工程化、实用化阶段。但作为一门新兴的学科，尽管其理论体系还远没有经典控制理论和现代控制理论那样成熟和完善，但智能控制理论和应用研究所取得的成果显示出其旺盛的生命力，受到相关学者和工程技术人员的关注。随着科学技术的发展，智能控制的应用领域将不断拓展，理论和技术也必将得到不断的发展和完善。

1.2　现代控制理论的基本内容

科学在发展，控制理论也在不断发展。所以“现代”两个字加在“控制理论”前面，其含义会给人误解的。实际上，人们所说的“现代控制理论”指的是20世纪50—60年代所产生的一些控制理论，主要包括线性系统理论、最优滤波理论、系统辨识理论、最优控制理论、自适应控制理论、非线性系统理论等。

1. 线性系统理论

线性系统理论是现代控制理论中最基本、最成熟的分支之一，它一方面在过程控制、航空航天等领域的应用中起到了重要作用，另一方面也为现代控制理论的其他分支提供了基础。线性系统理论主要研究线性系统状态的运行规律和改变这些规律的可能性与实施方法，建立和揭示系统结构、参数、运行和性能之间的关系。它除了包括系统的可控性、可观性、稳定性分析之外，还包括状态反馈、状态估计及补偿器的理论和设计方法等内容。

线性系统理论大体有四个平行的分支，即线性系统的状态空间法、线性系统的几何理论、线性系统的代数理论和线性系统的多变量频域方法。状态空间法是一种时域方法，理论完整、成熟，线性系统理论的其他分支，都是在状态空间法的影响和推动下形成和发展起来的。

2. 最优滤波理论

最优滤波理论所研究的对象是由随机微分方程或随机差分方程所描述的随机系统。由于这类系统除了具有描述系统与外部联系的输入、输出之外，还具有承受不确定因素（随机噪声）的作用，因此最优滤波理论就是研究利用被噪声污染的测量数据，按照某种判别准则，获得有用信号的最优估计。卡尔曼滤波理论用状态空间法设计的最佳滤波器，实用性强且可适用于非平稳过程，是最优滤波理论的一大突破。

3. 系统辨识理论

要研究系统的状态，对系统进行分析和设计，首先应该建立系统的数学模型。但是，由于系统的复杂性，并不总是可以通过解析的方法来直接建立起数学模型。所谓系统辨识就是在系统输入输出实验数据的基础上，从一组给定的模型类中确定一个与所测系统本质特征相等价的模型。模型的结构已经确定，只需用输入输出的测量数据来确定其参数的，叫做参数估计；而同时确定模型结构和参数的；则泛称为系统辨识。

4. 最优控制理论

最优控制就是在给定限制条件和性能指标下，寻找使系统性能在一定意义下为最优的控制规律。这里所说的“限制条件”是指物理上对系统所施加的一些限制，而“性能指标”是为评价系统的优劣人为规定的标准，它是以系统在整个工作期间的性能作为一个整体而出现的。在解决最优控制问题中，庞特里亚金的极小值原理和贝尔曼的动态规划法是两种最重要的方法。

5. 自适应控制理论

自适应控制是指随时辨识系统的数学模型，并按此模型去调整最优控制律。其基本思想是，当被控对象内部的结构和参数以及外部的环境干扰存在不确定性时，在系统运行期间，系统自身能对有关信息实现在线测量和处理，从而不断地修正系统结构的有关参数和控制作

用，使之处于所要求的最优状态，得到人们所期望的控制结果。常用的自适应控制器方案有编程控制、模型参考自适应和自校正控制。

6. 非线性系统理论

非线性系统理论主要研究非线性系统的运动规律和改变这些规律的可能性与实施方法，建立和揭示系统结构、参数、运行和性能之间的关系。它主要包括可控性、可观性、稳定性、线性化、解耦控制等理论。

1.3　本书的内容和特点

尽管现代控制理论的内容极其丰富，但作为本科生来说，开设这门课程的目的，是使学生掌握现代控制理论的基础内容和基本方法，并为以后深入学习本学科的其他分支打下必要的基础。因而，本书主要介绍以状态空间方法为主的线性系统理论的基本内容及其基本应用。原因有三个：一是大多数在其正常范围内工作的物理系统均能用线性模型描述；二是线性系统具有完整的理论并且其模型能用标准方法求解；三是线性系统理论是研究非线性系统的基础。

