# 最优控制理论与应用

解学书

Optimal Control Theor'' and Application

清华大学出版社

# 最　优　控　制

## ——理 论 与 应 用

解学书　编著

清华大学出版社

## 内容简介

本书以介绍确定性最优控制理论、应用及数值计算为主，其中包括：变分法及开集约束条件下变分问题；连续及离散极大值原理；时间、燃料最优控制；动态规划，Hamilton-Jacobi 方程，微分动态规划；线性二次型最优调节器的分析、综合，加权阵选择，灵敏度分析，非零给定点调节器，PI调节器，最优跟踪；离散及采样系统的最优控制；准最优控制及摄动反馈控制；奇异最优控制及奇异弧的必要条件；黎卡提方程的数值解法以及矩阵、向量导数，参数最优化方法等。

本书可作为大学自动控制与自动化专业的研究生教材，其中大部分基本内容亦可作本科大学生教材，或供控制工程师及有关专业师生自学参考之用。

**最优控制**
——理论与应用
解学书 编著

清华大学出版社出版
（北京清华园）
北京京辉印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

☆

开本：850×1168 1/32　印张：$19\frac{5}{8}$　字数：527千字
1986年7月第1版　1986年7月第1次印刷
印数：00001～6500
书号：15235·217　　定价：平装3.90元
精装5.00元

# 前　言

本世纪五十年代末，六十年代初，在空间技术发展和数字计算机实用化的推动下，动态系统的优化理论得到迅速的发展，形成了一个重要的学科分支——最优控制。廿多年来动态系统优化理论不仅有了许多成功的应用，而且，已经越出自动控制的传统界限，它在空间技术、系统工程、经济管理与决策、人口控制等许多领域都有越来越广泛的应用，收到日益显著的效果，并有许多饶有兴趣的新发展。也许正是由于这些原因，人们对于最优控制的兴趣经久不衰，至今它仍然是一个相当活跃的学科领域。

最优控制已经成为从事自动化工作科技人员必备的知识。在我国它已经普遍地列入大学自动控制与自动化专业的教学计划，而对于研究生，则几乎成为必修的学位课了。

这本书是在以往最优控制课程的讲稿、讲义基础上，经删改和充实而写成的。尽管其中大部分内容为清华大学自动化系研究生、高年级学生和工程技术人员控制理论学习班多次讲授过，但是，由于笔者水平有限，书中缺点错误仍在所难免，请读者不吝指正。

本书主要介绍确定性最优控制理论、应用及计算方法。全书共十二章：第二、三、五章系统地介绍了变分法、极大值原理和动态规划的内容、方法、运用条件及相互关系，是本书的重点之一；第四章介绍一种常见的时间、燃料最优控制系统，并借此说明极大值原理的典型运用；第六、七、八、九章对连续、离散和采样最优调节器进行了深入的分析讨论，是书中另一个重点内容；第十、十一章的准最优控制和奇异最优控制对多数读者则属于补充提高的内容；第十二章收集了迄今各种有实用价值的黎卡提方程数值解法，内容新颖；假定读者已有矩阵论和系统理论的一般

知识，通过学习第一章和书后面的两个附录还可以得到必要的补充；书中习题和举例为读者提供一些练习机会，而每章后面的参考文献将有助于读者深入学习、研究。为了使读者准确地理解理论的涵义、运用条件并掌握必要的技巧，书中介绍了某些定理、引理、命题的有启发性的证明，有些读者也可以不必去理会这些证明过程本身。所以，这本书可作为研究生教材，也可以选择其中大部分内容作为本科生教材，或供控制工程师及有关专业师生自学参考之用。

鉴于孙增圻老师在最优控制、特别是在采样系统最优调节器方面的成就与专长，特邀请他为本书撰写了第九章。感谢他的支持与合作！

本书编写过程中，一直受到清华大学吴麒教授和中国科学院系统科学研究所韩京清研究员热情鼓励与支持。韩京清同志还对全书乃至部分章节的编写提出许多宝贵意见，在此特致谢意！

