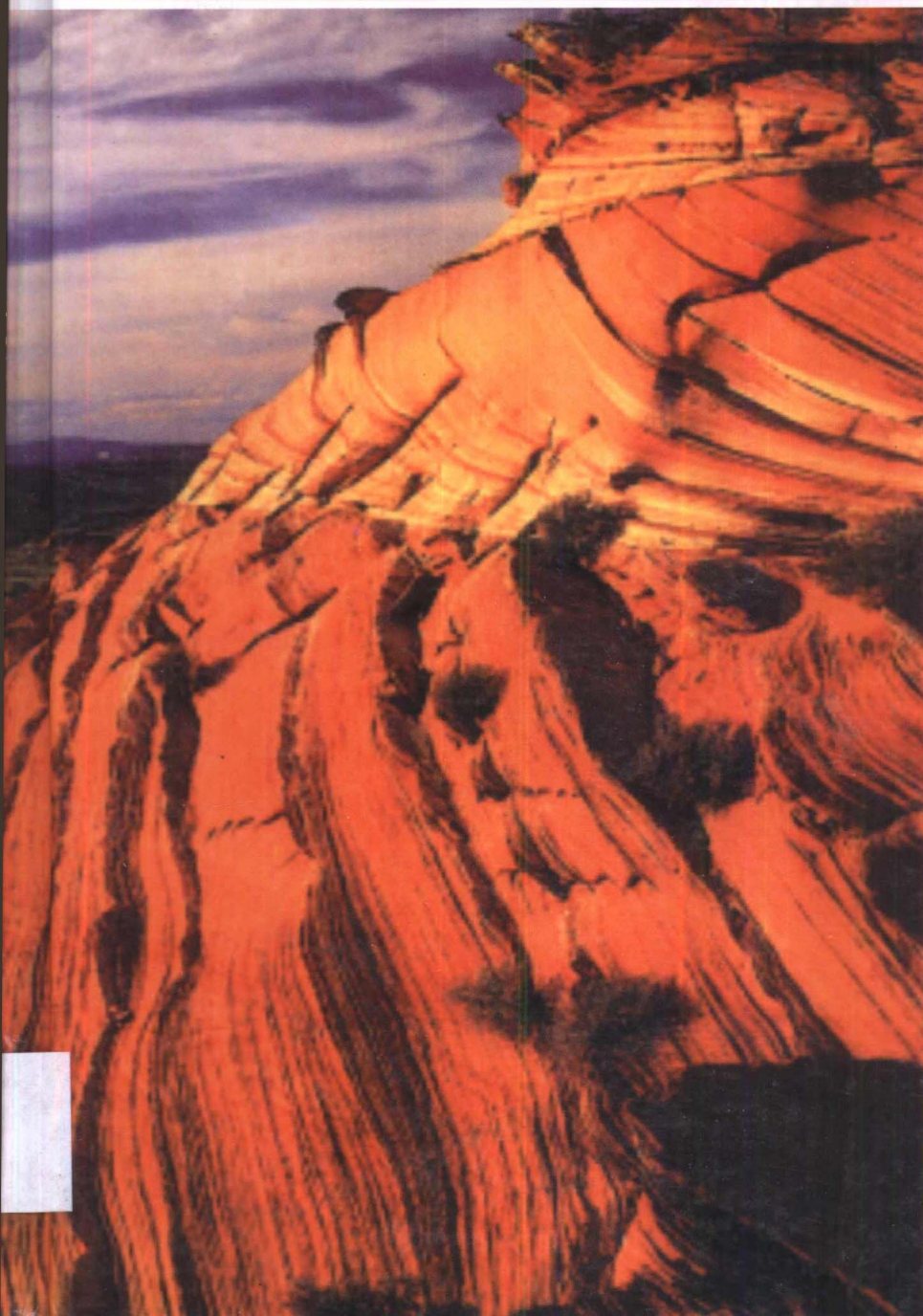


# 岩土工程有限元分析 理论与应用

谢康和 编著  
周 健

科学出版社



# 岩土工程有限元分析 理 论 与 应 用

谢康和 周 健 编著

科 学 出 版 社

2002

## 内 容 简 介

有限元理论在岩土工程分析中已得到广泛应用,近年来又有新的进展。本书结合作者多年从事的有关研究,较全面、系统、详细地介绍了岩土工程静力、动力和随机有限元分析理论、方法和应用。全书共分九章,包括绪论、岩土工程问题的边界条件、有限单元法基本理论、饱和土的静力有限元分析理论、饱和土的动力有限元分析理论、土的随机有限元理论、非饱和土的基本理论与有限元分析方法、岩土工程静力有限元分析程序 PDSS、有限元理论在岩土工程中的应用。