本书主要内容如下：

1）控制系统的状态空间描述，包括状态空间的基本概念、动态方程模型的建立、动态方程的线性变换及其标准型。

2）线性系统状态空间表达式的解，包括动态方程的求解、状态转移矩阵的计算。

3）线性系统的可控性、可观性及其与传递函数之间的关系、动态方程的结构分解。

4）线性定常系统的状态反馈和状态观测器，包括单输入线性系统的状态反馈极点配置方法、系统镇定及解耦问题、输出反馈与极点配置，以及状态观测器原理及其设计方法、分离定理。

5）李雅普诺夫稳定性分析。

6）最优控制，包括一般概念、变分法、极小值原理的应用，线性二次型最优控制问题的求解、动态规划原理及应用。

7）基于 MATLAB 的反馈控制系统分析与设计方法等。

本书适用于普通工科院校自动化、测控技术与仪器、电气工程及其自动化等电类专业本科学生。在编写过程中，本书突出基础性、实用性，其特点定位如下：

1）注重体系的完整，强调现代控制理论的基本概念、基本原理和基本方法。

2）例题、习题层次明晰，利于学生循序渐进地理解、消化和掌握所学的内容，逐步提高分析和解决问题的能力。

3）与 MATLAB 等仿真工具交互，培养学生应用计算机辅助分析和设计控制系统的能力。

4）立足基础、注重实践、侧重基础理论的说明和应用，尽量避免无谓的公式推导和证明，突出现代工程师人才培养特色和要求。

本书的第 1 ~ 6 章为重点内容，第 7 章为选学内容。附录部分对本书涉及的矩阵论、MATLAB 等知识进行了介绍。建议讲授总学时为 40 ~ 48 学时，其中理论为 32 ~ 40 学时、实验为 8 学时，可根据实际情况对内容进行取舍并确定教学时数。

第 2 章　控制系统的状态空间描述

2.1　引言

在经典控制理论中，通常采用高阶微分方程或传递函数来描述系统，这些数学模型只描述了系统输入量和输出量之间的关系，称为外部模型。而实际上，系统除了输入和输出量以外，还包含其他若干相互独立的变量，它们在建立经典控制理论数学模型的过程中被当做中间变量消掉了，无法得到描述。

在现代控制理论中，引入了状态变量、状态空间等概念，通常采用状态空间表达式作为描述系统的数学模型，用时域法对系统进行分析和综合。状态空间表达式是一阶微分方程组，它描述了输入量、输出量和系统状态变量之间的关系，揭示了系统内部状态的运行规律，反映了控制系统的全部信息，所以也称为系统内部模型。同时采用向量—矩阵表示方法，可使系统的数学模型简洁明了，易于计算机求解，也为多输入多输出及时变系统的分析提供了有力的工具。

2.2　状态空间的基本概念

1. 状态

从哲学的角度看，所谓“状态”是指客体在特定的时空条件下存在的具体方式，它是客体最重要的特征、属性的各种综合，标志客体的总体性特征。从自然科学角度看，“状态”一词指的是物质系统所处的状况。物质系统的状态常常可以用一些物理量来表征。例如：质点的机械运动状态要由质点的位置和动量来确定；由一定质量气体组成的系统的热力学状态由系统的温度、压强和体积来描述。在外界作用下，物质系统的状态将随时间而变化。

2. 状态变量

状态变量是能完全表征系统运行状态的最小数目的一组变量。这里所说的“完全”是指系统所有可能的状况都能表示出来。状态变量在某一时刻的值称为系统在该时刻的状态。对于状态变量的定义说明如下：

1）所谓完全，指当且仅当给定了变量组在 $t=t_0$ 时刻的值，那么只要知道 $t \geq t_0$ 时的输入量 $\boldsymbol{u}_i(t)(i=1, 2, \cdots, r)$，就能够唯一确定这一变量组本身及输出量 $y_j(t)(j=1, 2, \cdots, m)$ 在 $t \geq t_0$ 时的一切值。

2）所谓最小，是指变量组中的每个变量相互间线性独立。

3）只要符合定义中的条件，任何一组变量，都可以选为状态变量，即状态变量具有非唯一性。一个由 n 阶微分方程描述的系统，就有 n 个独立的储能元件，有 n 个状态变量。常用符号 $x_1(t)$，$x_2(t)$，$\cdots$，$x_n(t)$ 表示系统的状态变量。

