THEORY OF BOOLEAN METHODS

# 布尔方法论

刘永才　张卫

上海科学技术文献出版社
SHANGHAI SCIENTIFIC AND TECHNOLOGICAL
LITERATURE PUBLISHING HOUSE

# 布尔方法论

刘永才　张　卫

上海科学技术文献出版社

(沪)新登字301号


布尔方法论

刘永才　张　卫

*

上海科学技术文献出版社出版发行

(上海市武康路2号)

全国新华书店经销

上海科技文献出版社昆山联营厂印刷

*

开本850×1168　1/32　印张17.25　字数480000

1993年5月第1版　1993年5月第1次印刷

印数：1—1,700

ISBN 7-5439-0115-3/O·76

定价：15.00元

科技新书目：284-288

# 序

本书的目的是系统介绍布尔函数，伪布尔函数，广义布尔函数理论、方法和它们在多个领域中的应用。这些系统理论的建立，发展当然与它们的共同基础——布尔代数密切相关。

布尔代数的建立首先归功于英国数学家 G. Boole (1815～1864)，Boole 出生于英格兰的林肯城，他的父亲是一位鞋匠，但却有志于光学仪器的制造。由于家境贫困，Boole 从 16 岁起就以教师职业谋生。1834 年，林肯城创立了机械学院，聘请他的父亲任阅览室管理员。该阅览室经常收到英国皇家学会的出版物，同时还保存着 I. Newton 的名著: Principia 和其它经典名著。青年时代，Boole 的大部分业余时间在阅览室中渡过。当学院决定树立一座牛顿半身塑象时，学院指定他作一个关于牛顿的学术报告，这篇报告就是他的第一篇科学论文。由于 Boole 多年来在分析算子中的贡献，1844 年获得皇家学会的金质奖章。尽管当时他并没有正式大学学历，五年后，Boole 被指定为科克城的 Queen 学院的数学主席。1857 年，被选为英国皇家学会会员。由于 A.De Morgan 和 W. R. Hamilton 之间的争论激起了 Boole 对逻辑学的兴趣。他在 1847 年和 1854 年分别在剑桥和伦敦发表的两本著作: The Mathematical Analysis of Logic. Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning 和 Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probaility 标志着近代逻辑的开始。这两本著作均运用数学方法研究了类与类，集合与集合，客体与客体之间的关系法则，这种研究后来发展成为一个数学分支——布尔代数。

此后，不少学者对布尔代数的一般化作了不少努力。值得提

到的是 E. V. Huntington, H. M. Sheffer 和 M. H. Stone 在奠基工作上作出了贡献。G. Birkhoff 和 S. MacLane 对布尔代数的严谨处理作了研究，其中以 Stone 的工作最为特出，可以说他的研究对布尔代数的发展开创了一个新阶段。1938 年，C. E. Shannon 的论文：A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits 开创了开关代数，使布尔代数在工艺技术中的应用开辟了广阔的道路。

在经典分析中，依赖于微积分方法和组合技术所各自产生的问题有着明显的区别。随着电子计算机的发展，二者之间的区别开始变得模糊了。特别在注意力集中于结构的最优化时，他们之间的区别开始消失了。由于二态器件的制造成功，使得布尔代数在开关电路的设计和分析上取得了极大的应用。这是以二值变元为基础，运用数学手段解决技术问题的一个典范。由此很自然地想到，在近代控制理论，数学经济学，运筹学，生物工程学，图论和组合学等领域所遇到的大量问题是否也能运用二值变元加以处理呢？1957 年，G. B. Dantzig 首先指出了这类问题存在的广泛性和运用二值变元解决的可能性。与此同时，大量文章纷纷发表，研究得到进一步的深入。P. L. Hammer 和 S. Rudeanu 总结了同期科学家的工作，系统地提出了伪布尔函数理论，解决了存在于决策过程，思维逻辑，网络理论，图论和运筹学等领域大量优化问题的分析和实用算法。R. Bellman 称赞他们的工作是布尔技术方向上的重要且有决定性的一步。

到了七八十年代，随着 VLSI 技术的发展，一方面给新颖、高速电子计算机的建造提供了物质基础，另一方面对计算机理论科学研究提出了更迫切的要求。由于计算机设计思想的不断更新，与之相适应的是一些新兴学科，如多值逻辑，模糊语言和自动机，模糊最优化也逐渐为人们熟知。罗马尼亚学者 N. Tăndăreanu 自 1981 年起，先后发表关于广义布尔函数的多篇论文，他将处理二值变元的布尔函数，伪布尔函数作了极大限度的推广。由此使二值逻辑，多值逻辑和模糊逻辑有了统一处理的可能性。广义布尔