本书可供土建、水利、交通、铁道等部门从事勘察、设计、施工和科研的科技人员参考,也可作为高等院校相关专业本科生和研究生的参考教材。

### 图书在版编目(CIP)数据

岩土工程有限元分析理论与应用/谢康和,周 健编著. —北京:科学出版社,2002

ISBN 7-03-010152-9

I. 岩… II. ①谢… ②周… III. 岩土工程-有限元分析 N. TU4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 008923 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2002年5月第 一 版 开本:720×1000 B5

2002年5月第一次印刷 印张:21 1/4

印数:1—2 000 字数:416 000

定价:42.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

# 前 言

有限单元法作为工程数值分析中最强有力的工具,已在岩土工程分析中得到广泛应用,随着计算机技术的飞速发展,近年来在岩土工程领域取得了很大进展。为了较系统、全面地介绍岩土工程有限元分析的新技术和新方法,作者基于多年的有关研究积累和国内外学者的成果撰写了本书。

全书共分九章。第一章详细地阐述了岩土工程问题控制方程的建立步骤和方法、岩土工程总应力分析法和有效应力分析法的区别和内在联系,以及岩土工程问题数值解法的验证。第二章介绍了岩土工程问题的边界条件,包括静力问题的边界条件和动力问题的边界条件。第三章通过对加权残数法和 Galerkin 法的简单介绍阐述了有限单元法基本原理,并着重讨论了岩土工程有限元分析常用等参元及其特性,以及有限元中的数值积分方法。

第四章以饱和土 Biot 三维静力固结问题的有限元分析为例,系统详尽地阐述了岩土工程静力有限元分析理论和方法,包括 Biot 三维固结方程的空间和时间有限元离散、空间八结点单元固结矩阵等的元素计算式,以及三维固结问题的有限元法求解过程。第五章以饱和土的动力问题有限元分析为例,全面阐述了岩土工程动力有限元分析理论和方法,包括 Biot 动力固结方程的求解、有效应力动力分析法及其计算步骤、弹塑性动力分析方法,以及随机地震作用下的动力分析法。第六章阐述了岩土工程中的随机有限元基本理论,介绍了诸如地下水流问题、基坑边坡稳定、土体地震反应分析等典型问题的随机有限元方法。第七章在总结了非饱和土的现有研究成果的基础上,从非饱和土体的动力控制方程出发,阐述了非饱和土的动力有限元分析方法。第八章较详细地介绍了作者基于第四章有限元理论编制的岩土工程静力有限元分析程序 PDSS,包括该程序的主要功能与结构、数据格式及使用方法,并提供了完整的算例和输入输出样本以及源程序清单。第九章通过对袋装砂井地基固结、尾矿坝地震液化、饱和软粘土振陷、厚覆盖层软土地层的动力反应、软土地层隧道抗震稳定、地铁车站抗震稳定、灰渣坝抗震稳定等七个典型问题的有限元分析实例的介绍,说明了有限元理论在岩土工程分析中的应用。

本书面向土建、水利、交通、铁道等部门从事勘察、设计、施工和科研的技术人员和高等院校有关专业师生。内容安排注意了循序渐进、理论与实践的结合,阐述力求具体和完整,同时强调实用性。

全书第一、三、四、八章和第九章 9.1 节由浙江大学岩土工程研究所谢康和撰写,其余各章节由同济大学地下建筑与工程系周健、白冰撰写。与本书配套的部分有限元分析软件光盘也在制作中。

限于我们的水平,书中定会存在欠妥乃至错误之处,恳请读者批评指正。

# 目 录

## 前言

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| <b>第一章 绪论</b> .....           | 1  |
| 1.1 引言 .....                  | 1  |
| 1.2 岩土工程问题控制方程的建立 .....       | 2  |
| 1.2.1 土体平衡方程 .....            | 2  |
| 1.2.2 土体本构方程 .....            | 3  |
| 1.2.3 土体几何方程 .....            | 6  |
| 1.2.4 土体有效应力原理 .....          | 6  |
| 1.2.5 孔隙流体平衡方程 .....          | 7  |
| 1.2.6 渗流连续方程 .....            | 8  |
| 1.2.7 总控制方程 .....             | 9  |
| 1.3 岩土工程基本分析方法 .....          | 11 |
| 1.3.1 总应力分析法及其控制方程 .....      | 11 |
| 1.3.2 有效应力分析法及其控制方程 .....     | 13 |
| 1.3.3 总应力分析法与有效应力分析法的关系 ..... | 17 |
| 1.4 岩土工程问题数值解法的验证 .....       | 20 |
| 参考文献 .....                    | 23 |
| <b>第二章 岩土工程问题的边界条件</b> .....  | 25 |
| 2.1 概述 .....                  | 25 |
| 2.2 静力问题的边界条件 .....           | 25 |
| 2.2.1 静力边界条件的概念 .....         | 25 |
| 2.2.2 渗流问题中的边界条件 .....        | 26 |
| 2.2.3 固结分析中的边界条件 .....        | 27 |
| 2.3 动力问题的边界条件 .....           | 29 |
| 2.3.1 基本类型 .....              | 29 |
| 2.3.2 透射边界条件 .....            | 33 |
| 2.3.3 其它几种典型的边界条件 .....       | 41 |
| 参考文献 .....                    | 45 |
| <b>第三章 有限单元法基本理论</b> .....    | 47 |
| 3.1 概述 .....                  | 47 |
| 3.2 有限单元法与加权残数法的关系 .....      | 47 |