解学书

1984.12.于清华园

# 目　录

# 绪　论

## 0.1　最优控制问题举例

最优控制问题是从大量实际问题中提炼出来的，它尤其与航空、航天、航海的制导、导航和控制技术密不可分。这里我们举几个易于说明问题的例子。

**例 0.1　飞船的月球软着陆问题**

飞船靠其发动机产生一与月球重力方向相反的推力$f$，赖以控制飞船实现软着陆（落到月球上时速度为零）。问题要求选择一最好发动机推力程序$f(t)$，使燃料消耗最少。

设飞船质量为$m$，它的高度和垂直速度分别为$h$和$v$，月球的重力加速度可视为常数$g$。飞船的自身质量及所带燃料分别是$M$和$F$。

飞船自某一$t=0$时刻开始进入着陆过程。易知其运动方程为

$$\left.\begin{aligned} \dot{h} &= v \\ \dot{v} &= \frac{f}{m} - g \\ \dot{m} &= -kf \end{aligned}\right\} \tag{0.1.1}$$

其中$k$是一常数。

要求控制飞船从初始状态

$$h(0) = h_0, \quad v(0) = v_0, \quad m(0) = M + F \tag{0.1.2}$$

出发，在某一终端时刻$t_f$实现软着陆，即

$$h(t_f)=0, \quad v(t_f)=0 \tag{0.1.3}$$

控制过程中推力$f(t)$不能超过发动机所能提供的最大推力 $f_{max}$，即

$$0\leqslant f(t)\leqslant f_{max} \tag{0.1.4}$$

满足上述约束，使飞船实现软着陆的推力程序$f(t)$非止一种，其中消耗燃料最少的才是问题所要求的最好推力程序。易见，问题可归结为求

$$J=m(t_f) \tag{0.1.5}$$

最大的数学问题

例 0.2 防天拦截问题 所谓防天拦截系指发射火箭拦击敌方洲际导弹或其他航天武器。

设 $\boldsymbol{x}(t)$、$\boldsymbol{v}(t)$分别表示拦截器 $L$ 与目标 $M$ 的相对位置向量和相对速度向量。$\boldsymbol{a}(t)$是相对加速度向量，包括空气动力与地心引力所产生的加速度在内，它是 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{v}$的函数。既然位置向量和速度向量是由运动微分方程所确定的时间函数，因此，相对加速度也可看成时间的函数。设 $m(t)$是拦截器的质量，$F(t)$是其推力的大小。$\boldsymbol{u}$ 是拦截器推力方向的单位向量，$C$ 是有效喷气速度，可视为常数。于是，拦截器与目标的相对运动方程能写成

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{v} \\ \dot{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{a}(t)+\frac{F(t)}{m(t)}\boldsymbol{u} \\ \dot{m} &= -\frac{F(t)}{C} \end{aligned}\right\} \tag{0.1.6}$$

初始条件为

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{v}(t_0)=\boldsymbol{v}_0,\ m(t_0)=m_0 \tag{0.1.7}$$

对拦截器既要控制其推力$F(t)$的大小，又要控制推力的方向 $\boldsymbol{u}$，火箭的最大推力$F_{max}$是一有限值，瞬时推力$F(t)$应满足

$$0\leqslant F(t)\leqslant F_{max} \tag{0.1.8}$$

至于单位向量 $\boldsymbol{u}$，它可表为

$$|\boldsymbol{u}|^2=\boldsymbol{u}^\tau\boldsymbol{u}=1 \qquad (0.1.9)$$

其中 $|\boldsymbol{u}|$ 表示向量 $\boldsymbol{u}$ 的长度

$$|\boldsymbol{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$$

也就是说，$\boldsymbol{u}$ 的幅度为1，其方向不受限制。

要求控制拦截器从相对于目标的初始状态（0.1.7）出发，在某末态时刻 $t_f$ 与目标相遇（实现拦截），即

$$\boldsymbol{x}(t_f)=0 \qquad (0.1.10)$$

末态时刻的质量 $m(t_f)$ 应满足

$$m(t_f)\geqslant m_e \qquad (0.1.11)$$

这里 $m_e$ 是所有燃料耗尽后火箭的质量。

一般地说，达到上述控制目标的 $F(t)$、$\boldsymbol{u}(t)$ 和 $t_f$ 并非唯一。为了实现快速拦截，并尽可能地节省燃料，可将性能指标取为