4）在具体的工程问题中，通常选择具有明确物理意义、能够直接被测量的物理量作为状态变量，以便于实现状态的反馈等设计要求，如电流、电压、温度、流量、液位等。

3. 状态向量

设一个系统有 n 个状态变量，即 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$，用这 n 个状态变量作为分量构成的向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 称为该系统的状态向量。记为

$$\boldsymbol{x}(t)=[x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t)]^{\mathrm{T}} \tag{2-1}$$

或

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{2-2}$$

4. 状态空间

由 n 个状态变量 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$ 作为坐标轴所构成的 n 维空间，称为状态空间。

状态空间中的每一个点，对应于系统的某一特定状态。反之，系统在任何时刻的状态，都可以用状态空间中的一个点来表示。如果给定了初始时刻 t_0 的状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 和 $t\geqslant t_0$ 时的输入函数，则随着时间的推移，$\boldsymbol{x}(t)$ 将在状态空间中描绘出一条轨迹，称为状态轨迹或状态轨线。

引入了状态和状态空间的概念之后，就可以建立动力学系统的状态空间描述了。从结构的角度讲，一个动力学系统可用图 2-1 所示的框图来表示。其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 表征系统的状态变量，$\boldsymbol{u}(t)$ 为系统控制量（即输入量），$\boldsymbol{y}(t)$ 为系统的输出变量。与输入—输出描述不同，状态空间描述把系统动态过程的描述考虑为一个更为细致的过程：输入引起系统状态的变化，而状态和输入则决定了输出的变化。

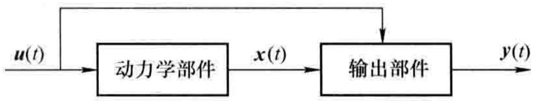


图 2-1　动力学系统结构框图

5. 状态方程

状态方程是描述系统状态变量与输入量之间关系的一阶微分方程组（连续系统）或一阶差分方程组（离散系统）。系统的状态方程表征了系统由输入引起的内部状态变化的规律。连续系统和离散系统状态方程的一般形式可分别表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t] \tag{2-3}$$

或

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k] \tag{2-4}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)$ 为连续系统的 n 维状态向量；$\boldsymbol{x}(k)$ 为离散系统在 k 时刻的 n 维状态向量；$\boldsymbol{u}(t)$ 为连续系统的 r 维输入（控制）向量；$\boldsymbol{u}(k)$ 为离散系统在 k 时刻的 r 维输入向量；$\boldsymbol{f}(\cdot)$ 为 n 维向量函数。

例如，设单输入线性定常连续系统的状态变量为 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$，输入为 $u(t)$，则该连续系统一般形式的状态方程为

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1u(t) \\
\dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2u(t) \\
\quad\vdots \\
\dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_nu(t)
\end{cases} \tag{2-5}
$$

式（2-5）可写成向量—矩阵形式

$$
\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \tag{2-6}
$$

或

$$
\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \tag{2-7}
$$

式中

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

6. 输出方程

在指定系统输出的情况下，输出方程是描述系统输出量与状态变量、输入量之间关系的代数方程。连续系统和离散系统输出方程的一般形式可分别表示为

$$
\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] \tag{2-8}
$$

或

$$
\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k), k] \tag{2-9}
$$

式中，$\boldsymbol{y}(t)$ 为连续系统的 m 维输出向量；$\boldsymbol{y}(k)$ 为离散系统在 k 时刻的 m 维输出向量；$\boldsymbol{g}(\cdot)$ 为 m 维向量函数。

例如，单输出线性定常系统

$$
y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) + \boldsymbol{d}u(t) \tag{2-10}
$$

其向量—矩阵形式为

$$
y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{d}u(t) \tag{2-11}
$$

或

$$
y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}u \tag{2-12}
$$

7. 状态空间表达式

状态方程与输出方程组合起来，构成对系统的一种完全的描述，称为状态空间表达式，又称为动态方程。其一般形式为

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] \\
\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]
\end{cases} \tag{2-13}
$$

或

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k),\ \boldsymbol{u}(k),\ k]\\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(k),\ \boldsymbol{u}(k),\ k]\end{cases} \tag{2-14}$$

