微積分詳解

上册

R. E. 詹森 著

曉園出版社

世界图书出版公司

微积分详解(上册)

R.E. 詹森　原著

黄曙平　译著

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店經售

*

1994 年 9 月第　一　版　　开本：850×1168 1/32

1994 年 9 月第一次印刷　　印张：13.75

印数：0001－0650　　字数：32.8 万字

ISBN: 7－5062－1756－2/O.111

定价：15.80 元 (W_B 9311/11)

前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

微積分詳解

上冊目錄

○ 解析幾何原理 1

1.數 / 2.平面解析幾何 / 3.直線 / 4.拋物線 / 複習

1 函數 49

1.函數的定義 / 2.函數之類型 / 3.函數的圖形 / 4.函數的組合 / 5.反函數 / 複習

2 極限 75

1.極限的介紹 / 2.極限的定義 / 3.連續 / 4.單側極限 5.無窮極限 / 6.極限定理 / 複習

3 導數 127

1.定義 / 2.切線 / 3.可微分函數的連續性 / 4.微分公式 / 5.積與商的微分公式 / 6.鏈導法 / 7.代數函數 / 8.隱微分 / 9.高階導數 / 10.微分 / 複習

4 導數的應用 ~~176~~ 183

1.函數的極值 / 2.單調函數 / 3.函數的相對極值 / 4.凹性 / 5.極值理論的應用 / 6.速度與加速度 / 7.反導數 / 8.相對速率 / 複習

5 積分 271

1.實數系的完全性 / 2.面積 / 3.Σ符號 / 4.積分 / 5.微積分基本定理 / 6.積分公式 / 7.變數代換 / 8.數列 / 9.里曼和 / 10.附錄 / 複習

6 積分的應用 345

1.面積 / 2.體積 / 3.功 / 4.弧長 / 5.用梯形法求近似值 / 6.用辛普遜法求近似值 / 複習

7 指數函數與對數函數 391
1.直覺逼近 ／2.自然對數 ／3.自然指數函數 ／4.導數與積分 ／5.雙曲線函數 ／6.換底 ／7.指數定律在生長和衰變方面的應用／複習

第〇章　解析幾何原理

節0～1　數

I.

1～14 各題，解所予之不等式。

1. $3x+1<x+5$

解：兩邊加 $-x+(-1)$

$3x+(-x)<5+(-1)$ 故 $2x<4$，　$\therefore x<2$

解集（Solution set）爲 $(-\infty, 2)$

2. $1-2x<5x-2$

解：兩邊加 $2x+2$

$1+2<5x+2x$，故 $3<7x$，$\therefore x>\frac{3}{7}$

解集爲 $(\frac{3}{7}, \infty)$

3. $3-2x>0$

解：兩邊加 $2x$

$3>2x$，故 $x<\frac{3}{2}$，

解集爲 $(-\infty, \frac{3}{2})$

4. $\frac{3x}{4}-\frac{1}{2}<0$

解：兩邊乘4

$4(\frac{3x}{4}-\frac{1}{2})<0$，即 $3x-2<0$，故 $3x<2$，　$x<\frac{2}{3}$

解集爲 $(-\infty, \frac{2}{3})$

5. $\frac{3x-5}{2}\leq 0$

解：兩邊乘2

$3x-5\leq 0$，故 $3x\leq 5$，$\therefore x\leq\frac{5}{3}$

解集爲 $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$

6. $0.01x - 2.32 \geq 0$

解：兩邊加 2.32

$0.01x \geq 2.32$，故 $x \geq \frac{2.32}{0.01}$，$\therefore x \geq 232$

解集爲 $[232, \infty)$

7. $-0.1 < x - 5 < 0.1$

解：各加 5

$5 - 0.1 < x < 5 + 0.1$，故 $4.9 < x < 5.1$

解集爲 $(4.9, 5.1)$

8. $-0.01 < x + 3 < 0.01$

解：各加 (-3)

$-3 - 0.01 < x < -3 + 0.01$，故 $-3.01 < x < -2.99$

解集爲 $(-3.01, -2.99)$

9. $-0.03 \leq \frac{2x+3}{5} \leq 0.03$

解：各乘 5

$-0.15 \leq 2x + 3 \leq 0.15$，故 $-3.15 \leq 2x \leq -2.85$

$\therefore -1.575 \leq x \leq -1.425$

解集爲 $[-1.575, -1.425]$

10. $-0.001 \leq \frac{5-2x}{4} \leq 0.001$

解：$-0.004 \leq 5 - 2x \leq 0.004$，$-0.004 \leq 2x - 5 \leq 0.004$

故 $4.996 \leq 2x \leq 5.004$，$\therefore 2.498 \leq x \leq 2.502$

解集爲 $[2.498, 2.502]$

11. $x < x + 1$

解：$0 < 1$，解集爲 $(-\infty, \infty)$

12. $-\varepsilon < \frac{4x-3}{7} < \varepsilon$，$\varepsilon > 0$

解：$-7\varepsilon < 4x - 3 < 7\varepsilon \Rightarrow 3 - 7\varepsilon < 4x < 3 + 7\varepsilon$