$$J=\int_{t_0}^{t_f}[C_1+F(t)]dt \qquad (0.1.12)$$

问题归结为选择 $F(t)$、$\boldsymbol{u}(t)$ 和 $t_f$，除达到拦截的目的外，还要使规定的性能指标为最小。此即在（0.1.12）性能指标意义下的最优拦截问题。

**例 0.3　空对空导弹拦截**

为了简化叙述，假定导弹与目标的运动发生在同一个水平面内。这就是说，假定能产生充分大的铅垂方向升力以抵消导弹的重量。还假定导弹推力方向与其速度方向一致，即假定在水平方向的侧滑角能忽略不计，导弹的飞行方向与导弹的对称轴方向一致。此外，还假定目标以定常速度、定常航向飞行。此种假设并非过份局限。实际上，导弹按此种假设所形成的控制律飞行，直至收到关于目标下一次新的量测为止。根据新的量测再形成新的控制律，如此反复进行，直至与目标遭遇。当测量采样间隔充分小时，关于目标常速常航向的假设离实际情况相差并不太远。

在上述假设下目标的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_m &= v_m\cos\psi_m\\ \dot{y}_m &= v_m\sin\psi_m\\ \dot{v}_m &= 0\end{aligned}\right\}\qquad(0.1.13)$$

这里（$x_m$，$y_m$）是目标在坐标平面内的位置，$v_m$是目标的线速度，$\psi_m$是目标运动方向与$x$轴的夹角（见图0.1）。

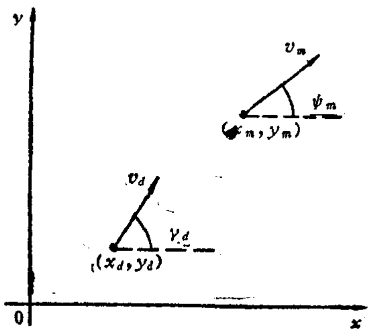

图 0.1

设$m$表示导弹$L$的质量。$(x_d, y_d)$表示导弹在坐标平面内位置。$v_d$是导弹的飞行速度，$v_d$的方向与$x$轴的夹角为$\gamma_d$。设$F$表示导弹的侧向控制力。$c$是推进剂的排出速度，可视为常数。用$\beta$表示推进剂秒流量，它是另一个控制量，用$K_d$表示导弹的阻力因子，它等于

$$Kd = \frac{1}{2}c_0\rho S$$

这里$c_0$表示零升力阻力系数，可视为常数。$\rho$是大气密度，也可以看作常数。$S$是导弹参考面积。将$F$和$\beta$看作两个独立的控制量，这时导弹的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_d &= v_d\cos\gamma_d\\ \dot{y}_d &= v_d\sin\gamma_d\\ \dot{v}_d &= \frac{1}{m}(c\beta - K_d v_d^2)\\ \dot{\gamma}_d &= \frac{1}{v_d}\frac{F}{m}\\ \dot{m} &= -\beta\end{aligned}\right\}\qquad(0.1.14)$$

令$x=x_m-x_d$，$y=y_m-y_d$．取状态变量与控制变量分别为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6]^{\tau} \\
&\triangleq [x \quad y \quad v_d \quad r_d \quad m \quad v_m]^{\tau} \\
\boldsymbol{u} &= [u_1 \quad u_2]^{\tau}
\end{aligned}
$$