|            |                       |           |
|------------|-----------------------|-----------|
| 3.2.1      | 加权残数法                 | 47        |
| 3.2.2      | Galerkin 法            | 49        |
| 3.2.3      | 有限单元法                 | 49        |
| 3.3        | 等参元及其特性               | 50        |
| 3.3.1      | 等参元的坐标变换式             | 50        |
| 3.3.2      | 平面四结点等参元              | 51        |
| 3.3.3      | 平面八结点等参元              | 54        |
| 3.3.4      | 空间八结点等参元              | 56        |
| 3.3.5      | 空间二十结点等参元             | 59        |
| 3.4        | 有限元中的数值积分方法           | 63        |
| 3.4.1      | 数值积分方法的基本思想           | 63        |
| 3.4.2      | Newton-Cotes 积分法      | 63        |
| 3.4.3      | Gauss 积分法             | 65        |
|            | 参考文献                  | 69        |
| <b>第四章</b> | <b>饱和土的静力有限元分析理论</b>  | <b>70</b> |
| 4.1        | 概述                    | 70        |
| 4.2        | 位移与孔压模式               | 70        |
| 4.3        | Biot 三维固结有限元基本方程      | 72        |
| 4.3.1      | Biot 三维固结方程的空间离散      | 72        |
| 4.3.2      | Biot 三维固结方程的时间离散      | 76        |
| 4.3.3      | Biot 三维固结有限元方程        | 77        |
| 4.4        | Biot 三维固结有限元计算公式      | 78        |
| 4.4.1      | 任意空间八结点单元固结矩阵各元素计算式   | 78        |
| 4.4.2      | 长方体八结点单元固结矩阵各元素计算式    | 83        |
| 4.4.3      | 单元等效结点荷载和流量增量列阵各元素计算式 | 84        |
| 4.5        | 三维固结问题的有限元法求解过程       | 87        |
|            | 参考文献                  | 89        |
| <b>第五章</b> | <b>饱和土的动力有限元分析理论</b>  | <b>91</b> |
| 5.1        | 概述                    | 91        |
| 5.2        | 动力方程及其求解              | 91        |
| 5.2.1      | 用张量形式表达的 Biot 动力固结方程  | 91        |
| 5.2.2      | 动力方程的求解               | 93        |
| 5.3        | 有效应力动力分析方法            | 99        |
| 5.3.1      | 有效应力动力分析及其计算步骤        | 100       |
| 5.3.2      | 饱和土体的动力控制方程及其数值解法     | 102       |
| 5.4        | 弹塑性动力分析方法             | 106       |

|            |                                |            |
|------------|--------------------------------|------------|
| 5.4.1      | 岩土弹塑性模型理论 .....                | 106        |
| 5.4.2      | 弹塑性动力反应有限元分析 .....             | 111        |
| 5.5        | 随机地震作用下的动力分析 .....             | 112        |
| 5.5.1      | 地震作用下的随机反应分析 .....             | 112        |
| 5.5.2      | 永久变形危险性评价 .....                | 116        |
| 5.5.3      | 随机地震作用下边坡的稳定性分析 .....          | 117        |
| 5.5.4      | 抗震稳定分析的随机可靠性 .....             | 118        |
|            | 参考文献 .....                     | 124        |
| <b>第六章</b> | <b>土的随机有限元理论 .....</b>         | <b>127</b> |
| 6.1        | 概述 .....                       | 127        |
| 6.2        | 岩土工程可靠性理论 .....                | 127        |
| 6.2.1      | 土性参数的随机性及统计特征 .....            | 127        |
| 6.2.2      | 可靠性分析的基本方法 .....               | 129        |
| 6.3        | 岩土工程随机有限元基本理论 .....            | 138        |
| 6.3.1      | 岩土参数的随机场特征 .....               | 138        |
| 6.3.2      | 随机场的离散方法 .....                 | 145        |
| 6.3.3      | 随机有限元基本方法及可靠度计算 .....          | 149        |
| 6.3.4      | 摄动随机有限元法 .....                 | 154        |
| 6.4        | 典型问题的随机有限元方法 .....             | 156        |
| 6.4.1      | 地下水流问题的随机有限元 .....             | 156        |
| 6.4.2      | 基坑边坡的可靠性分析 .....               | 158        |
| 6.4.3      | 顺层岩质边坡可靠性分析 .....              | 162        |
| 6.5        | 动力随机有限元方法 .....                | 167        |
| 6.5.1      | 土体地震反应分析的随机有限元法 .....          | 167        |
| 6.5.2      | 动态随机有限元法基本原理 .....             | 174        |
|            | 参考文献 .....                     | 179        |
| <b>第七章</b> | <b>非饱和土的基本理论与有限元分析方法 .....</b> | <b>181</b> |
| 7.1        | 概述 .....                       | 181        |
| 7.2        | 非饱和土的有效应力原理 .....              | 182        |
| 7.3        | 非饱和土的本构关系 .....                | 190        |
| 7.4        | 非饱和土的固结理论 .....                | 198        |
| 7.5        | 非饱和土的动力分析方法 .....              | 214        |
| 7.5.1      | 非饱和土体动力控制方程 .....              | 214        |
| 7.5.2      | 动力控制方程的有限元离散 .....             | 216        |
| 7.5.3      | 耦合有限元离散方程的数值解法 .....           | 217        |
|            | 参考文献 .....                     | 220        |