$\Rightarrow \frac{3-7\varepsilon}{4} < x < \frac{3+7\varepsilon}{4}$

13. $\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{x}+1$

解： $\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x}>1+\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow\ \dfrac{2}{x}>\dfrac{5}{4}\Rightarrow\ \dfrac{x}{2}<\dfrac{4}{5}\Rightarrow x<\dfrac{8}{5}$

14. $\dfrac{3}{6x+2}\geq-\dfrac{2}{4-x}$

解： $\dfrac{3}{6x+2}\geq\dfrac{2}{x-4}$ > 0

都>0 或都<0

(1)當 $x>4$ 或 $x<-\dfrac{1}{3}$ ， $\dfrac{6x+2}{3}\leq\dfrac{x-4}{2}$

$12x+4\leq 3x-12$

$12x-3x\leq-4-12\quad 9x\leq-16$

$\Rightarrow\ x\leq\dfrac{-16}{9}$

(2)當 $\dfrac{-1}{3}<x<4$ ，則OK 。

故解集爲 $\{x\mid\dfrac{-1}{3}<x<4\}\cup\{x\mid x\leq\dfrac{-16}{9}\}$

習題15至18題決定所有使下列平方根爲實數的 x 所成的集合。

15. $\sqrt{2x-8}$

解：欲使平方根爲實數，必 $2x-8\geq 0$ ，故 $x\geq 4$

解集爲〔 4 ，∞ ）。

16. $\sqrt{3+4x}$

解： $3+4x\geq 0$ ，故 $x\geq-\dfrac{3}{4}$ ，解集爲〔 $-\dfrac{3}{4}$ ，∞ ）

17. $\sqrt{b^2-4ax}$

解：可設 a 及 b 皆爲實數，故 $b^2\geq 4ax$., 分下列三情形：

(a)若 $a>0$ ，則 $x\leq\dfrac{b^2}{4a}$ ，故解集爲（ $-\infty$ ， $\dfrac{b^2}{4a}$ 〕。

(b)若 $a=0$ ，則 $b^2\geq 4ax$ 恒成立，故解集爲所有實數。

(c)若 $a<0$ ，則 $x\geq\dfrac{b^2}{4a}$ ，故解集爲〔 $\dfrac{b^2}{4a}$ ， ∞ ）

18. $\sqrt{16-7x}$

解：$16-7x \geq 0$，故 $x \leq \frac{16}{7}$　，解集爲 $(-\infty, \frac{16}{7}]$

習題19.至22.題，決定所有使下列平方根不爲實數的x所成的集合

19. $\sqrt{3-2x}$

解：$3-2x < 0$，$x > \frac{3}{2}$　　解集 $= \{x \mid x > \frac{3}{2}\}$

20. $\sqrt{x^2+5}$

解：$x^2+5>0$　故解集 $=\phi$

21. $\sqrt{x^2-6x}$，　$x^2-6x<0$

解：$x(x-6)<0$　故 $0<x<6$

解集 $=\{x \mid 0<x<6\}$

22. $\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$

解：$\frac{x+3}{x-2}<0$　，　$(x+3)(x-2)<0$

$\Rightarrow -3<x<2$　　解集 $=\{x \mid -3<x<2\}$

習題23.～34.求出x使滿足下列不等式

23. $x+1>0$ 及 $x-3<0$

解：由假設，故 $x>-1$ 及 $x<3$，即 $-1<x<3$

解集爲 $(-1, 3)$。

24. $x-1<0$ 及 $x+2>0$

解：$x<1$ 及 $x>-2$，解集爲 $(-2, 1)$

25. $\frac{1}{x+3}<0$

解：兩邊同乘以 $(x+3)^2$，若 $\frac{1}{x+3}$ 要有意義必 $(x+3)^2>0$，

故 $x+3<0$，故 $x<-3$，即解集爲 $(-\infty, -3)$。

26. $\frac{1}{2x-5}>0$

解：由假設，$2x-5>0$，故 $x>\frac{5}{2}$，解集爲 $(\frac{5}{2}, \infty)$

27. $3x-2 \geq 0$ 及 $5x-1 \leq 0$

解：由假設，$x \geq \frac{2}{3}$ 且 $x \leq \frac{1}{5}$，但 $\frac{2}{3} > \frac{1}{5}$，故解集爲 ϕ 。