则可得到状态方程为

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_6 \cos \psi_m - x_3 \cos x_4 \\
\dot{x}_2 &= x_6 \sin \psi_m - x_3 \sin x_4 \\
\dot{x}_3 &= \frac{1}{x_5}(cu_1 - K_d \ x_3^2) \\
\dot{x}_4 &= \frac{u_2}{x_3 x_5} \\
\dot{x}_5 &= -u_1 \\
\dot{x}_6 &= 0
\end{aligned}
\right\} \quad (0.1.15)
$$

问题是从已知的初始状态$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$出发，选择适当的控制律$\beta(t)$、$F(t)$，$t_0 \leqslant t \leqslant t_f$，使得在某末态时刻$t_f$尽可能接近目标，同时，尽可能地节省控制能量。为此，取性能指标为

$$
J = \boldsymbol{x}^{\tau}(t_f)S\boldsymbol{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{u}^{\tau}(t)R(t)\boldsymbol{u}(t)dt \quad (0.1.16)
$$

这里$R(t)$和$S$均为对角线型加权系数矩阵。

$$
R = \begin{bmatrix} r_1(t) & 0 \\ 0 & r_2(t) \end{bmatrix}
$$

$$
S = \mathrm{diag}\,[s_1 \quad s_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]
$$

式(0.1.16)中右边第一项是末态时刻$t_f$导弹与目标距离的一种度量，此距离常称脱靶量。而第二项则表示控制过程所消耗的能量。

## 0.2 问题的提法

从前面的举例中可以看出通常的最优控制问题可以抽象成共

同的数学问题。可以预期这会对最优控制理论的研究带来方便，所谓最优控制问题的提法，就是将通常的最优控制问题抽象成一个数学问题，并用数学语言严格地表述出来。在叙述提法之前，我们先结合前述例子，讨论一些基本概念。

（1）受控系统的数学模型

一般地说，描述和解决最优控制问题首先要建立受控系统的数学模型，即动态系统的微分方程。对于前面所举的例子，经合理的简化，根据动力学、运动学的基本定律，可以直接写出描述动态系统运动规律的微分方程。复杂的受控系统往往难以用解析的方法列出微分方程，这就需要通过“辨识”的途径确定系统的结构与参数，从而建立系统的数学模型。

不论用何种方法，一个集中参数的受控系统总可以用一组一阶常微分方程来描述，此即状态方程。一般地可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ t) \tag{0.2.1}$$

其中$\boldsymbol{x}=[x_1\ \ x_2\cdots\cdots x_n]^T$是$n$维的状态向量，$\boldsymbol{u}=[u_1\ \ u_2\cdots\cdots u_r]^T$是$r$维控制向量，$t$是实数自变量。$\boldsymbol{f}=[f_1\ \ f_2\cdots\cdots f_n]^T$是$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{u}$和$t$的$n$维函数向量。式（0.2.1）状态方程不仅能概括前述三例，它还可以概括一切具有集中参数的受控系统数学模型、定常非线性系统、线性时变系统及线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)、\boldsymbol{u}(t)] \tag{0.2.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t)+B(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{0.2.3}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t) \tag{0.2.4}$$

都是式（0.2.1）系统的一种特例。

（2）目标集

动态系统（0.2.1）在控制$\boldsymbol{u}(t)$的作用下总要发生从一个状态到另一个状态的转移。如果把状态视为$n$维欧氏空间中的一个点，那么，这种状态转移就可以理解为$n$维空间中点的运动。在最优控制问题中，起始状态（称初态）通常是已知的，即$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$。而所达到的状态（称末态），它是控制所要达到的目标，因

问题而异，它可以是状态空间的一个固定点，更为一般的情况是末态要落在事先规定的范围内。比如例 0.1 要求末态 $h(t_f)=0$，$v(t_f)=0$，$m(t_f)\geqslant M$ 它是三维状态空间中的一个线段；例 0.2要求 $x(t_f)=0$，$v(t_f)$ 自由，$m(t_f)\geqslant m_e$，它是七维状态空间中一个集合，也就是说，末态 $x(t_f)$ 有些分量是固定的数，有些可以在一定范围内变化，甚至可以是任意的。一般地说对末态的要求可以用如下的末态约束条件来表示

$$\left.\begin{aligned}g_1(x(t_f),\ t_f)=0\\ g_2(x(t_f),\ t_f)\leqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{0.2.4}$$