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| <b>第八章 岩土工程静力有限元分析程序 PDSS</b> | 223 |
| 8.1 概述                        | 223 |
| 8.2 平面变形、空间渗流固结问题有限元分析理论      | 224 |
| 8.3 PDSS 程序主要功能与结构            | 224 |
| 8.3.1 主要功能与特点                 | 224 |
| 8.3.2 程序框图与结构                 | 226 |
| 8.3.3 主要变量及数组列表               | 228 |
| 8.3.4 主程序与子程序简介               | 230 |
| 8.4 PDSS 程序的使用与数据格式           | 232 |
| 8.4.1 前期工作                    | 232 |
| 8.4.2 数据准备                    | 233 |
| 8.4.3 运行及结果输出                 | 235 |
| 8.5 PDSS 算例及输入输出样本            | 235 |
| 8.5.1 计算条件及网格、时段划分            | 236 |
| 8.5.2 输入数据文件样本                | 238 |
| 8.5.3 结果输出文件样本                | 238 |
| 8.5.4 结果对比分析                  | 257 |
| 8.6 PDSS 简化版源程序清单             | 259 |
| 参考文献                          | 291 |
| <b>第九章 有限元理论在岩土工程中的应用</b>     | 293 |
| 9.1 宁波机场跑道袋装砂井地基固结有限元分析       | 293 |
| 9.1.1 工程概况                    | 293 |
| 9.1.2 本构模型及计算参数               | 295 |
| 9.1.3 有限元分析模式                 | 297 |
| 9.1.4 计算结果与分析                 | 297 |
| 9.2 尾矿坝地震液化计算                 | 301 |
| 9.2.1 三维两相有效应力动力方程式的建立与离散     | 301 |
| 9.2.2 三维两相有效应力动力分析方法          | 303 |
| 9.2.3 振动孔隙水压力增长规律             | 304 |
| 9.2.4 南芬尾矿坝有效应力动力分析           | 304 |
| 9.3 动力荷载作用下饱和软粘土振陷计算实例        | 306 |
| 9.3.1 孔压和残余变形计算模式             | 306 |
| 9.3.2 算例分析                    | 307 |
| 9.4 厚覆盖层软土地层的动力反应分析           | 308 |
| 9.4.1 土层参数的选择及地震波输入           | 309 |
| 9.4.2 厚覆盖水平软土地层动力反应计算结果       | 310 |



|       |                           |     |
|-------|---------------------------|-----|
| 9.5   | 软土地层隧道抗震稳定分析 .....        | 313 |
| 9.5.1 | 计算模型及参数的确定 .....          | 313 |
| 9.5.2 | 动力计算结果及分析 .....           | 314 |
| 9.6   | 地铁车站抗震稳定性计算 .....         | 317 |
| 9.6.1 | 地铁车站地基动力稳定性计算 .....       | 317 |
| 9.6.2 | 地铁车站动力可靠性分析 .....         | 323 |
| 9.7   | 灰渣坝抗震稳定性的三维有效应力动力分析 ..... | 326 |
| 9.7.1 | 工程概况及计算参数的确定 .....        | 326 |
| 9.7.2 | 动力反应计算结果及分析 .....         | 327 |
|       | 参考文献 .....                | 329 |

# 第一章 绪 论

## 1.1 引 言

在众多的工程数值计算方法中,有限单元法(Finite Element Method,缩写为FEM)很早就以其适用性强和处理非均质、非线性、复杂边界诸多问题方便等突出优点而成为工程数值分析最有效的通用工具。经过近半个世纪的发展,有限单元法已十分成熟并在各个领域的工程分析中广泛应用。本书主要介绍岩土工程中的有限单元法及其应用。