函数成了计算机科学的重要理论支柱。自 1984 年起，作者刘永才提出了布尔函数单调分解的理论和方法。单调分解法打破了常规合并相邻小项的布尔函数化简法，采用由布尔函数展开式的和项或积项的直接构造法，这在组合逻辑综合中开创一个新的途径。1986 年他又在结构和计数方面充实了广义布尔函数理论。近年来，从美国 RUTCOR 和 DIMACS 的技术报告可以看出，目前已经形成了以 Hammer 教授为首的一批学者和博士生为完善布尔函数系统理论、方法和应用正从事着有效的工作。

布尔方法从问世开始就与应用技术密切相关。目前，从已有的技术资料可以看出，在图论(稳定集，核，着色分解，匹配，隔离集和亏等)，排序，时间表安排，任务分配，决策过程优化，极小化自动机，程序分段和最小纠错码等课题都能运用布尔方法建立统一的数学模型，运用计算机给出最佳结果。1990 年，美国 Rutgers 大学 CAIP 研究中心的 M. L. Bushnell 教授在 ARIDAM V 国际研讨会上介绍了他与 S. T. Chakradhar, V. D. Agrawal 一起关于神经网络的最新研究成果。他们将电路的信号分析和故障诊断归结为神经网络能量函数的极小化。神经网络的能量函数是伪布尔平方函数，这使得 Hammer 教授等人在伪布尔平方函数领域所作的研究成果，如迭代法和随机松弛法有了重大的应用。由此，对于一般是 NP——完全的电路故障测试问题，对于一类$(k, K)$电路给出了多项式算法，这是一个重大的突破。

我们坚信，布尔方法有着强大的生命力，一旦为广大科技工作者掌握后，必定会在各个技术领域取得丰硕成果。

**刘永才** 教授，中国离散数学学会常务理事。从事布尔函数理论与应用，智能离散数据处理和神经网络等方面研究。分别在国际和国内杂志，年会上发表六篇和四十余篇论文并撰写了七本专(译)著。

**张 卫** 华东化工学院计算机应用教研室主任，中国惠普公司上海分公司计算机高级顾问。在国内、外杂志和学术会议上发表卅余篇论著。

# 内容提要

本书介绍布尔函数，伪布尔函数，广义布尔函数系统理论、方法和它们在多个领域中的应用。全书共分十章，第一、二章为预备知识；第三章介绍布尔方程和布尔不等式的求解；第四、五、六、七章介绍伪布尔方程和伪布尔不等式的求解，极值和优化；第八章介绍广义布尔函数；第九、十章介绍布尔方法在多个领域中的应用。每章都配备适量的例题，以便读者研讨和推演。

本书有很多材料来自于美国RUTCOR和DIMACS两个研究中心提供的最新研究报告和作者近年来公开发表的研究成果。理论联系实际，经典结合近代，适合于作计算机科学系，应用数学系，自动控制系和经济管理系有关专业师生的教材或参考书，也可供有关工程技术人员的自学参考。

# 前　言

1984 年，为了参加第三届全国离散数学学术交流会，准备撰写一篇论文。整天苦思冥想，约三月余，一天突然受微积分学中一条著名定理：任一函数均可分解为偶函数与奇函数之和的启发，考虑布尔函数是否也可分解呢？由此撰写了布尔函数单调分解理论的首篇论文，该文于 1986 年发表于计算机学报。此后，在布尔函数的单调分解方面，无论是理论、方法、应用和性能评估上发表了一系列文章(见参考文献)，与此同时，布尔函数的单调分解还受到了美国 Rutgers 大学 RUTCOR 主任 Peter L. Hammer 教授的重视。他在计算机理论各领域的学术造诣很高，又是 Discrete Mathematics 和 Discrete Applied Mathematics 两本杂志的主编，布尔函数系统理论研究也是他有很大建树的方面之一。1986 年起，我们建立了工作上的联系。从此，RUTCOR 向我们提供每年的研究报告，使我们有了布尔函数领域最新，也是较全的技术资料。1990 年 4 月，刘永才有幸接受 Hammer 教授的邀请，去 RUTCOR 访问研究两月余。在此期间，结识了不少学者，得到了多种启迪，作出了一些新的科研成果。回国后，在张卫的建议下，我们两人协作撰写了本书，希望在国内填补一个空白。

全书共分十章，前八章介绍布尔函数，伪布尔函数，广义布尔函数系统理论、方法和优化。后两章介绍布尔方法在图论和其它多个领域中的应用。每章都附有例题，供读者研讨、推演用。本书的素材大部分来自有关论文，各论文的符号体系并不一致。为了统一符号，我们花了不少时间，如有疏漏，望读者谅解。