它们概括了对末态的一般要求。实际上，末态约束规定了状态空间的一个时变或非时变的集合，此种满足末态约束的状态集合称为目标集，记为 $M$，并可表述为

$M=\{x(t_f):\ x(t_f)\in R^n,\ g_1(x(t_f),t_f)=0, g_2(x(t_f),t_f)\leqslant 0\}$，为简单计，有时末态约束式（0.2.4）笼统地称为目标集。

例 0.4 问题对末态的所有分量都没有限制，因而目标集 $M$ 是整个 $n$ 维状态空间 $R^n$。需要指出，没有规定末态约束并不说明对末态没有要求；比如例 0.3，因为目标机动，拦截只可能是一个逐步逼近的过程，且拦截导弹具有一定的杀伤范围，所以，问题本身只要求导弹最后尽可能接近目标，即 $x_1(t_f)$、$x_2(t_f)$ 都接近于零，并不要求导弹与目标完全相遇。这里控制所要达到的目标不是通过规定目标集，而是通过使脱靶量尽可能小的性能指标体现出来。

至于末态时刻 $t_f$，它可以事先规定，也可以是未定的。例 0.1和例 0.2中的末态时刻 $t_f$ 并未事先规定，甚至 $t_f$ 成为性能指标的一部分（例0.2），因此，$t_f$ 也是一个有待选择的量。

有时初态也没有完全给定，这时，初态集合可以类似地用初态约束来表示。

（3）容许控制

控制向量 $u$ 的各个分量 $u_i$ 往往是具有不同物理属性的控制量。

例如舵偏角、电磁力矩、电流、电压以及例0.1中推力和例0.2中燃料秒流量等等。在实际控制问题中，大多数控制量受客观条件的限制只能取值于一定范围。比如例0.1的推力$f(t)$和例0.2的燃料秒流量$\beta(t)$都不能超过容许的最大值。这种限制通常可用如下不等式约束来表示

$$0\leqslant u(t)\leqslant u_{max} \tag{0.2.5}$$

或

$$|u_i|\leqslant \alpha \qquad i=1,2,\cdots,r \tag{0.2.6}$$

式（0.2.6）表示一个控制空间$R^r$中包括原点在内的超方体，式（0.2.5）和式（0.2.6）都规定了$R^r$空间中的一个闭集。而例0.2中

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2=1$$

规定了$R^r$中一个开集。

上述由控制约束条件所规定的点集称为控制域，并用$U$记之。凡在闭区间$[t_0, t_f]$上有定义，且在控制域$U$内取值的每一个控制函数$u(t)$均称为容许控制，并记为$u(t)\in U$。

通常假定容许控制$\boldsymbol{u}(t)\in U$是一有界连续函数或者是分段连续函数。

需要指出，控制域为开集或闭集其处理方法有很大差别。后者的处理较难，结果也很复杂。例0.3中的控制量$\beta$、$F$本来是受约束的，但为了处理方便结果简单起见，问题没有通过规定控制域来考虑对控制的限制，而是把它们取做性能指标的一部分，通过最小化性能指标对控制量的取值加以限制。

（4）性能指标

从给定初态$\boldsymbol{x}(t_0)$到目标集$M$的转移可通过不同的控制律$\boldsymbol{u}(t)$来实现，为了在各种可行的控制律中找出一种效果最好的控制，这就需要首先建立一种评价控制效果好坏或控制品质优劣的性能指标函数。比如，例0.1中只把节省燃料这个经济指标作为性能指标；例0.2中则把快速拦截和节省燃料这两个要求加以折衷考虑。可以预期这样设计出来的控制系统既是控制过程足够