岩土工程中最基本的两种分析方法是总应力分析(Total Stress Analysis)法和有效应力分析(Effective Stress Analysis)法。与此相应,岩土工程中的有限单元法也可分为总应力分析有限单元法和有效应力分析有限单元法。1966年,Clough等首先将总应力分析有限单元法用于土坝的应力和变形分析。1969年,Sandhu和Wilson用有限单元法分析了Biot二维固结问题,开创了岩土工程有效应力分析有限单元法的先河。在国内,沈珠江(1977)首先将有效应力分析有限单元法应用于软土地基的固结变形分析。

对于土体,总应力分析法是将其视为固体来分析的。因此岩土工程中的总应力分析有限单元法与一般固体力学中的有限单元法是相同的。有效应力分析法则严格区分土体中分别由土颗粒骨架、孔隙水和孔隙气传递或承受的应力,并考虑土骨架变形、孔隙水压力消散和孔隙气压力消散三者的耦合作用,因而比总应力分析法更接近实际,但远较之复杂。对于岩体,因其本身可视为固体,故与之相应的分析只能是总应力分析。从有效应力原理出发,可将总应力分析视为有效应力分析的一种特殊形式。因此,总应力有限元分析法也可视为有效应力分析有限单元法的一种特殊形式。

任何工程问题的计算分析都是从控制方程的建立着手的,岩土工程分析也不例外。本章将先通过对饱和土总控制方程的详细推导,说明建立岩土工程问题控制方程的过程和方法,然后介绍总应力分析法和有效应力分析法,根据这两种分析法的特点给出相应的具有不同形式的控制方程,并阐述总应力分析法和有效应力分析法的区别与联系。

鉴于在岩土工程数值分析中对有限元等数值解法及其程序进行验证的重要性和必要性,并考虑到将数值解与解析解进行比较是最简捷有效的一种验证方法,本章还在最后一节给出了典型一维固结问题的完整解析解答。

## 1.2 岩土工程问题控制方程的建立

研究表明,对于大多数岩土工程问题,无论是进行总应力分析还是进行有效应力分析,均可归结为对 Biot 动力固结方程的求解。因此,可将 Biot 动力固结方程作为岩土工程问题的总控制方程。

岩土工程中的基本方程包括土体平衡(或运动)方程、物理(或本构)方程、几何方程、有效应力原理、孔隙流体(水)平衡方程、连续方程等。总控制方程(即 Biot 动力固结方程)由这些基本方程组合而成。

总控制方程的推导基于以下假定:

- (1) 土体是完全饱和的横观各向同性弹性体。
- (2) 土体的变形是微小的。
- (3) 土颗粒和孔隙水不可压缩。
- (4) 孔隙水相对于土骨架的渗流运动服从 Darcy 定律,其惯性力可不计。
- (5) 应力应变的正负号法则与弹性力学相反。

### 1.2.1 土体平衡方程

天然饱和土体是由土颗粒(固相)和孔隙水(液相)组成的二相体。土颗粒相互接触或胶结形成土骨架,而水则存在于土骨架内(或颗粒间)的空隙中。在荷载作用下,土体中将产生应力,土骨架将发生位移或运动,而孔隙水在伴随土骨架运动的同时还作相对于土骨架的渗流运动。

现取图 1.1 所示符合右手法则的坐标系(其中水平面  $xoy$  为横观各向同性面),考虑边长分别为  $dx$ 、 $dy$ 、 $dz$  的土微元体的平衡。

记  $u$ 、 $v$ 、 $w$  分别为微元体土骨架沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  正方向的位移分量; $\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 、 $\ddot{v} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ 、 $\ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  分别为相应的运动加速度;在微元体上作用的有总应力、体力和惯性力。总应力六个分量即  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$ 、 $\tau_{xy}$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{zx}$ (图示应力分量均为正);体力方向向下,大小为  $\rho g$ ( $\rho$  为土体密度,  $g$  为重力加速度);惯性力沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三方向的分量依次为  $\rho \ddot{u} dx dy dz$ 、 $\rho \ddot{v} dx dy dz$ 、 $\rho \ddot{w} dx dy dz$ ,作用方向与位移方向相反。此外尚有孔隙水相对于土骨架的渗流运动惯性力,但据假定(4),该项作用力忽略。

由  $x$  方向力平衡方程  $\sum F_x = 0$ ,有

$$\begin{aligned} & \left[ \sigma_x - \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) \right] dy dz + \left[ \tau_{yx} - \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \right] dz dx \\ & + \left[ \tau_{zx} - \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) \right] dx dy - \rho \ddot{u} dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