本书的第一章和第二章第一、二节由张卫执笔。第二章第三、四节和第三章至第十章由刘永才执笔。

本书的工作纳入上海市自然科学基金和 863 计划资助的课

题。感谢所有为本书出力的单位和有关人士。

作者：刘永才　上海科学技术大学

张　卫　华东化工学院

1992年元月

# 目　录

# 第一章 布 尔 代 数

早期布尔代数是用来研究逻辑思维法则的。1847年英国逻辑学家G. Boole著文《逻辑之数学的分析》和《思维法则的研究》，从而奠定了逻辑代数的基础。随后，不少学者对布尔代数的研究作出了不少贡献。特别是1938年，C. E. Shannon开创了开关代数，使人们进一步认识到布尔代数中的两种基本运算“并”和“交”分别与电路的“并联”和“串联”之间有着内在的联系，从而开创了布尔代数在逻辑电路设计中的广泛应用。近年来，随着计算机科学和自动化控制技术的突飞猛进，布尔代数作为一个强有力的理论支柱，越来越被人们所接受和重视。

由于本章大部分内容已为读者所熟悉，为了便于读者的查阅及本书的系统性，作一简单回顾。

## 1.1 二值布尔代数 $B_2$

本节讨论最简单的布尔代数——二值布尔代数 $B_2$。

**定义 1.1** 一个二元集合 $B_2=\{0, 1\}$ 上定义了一个一元逻辑运算：求反（$^-$），两个二元逻辑运算：并（逻辑加）（$\cup$）和交（逻辑乘）（$\cdot$），就称为二值布尔代数，记为 $\langle B_2, \cup, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$，其中三个逻辑运算见表1.1。

表 1.1

| $x$ | $y$ | $\bar{x}$ | $x\cup y$ | $x\cdot y$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

为了方便起见，我们常将 $x \cdot y$ 简记为 $xy$。并且约定这三个逻辑运算的优先级别为：取反运算最高，交运算其次，并运算最低。

由表 1.1 可以直接验证：对于任意 $x, y, z \in B_2$，有以下公式成立。

交换律 $$\begin{cases} x \cup y = y \cup x \\ xy = yx \end{cases} \tag{1.1}$$

结合律 $$\begin{cases} x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z \\ x(yz) = (xy)z \end{cases} \tag{1.2}$$

吸收律 $$\begin{cases} x \cup xy = x \\ x(x \cup y) = x \end{cases} \tag{1.3}$$

幂等律 $$\begin{cases} x \cup x = x \\ x \cdot x = x \end{cases} \tag{1.4}$$

分配律 $$\begin{cases} x \cup yz = (x \cup y)(x \cup z) \\ x(y \cup z) = xy \cup xz \end{cases} \tag{1.5}$$

对合律 $$\bar{\bar{x}} = x \tag{1.6}$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} x \cup 1 = 1 \\ x \cdot 0 = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\begin{cases} x \cup 0 = x \\ x \cdot 1 = x \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} x \cup y = 0 & \text{当且仅当 } x = y = 0 \\ xy = 1 & \text{当且仅当 } x = y = 1 \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} x \cup y = 1 & \text{当且仅当 } x = 1 \text{ 或 } y = 1 \\ xy = 0 & \text{当且仅当 } x = 0 \text{ 或 } y = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\begin{cases} x \cup \bar{x} = 1 \\ x \cdot \bar{x} = 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} \overline{x \cup y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \\ \overline{xy} = \bar{x} \cup \bar{y} \end{cases} \tag{1.13}$$

$$\begin{cases} x \cup \bar{x}y = x \cup y \\ x(\bar{x} \cup y) = xy \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} x\leqslant y \quad \text{当且仅当 } x\cup y=y \\ x\leqslant y \quad \text{当且仅当 } xy=x \end{cases} \tag{1.15}$$

$$\begin{cases} x\leqslant x\cup y,\ y\leqslant x\cup y \\ xy\leqslant x,\ xy\leqslant y \end{cases} \tag{1.16}$$

$$\begin{cases} x\leqslant z \text{ 且 } y\leqslant z \quad \text{当且仅当 } x\cup y\leqslant z \\ z\leqslant x \text{ 且 } z\leqslant y \quad \text{当且仅当 } z\leqslant xy \end{cases} \tag{1.17}$$

$$\begin{cases} x\leqslant y \quad \text{蕴含 } xz\leqslant yz \\ x\leqslant y \quad \text{蕴含 } x\cup z\leqslant y\cup z \end{cases} \tag{1.18}$$