例如，单输入单输出（SISO）线性定常系统状态空间表达式为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u\\ y=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}u\end{cases} \tag{2-15}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{h}u(k)\\ y(k)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{d}u(k)\end{cases} \tag{2-16}$$

多输入多输出（MIMO）线性定常系统状态空间表达式为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{cases} \tag{2-17}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k)\\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)\end{cases} \tag{2-18}$$

注意：由于 $\boldsymbol{A}$（或 $\boldsymbol{G}$）、$\boldsymbol{B}$（或 $\boldsymbol{H}$）、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 矩阵完整地表征了系统的动态特性，所以有时把一个确定的连续时间系统简称为系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{D})$、把一个确定的离散时间系统简称为系统 $\Sigma(\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{H},\ \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{D})$。

系统矩阵 $\boldsymbol{A}$（或 $\boldsymbol{G}$）：表示系统内部各状态变量之间的关联情况。

控制矩阵 $\boldsymbol{B}$（或 $\boldsymbol{H}$）：表示输入对每个状态变量的作用情况。

输出矩阵 $\boldsymbol{C}$：表示输出与每个状态变量之间的组成关系。

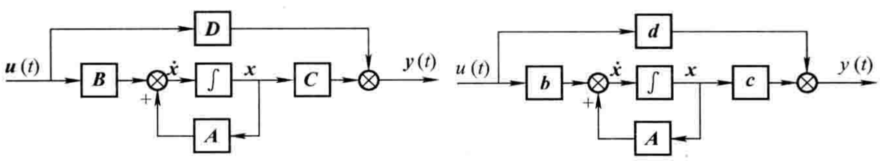
前馈矩阵 $\boldsymbol{D}$：表示输入对输出的直接传递关系。一般控制系统中，通常情况 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$。

8. 状态变量图

与经典控制理论相类似，可以用结构图表示系统信号的传递关系，但在现代控制理论中，一般称为状态变量图。状态空间表达式（2-17）和式（2-15）对应的状态变量图如图 2-2a和 b 所示。图中每一方块的输入输出关系规定为

输出向量 =（方块所示矩阵）×（输入向量）

注意：在向量、矩阵的乘法运算中，相乘顺序不允许任意颠倒。



a) 多输入多输出系统　　b) 单输入单输出系统

图 2-2　线性连续系统状态变量图

9. 状态空间分析法

在状态空间中以状态向量或状态变量描述系统的方法，称为状态空间分析法或状态变量法。

状态空间分析法的优点是便于采用向量、矩阵等简化数学描述，便于在计算机上求解，容易考虑初始条件，能够了解系统内部状态的变化特性，适用于描述时变、非线性、连续、离散、随机、多变量等各类系统，便于应用现代设计方法实现最优控制、自适应控制等。

2.3　线性系统状态空间表达式的建立

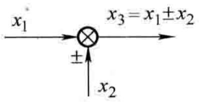
建立状态空间表达式的方法一般有四种：一是由控制系统的结构图通过等效变换，变换为状态变量图来建立；二是直接根据实际物理系统的机理建立相应的微分方程或差分方程，继而选择有关的物理量作为状态变量，从而导出其状态空间表达式；三是由描述系统的微分方程建立；四是由系统的传递函数建立。

在状态空间分析中，采用模拟计算机的模拟结构图（状态变量图）来表示各状态变量之间的信息传递关系，这对于建立系统的状态空间表达式很有帮助。因此在讲述状态空间表达式建立方法之前，先介绍一下有关状态变量图的知识。

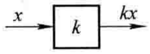
状态变量图有三种基本符号：

1）积分器

2）加法器



3）比例器



例 2-1　已知系统状态空间表达式如下，试画出系统状态变量图。

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = x_3 \\
\dot{x}_3 = -6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + u
\end{cases}
$$

$$y = x_1 + x_2$$

解　系统状态变量图如图 2-3 所示。

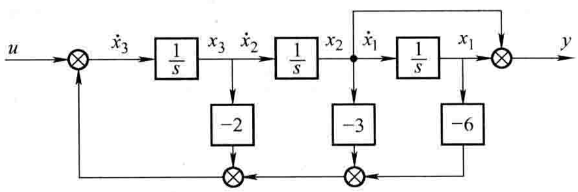


图 2-3　例 2-1 系统状态变量图