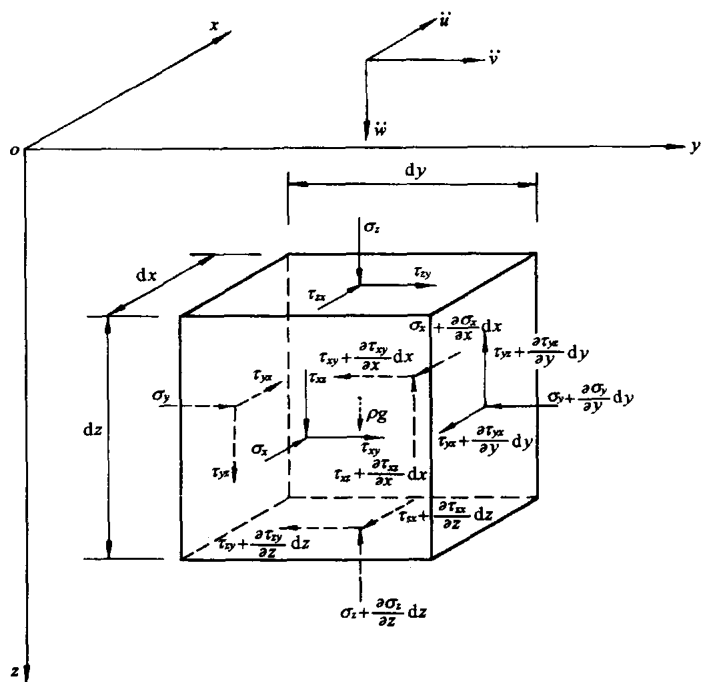


图 1.1 土体单元平衡图

整理即

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho \ddot{u} = 0 \quad (1.1a)$$

同理由  $\sum F_y = 0$  及  $\sum F_z = 0$ , 可得

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho \ddot{v} = 0 \quad (1.1b)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \rho \ddot{w} - \rho g = 0 \quad (1.1c)$$

式(1.1)即为土体的动力平衡方程,也可称为土体的运动方程。

当惯性力为零,方程(1.1)即转化为静力平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (1.2a)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (1.2b)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \rho g = 0 \quad (1.2c)$$

### 1.2.2 土体本构方程

土体的本构方程(也称物理方程)描述土骨架应力(即有效应力)与应变之间的

关系,其一般式可表示为

$$\{\sigma'\} = f(\{\epsilon\}) \quad (1.3)$$

式中:  $\{\sigma'\} = [\sigma'_x \ \sigma'_y \ \sigma'_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T$ , 为土体有效应力矢量;  $\{\epsilon\} = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T$ , 为土体应变矢量。

对于横观各向同性线弹性土体[假定(1)], 由广义 Hooke 定律可得相应的物理方程

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma'_x}{E_h} - \mu_{hh} \frac{\sigma'_y}{E_h} - \mu_{vh} \frac{\sigma'_z}{E_v} \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma'_y}{E_h} - \mu_{hh} \frac{\sigma'_x}{E_h} - \mu_{vh} \frac{\sigma'_z}{E_v} \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma'_z}{E_v} - \mu_{hv} \frac{\sigma'_x}{E_h} - \mu_{hv} \frac{\sigma'_y}{E_h} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_h} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_v} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G_h} \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

式中:  $E_h$ 、 $E_v$  为土体的水平向、竖向弹性模量;  $G_h$ 、 $G_v$  为土体的水平向、竖向剪切模量;  $\mu_{hh}$  为水平向应力引起水平向应变的 Poisson 比;  $\mu_{hv}$  为水平向应力引起竖向应变的 Poisson 比;  $\mu_{vh}$  为竖向应力引起水平向应变的 Poisson 比。

从方程(1.4)可见, 描述横观各向同性体共需七个弹性常数。但可以证明, 以下关系式成立:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{hv} &= \frac{E_h}{E_v} \mu_{vh} \\ G_h &= \frac{E_h}{2(1 + \mu_{hh})} \\ G_v &= \frac{E_h E_v}{E_h + E_v + 2E_h \mu_{vh}} \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

因此, 七个弹性常数中只有四个是独立的。通常可取  $E_h$ 、 $E_v$ 、 $\mu_{vh}$ 、 $\mu_{hh}$  为基本的弹性常数, 因为这些参数的测定相对而言较为容易, 但需在排水条件下测得。

物理方程(1.4)可写成以下矩阵式, 即

$$\{\sigma'\} = [D]\{\epsilon\} \quad (1.6)$$

式中  $[D]$  称为弹性矩阵, 即

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & & & & & \\ d_{12} & d_{11} & & & & \\ d_{13} & d_{13} & d_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} \end{bmatrix} \quad \text{对 称} \quad (1.7a)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} d_{11} &= \frac{n - \mu_{hv}^2}{(1 - \mu_{hh})^2} E_{sa} \\ d_{12} &= \frac{n\mu_{hh} + \mu_{hv}^2}{(1 - \mu_{hh})^2} E_{sa} \\ d_{13} &= \frac{\mu_{hv}}{1 - \mu_{hh}} E_{sa} \\ d_{33} &= E_{sa} \\ d_{44} &= \frac{d_{11} - d_{12}}{2} = G_h \\ d_{55} &= G_v \end{aligned} \right\} \quad (1.7b)$$