28. $2x+1>0$ 及 $x-1>0$

解：由假設，$x>-\frac{1}{2}$ 及 $x>1$，故解集爲 $(1, \infty)$

29. $4x+3<0$ 或 $6x+7>-3$

解：$x<-\frac{3}{4}$ 或 $x>\frac{-10}{6}=\frac{-5}{3}$

解集 $=\{x \mid x<-\frac{3}{4}\} \cup \{x \mid x>\frac{-5}{3}\}=(-\infty, \infty)$

30. $-3x<0$ 或 $9x>0$

解：$x>0$ 或 $x>0$

解集 $=\{x \mid x>0\}$

31. $3x-7>0$ 且 $4x+2<0$ 且 $-3x+5>0$

解：$x>\frac{7}{3}$ 且 $x<-\frac{1}{2}$ 且 $x<\frac{5}{3}$

解集 $=\phi$

32. $-3x<0$ 且 $9x>0$

解：$x>0$ 且 $x>0$ 解集 $=\{x \mid x>0\}$

33. $|x-3|=x+7$

解：$x \geq 3$ $x-3=x+7, -3=7$ 不合

$x<3$ $3-x=x+7$ $x=-\frac{4}{2}=-2$

应以分段讨论法解不等式

解集 $=\{-2\}$

34. $|x|=2x+1$

解：$x \geq 0$ $x=2x+1$ $x=-1$ 不合

$x<0$ $-x=2x+1$ $x=\frac{-1}{3}$

解集 $=\{\frac{-1}{3}\}$

若下列各題中，(a, b) 及 (c, d) 皆分別爲m及n鄰域（neighborhood），證明：

35. $(a+c, b+d)$ 爲 $m+n$ 之鄰域

證：由 (a, b) 爲m之鄰域，故 $a<m<b$；同理 $c<n<d$。將此

二不等式相加，故得 $a+c<m+n<b+d$。

故 $m+n\in(a+c, b+d)$。

但 $(a+c, b+d)$ 爲一開區間（open interval），故 $(a+c, b+d)$ 爲 $m+n$ 之鄰域（依課本定義，p.6）。

36. $(a-d, b-c)$ 爲 $m-n$ 之鄰域。

證：方法及理由如35；由假設，故 $a<m<b$ 及 $c<n<d$，

故 $-d<-n<-c$，將此式與 $a<m<b$ 相加，故

$a-d<m-n<b-c$。

故開區間 $(a-d, b-c)$ 爲 $m-n$ 之鄰域。

37. (ra, rb) 爲 rm 之鄰域，其中 $r>0$。

證：由假設，故 $a<m<b$，但 $r>0$，故 $ar<mr<br$。

故開區間 (ar, br) 爲 mn 之鄰域。

38. 若 $a, c>0$，則 (ac, bd) 爲 mn 之鄰域。

證：$0<a<m<b$，且 $0<c<n<d$

故 $ac<mn<bd$

遂知 (ac, bd) 爲 mn 之鄰域。

39. 若 $a, c>0$，則 $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{c}\right)$ 爲 $\frac{m}{n}$ 之鄰域。

證：$0<a<m<b$

且 $0<\frac{1}{d}<\frac{1}{n}<\frac{1}{c}$，故 $\frac{a}{d}<\frac{m}{n}<\frac{b}{c}$

遂知 $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{c}\right)$ 爲 $\frac{m}{n}$ 之鄰域。