$$\begin{cases} x\leqslant y \quad \text{当且仅当 } \bar{x}\cup y=1 \\ x\leqslant y \quad \text{当且仅当 } x\bar{y}=0 \end{cases} \tag{1.19}$$

$$\begin{cases} x=y \quad \text{当且仅当 } x\bar{y}\cup \bar{x}y=0 \\ x=y \quad \text{当且仅当} (x\cup \bar{y})(\bar{x}\cup y)=1 \end{cases} \tag{1.20}$$

$$\begin{cases} x\cup y=x+y-xy \\ \bar{x}=1-x \\ \overline{x\cup y}=(1-x)(1-y) \end{cases} \tag{1.21}$$

对于上述公式有几点说明:

(1) (1.1)～(1.5)式是最基本的公式，他们可作为带有偏序关系的代数系统——格的定义。另外，(1.4)式可从(1.3)式推出。由(1.3)式得 $x\cup xy=x$，将该式中 $y$ 换为 $x\cup y$，得 $x\cup x(x\cup y)=x$，再由(1.3)式 $x(x\cup y)=x$，代入得 $x\cup x=x$。

(2) (1.6)～(1.11)式都是关于 $B_2$ 中任意元素 $x$, $y$ 与 0 和 1 的一些关系式。(1.7)式说明 0 和 1 分别是 $B_2$ 的全下界和全上界。(1.12)式表示 $x$ 与 $\bar{x}$ 互为补元。

(3) (1.7), (1.15)～(1.19)式中的记号“$\leqslant$”表示数之间的小于等于。在下一节中我们将把它推广到元素之间的偏序关系。

(4) (1.13)式称为 De. Morgan 定律，这两个公式可以推广到 $n$ 个变元。即有:

$$\begin{cases} \overline{x_1\cup x_2\cup\cdots\cup x_n}=\bar{x}_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_n \\ \overline{x_1x_2\cdots x_n}=\bar{x}_1\cup\bar{x}_2\cup\cdots\cup\bar{x}_n \end{cases} \tag{1.22}$$

约定(1.22)式可简记为:

$$\begin{cases}\overline{\bigcup_{i=1}^{n} x_i}=\prod_{i=1}^{n}\bar{x}_i\\ \overline{\prod_{i=1}^{n} x_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{x}_i\end{cases}$$

(5) 在上述 21 个公式中除去(1.6), (1.7), (1.21)这三个公式外，其它 18 个公式都由两个式子组成。而且，我们若将“∪”与“·”互换，“0”与“1”互换，就可以从一个式子得到另一个式子，这样一个有规律的对称现象就称为对偶原理。对偶原理在布尔代数中均成立。因此，我们只要推出一组公式中的一个式子，由对偶原理就可得到另一个式子。

(6) 值得注意的是，(1.5)式告诉我们，不但“·”对“∪”有分配律，而且“∪”对“·”亦有分配律。

(7) (1.21)式建立了三个逻辑运算与代数运算之间的转换关系。

**例 1** 给定$\langle B_2, \cup, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$，对任意 $x, y, z\in B_2$，有：

(1) 若 $x\cup z=y\cup z$ 且 $xz=yz$，则 $x=y$

(2) 若 $x\cup z=y\cup z$ 且 $x\cup\bar{z}=y\cup\bar{z}$，则 $x=y$

(3) 若 $xz=yz$ 且 $x\bar{z}=y\bar{z}$，则 $x=y$。

**证明** (1) $x=x\cup xz=x\cup yz=(x\cup y)(x\cup z)=(x\cup y)(y\cup z)$
$=y\cup xz=y\cup yz=y$。

(2) $x=x\cup 0=x\cup z\bar{z}=(x\cup z)(x\cup\bar{z})=(y\cup z)(y\cup\bar{z})=y\cup z\bar{z}$
$=y\cup 0=y$。

(3) 对(2)作对偶变换即得。

除了定义 1.1 中给出的两个二元逻辑运算外，还存在一些常用的二元逻辑运算。

**定义 1.2** 给定二值布尔代数$\langle B_2, \cup, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$，对于任意 $x, y\in B_2$，称 $x\oplus y=x\bar{y}\cup\bar{x}y$ 为 $x$ 与 $y$ 的异或。称 $x\odot y=xy\cup\bar{x}\bar{y}$ 为 $x$ 与 $y$ 的同或。称 $x\uparrow y=\overline{xy}$ 为 $x$ 与 $y$ 的与非。称 $x\downarrow y=\overline{x\cup y}$ 为 $x$ 与 $y$ 的或非。

四个二元逻辑运算见表 1.2。