$E_{sa}$ 为横观各向同性土的(侧限)压缩模量,即

$$E_{sa} = \frac{E_v(1 - \mu_{hh})}{1 - \mu_{hh} - 2n\mu_{vh}^2} \quad (1.7c)$$

$$n = \frac{E_h}{E_v} \quad (1.7d)$$

特别对于各向同性线弹性土(简称均质土),有

$$E_h = E_v = E \quad \mu_{hv} = \mu_{hh} = \mu_{vh} = \mu \quad G_h = G_v = G \quad n = 1$$

则物理方程变为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma'_x - \mu(\sigma'_y + \sigma'_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma'_y - \mu(\sigma'_x + \sigma'_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma'_z - \mu(\sigma'_x + \sigma'_y)] \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G \\ \gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G \\ \gamma_{zx} &= \tau_{zx}/G \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

相应的矩阵式仍如式(1.6)所示,其中弹性矩阵 $[D]$ 转化为

$$[D] = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ d_2 & d_1 & \text{对} & & & \\ d_2 & d_2 & d_1 & & & \text{称} \\ 0 & 0 & 0 & d_3 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \quad (1.9a)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= E_s \\ d_2 &= \frac{\mu}{1-\mu} E_s = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \lambda \\ d_3 &= G = \frac{E}{2(1+\mu)} \end{aligned} \right\} \quad (1.9b)$$

$$E_s = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \lambda + 2G \quad (1.9c)$$

式中  $E$ 、 $\mu$ 、 $G$ 、 $E_s$ 、 $\lambda$  分别为均质土的弹性模量、Poisson 比、剪切模量、压缩模量和 Lamé 常数。基本弹性常数  $E$ 、 $\mu$  需由排水试验得到。

### 1.2.3 土体几何方程

描述应变分量  $\epsilon_x$ 、 $\epsilon_y$ 、 $\epsilon_z$ 、 $\gamma_{xy}$ 、 $\gamma_{yz}$ 、 $\gamma_{zx}$  与位移分量  $u$ 、 $v$ 、 $w$  之间关系的数学表达式称为几何方程。根据小应变假定以及应变以压缩为正的约定[见假定(2)和(5)], 可得土体的几何方程

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \epsilon_y &= -\frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= -\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \epsilon_z &= -\frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= -\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

### 1.2.4 土体有效应力原理

有效应力原理描述土体中的总应力与有效应力、孔隙水压力以及孔隙气压力之间的关系。对于饱和土体[假定(1)], 有效应力原理由 Terzaghi 首先提出, 该原理表明饱和土中任一点的总应力为该点有效应力与孔隙水压力之和。其数学表达式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma'_x + p \\ \sigma_y &= \sigma'_y + p \\ \sigma_z &= \sigma'_z + p \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

式中  $p$  为土体中的孔隙水压力, 简称为孔压。

### 1.2.5 孔隙流体平衡方程

建立土体平衡方程(1.1)或(1.2)时是将土颗粒和孔隙水合二为一来考虑的,即将土体作为整体来研究的。建立孔隙流体平衡方程则将土体按水力学中的渗流模型来研究,即认为渗流区内全部空间场被流体所充满,不存在土骨架,仅考虑土骨架对渗流运动施加的阻力。

在渗流区取如图 1.2 所示的微元体,该微元体被流体(孔隙水)所充满。流体伴随土骨架以加速度  $\ddot{u}$ 、 $\ddot{v}$ 、 $\ddot{w}$  运动,同时以流速  $v_x$ 、 $v_y$ 、 $v_z$  作相对于土骨架的渗流运动。一般情况下,渗流的流速很小,因此渗流惯性力(即  $\rho_w \ddot{u}_x$ 、 $\rho_w \ddot{u}_y$ 、 $\rho_w \ddot{u}_z$ ,作用方向与渗流方向相反)可忽略不计[假定(4)]。故需考虑的作用于微元体上的力有:孔压  $p$ ;重力引起的体力  $\rho_w g$  ( $\rho_w$  为水的密度);土骨架对孔隙水所施加的渗流阻力  $f_x$ 、 $f_y$ 、 $f_z$ ,作用方向与渗流方向相反;土骨架运动所引起的惯性力  $\rho_w \ddot{u}$ 、 $\rho_w \ddot{v}$ 、 $\rho_w \ddot{w}$ ,作用方向与加速度方向相反(未在图 1.2 中示出)。

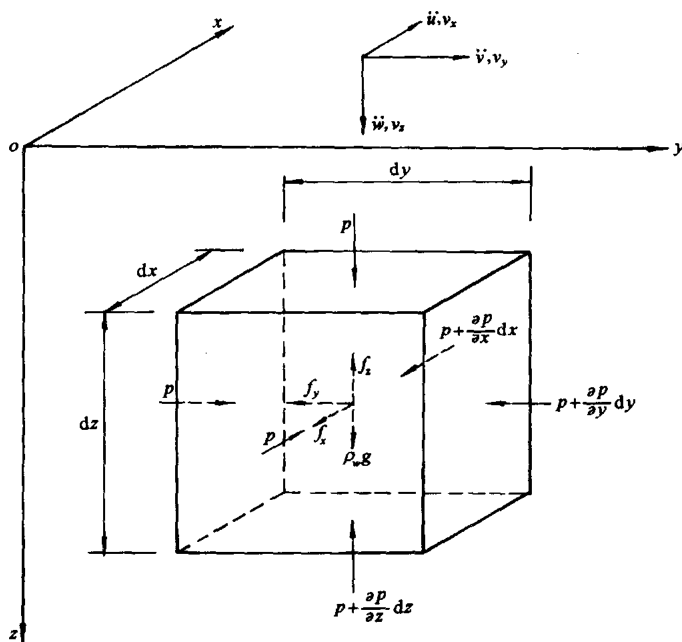


图 1.2 孔隙流体平衡图

据水力学,渗流阻力  $f = \rho_w g i$  ( $i$  为水力坡度),故有

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \rho_w g i_x = \rho_w g \frac{v_x}{k_h} \\ f_y &= \rho_w g i_y = \rho_w g \frac{v_y}{k_h} \\ f_z &= \rho_w g i_z = \rho_w g \frac{v_z}{k_v} \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$



式中  $k_h$ 、 $k_v$  分别为土体的水平向和竖向渗透系数。

先考虑  $x$  方向力的平衡, 由  $\sum F_x = 0$ , 有

$$\left[ p - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dydz - f_x dx dy dz - \rho_w \ddot{u} dx dy dz = 0$$

另由  $\sum F_y = 0$  和  $\sum F_z = 0$  可得出与此类似的两个方程。将式(1.12)代入这三个方程并化简整理, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_w g \frac{v_x}{k_h} + \rho_w \ddot{u} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} + \rho_w g \frac{v_y}{k_h} + \rho_w \ddot{v} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_w g \frac{v_z}{k_v} + \rho_w \ddot{w} - \rho_w g &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

此即忽略渗流惯性力的孔隙流体平衡方程, 或称为渗流运动方程。若进一步略去土体运动惯性力, 该方程即转化为 Darcy 定律。

### 1.2.6 渗流连续方程

渗流连续方程是由同一时间内流出土微元的水量等于该微元体积的变化量这一连续条件来建立的。

现取图 1.3 所示土微元体。记  $q_x$ 、 $q_y$ 、 $q_z$  分别为单位时间内通过与  $x$ 、 $y$ 、 $z$  垂直的平面的渗流量, 则有

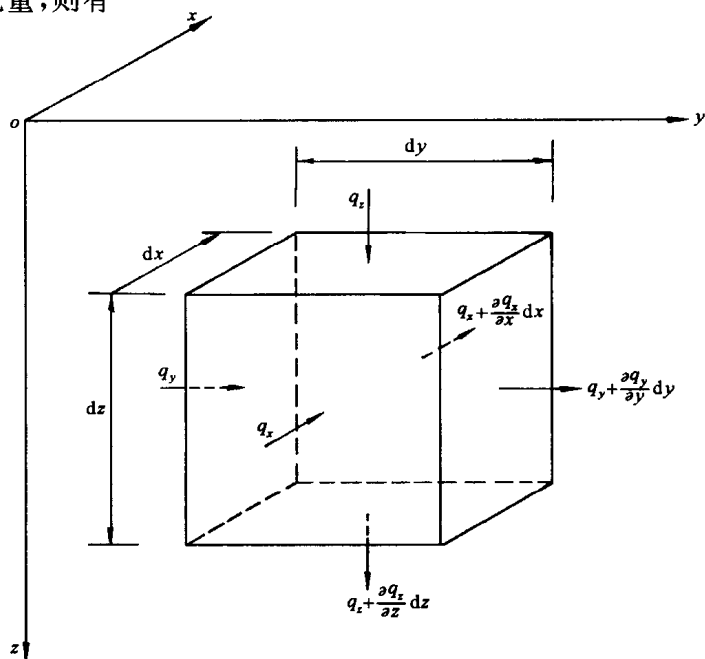


图 1.3 渗流示意图