習題40.～47.解下列不等式

40. $|x-1|<3$

解：$\because 3>0$ $\quad\therefore -3<x-1<3$

$-3+1<x<3+1$ $\quad -2<x<4$

解集爲 $(-2, 4)$

41. $|x+2|<5$

解：$\because 5>0$ $\quad\therefore -5<x+2<5$

$-5-2<x<5-2$ $\quad -7<x<3$

解集爲 $(-7, 3)$

42. $|2x-1|<0.1$

解：∵ $0.1>0$　∴ $-0.1<2x-1<0.1$

$-0.1+1<2x<0.1+1$　　$0.9<2x<1.1$

$0.45<x<0.55$

解集為 $(0.45, 0.55)$

43. $|3x-5|\leq 0.05$

解：$0.05>0$　∴ $-0.05\leq 3x-5\leq 0.05$

$-0.05+5\leq 3x\leq 0.05+5$　$4.95\leq 3x\leq 5.05$

$1.65\leq x\leq \frac{5.05}{3}$

解集為 $[1.65, \frac{5.05}{3}]=[1.65, 1.68\bar{3}]$

44. $|4-3x|<5$

解：∵ $5>0$　∴ $-5<4-3x<5$

$-5-4<-3x<5-4$　　$-9<-3x<1$

$9>3x>-1$　　$3>x>-\frac{1}{3}$

解集為 $(-\frac{1}{3}, 3)$

45. $|1-2x|\leq 1$

解：∵ $1>0$　∴ $-1\leq 1-2x\leq 1$

$-1-1\leq -2x\leq 1-1$　　$2\leq -2x\leq 0$

$2\geq 2x\geq 0$　　$1\geq x\geq 0$

解集為 $[0, 1]$

46. $|1+2x|\leq 1$

解：∵ $1>0$　∴ $-1\leq 1+2x\leq 1$

$-1-1\leq 2x\leq 1-1$　　$-2\leq 2x\leq 0$

$-1\leq x\leq 0$

解集為 $[-1, 0]$

47. $|x+\pi|<2$

解：∵ $2>0$　∴ $-2<x+\pi<2$

$-2-\pi<x<2-\pi$ 即 $-(2+\pi)<x<2-\pi$

解集為 $(-2-\pi, 2-\pi)$

習題48.至55.解下列不等式

48. $|x|>2$

解：$x<-2$ 或 $x>2$，即解集為 $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

49. $|3x|>6$

解：$3x<-6$ 或 $3x>6$，$\therefore x<-2$ 或 $x>2$

解集為 $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$。

50. $|x-1|>3$

解：$x-1>3$ 或 $x-1<-3$，$\therefore x>4$ 或 $x<-2$

故解集為 $(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$

51. $|x+2|\geq 5$

解：$x+2\geq 5$ 或 $x+2\leq -5$

$\therefore x\geq 3$ 或 $x\leq -7$

解集為 $(-\infty,-7]\cup[3,\infty)$

52. $|x+2|<\varepsilon \quad \varepsilon>0$

解：$-\varepsilon<x+2<\varepsilon$

$-2-\varepsilon<x<-2+\varepsilon$

解集 $=\{x\,|-2-\varepsilon<x<-2+\varepsilon\}$

53. $|3x+7|<\delta \quad \delta>0$

解：$-\delta<3x+7<\delta$

$\dfrac{-7-\delta}{3}<x<\dfrac{-7+\delta}{3}$ 解集 $=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{-7-\delta}{3}<x<\dfrac{-7+\delta}{3}\right\}$

54. $|x-a|<\delta$，$\delta>0$

解：$a-\delta<x<a+\delta$ 解集 $=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}$

55. $|y-7|<\dfrac{\delta}{3}$，$\delta>0$

解：$7-\dfrac{\delta}{3}<y<7+\dfrac{\delta}{3}$ 解集 $=\left\{y\,\middle|\,7-\dfrac{\delta}{3}<y<7+\dfrac{\delta}{3}\right\}$

II.

1. 若 $a\neq b$，證明 $\dfrac{a+b}{2}$ 恒在 a 及 b 之間。

證：由 $a\neq b$，知 $a>b$ 或 $a<b$；設 $a>b$，則 $a+a>b+a$，

故 $2a>a+b$，即 $a>\dfrac{a+b}{2}$

又由 $a>b$，知 $a+b>b+b$，即 $a+b>2b$

故 $\dfrac{a+b}{2}>b$，$\therefore a>\dfrac{a+b}{2}>b$

同理，當 $a<b$ 時，$a<\dfrac{a+b}{2}<b$。

2. 若 $a>0$，$b>0$ 及 $a\neq b$，證明 $\sqrt{ab}$ 恒在 a 及 b 之間

證：由已知 $a\neq b$ 可分設如下：

(i) 設 $a>b>0$

則 $a\cdot a>a\cdot b$　　$b\cdot a>b\cdot b$

$a^2>ab$　　$ab>b^2$

$\therefore\ b<\sqrt{ab}<a$

(ii) 設 $0<a<b$

則 $a\cdot a<a\cdot b$　　$b\cdot a<b\cdot b$

$a^2<ab$　　$ab<b^2$

$\therefore a<\sqrt{ab}<b$

故 $\sqrt{ab}$ 介於 a，b 之間

3. 若 $a\geq 0$ 及 $b\geq 0$，證明 $a^n\geq b^n$ 之充要條件為 $a\geq b$（n 表正整數）。

證：(i) $a\geq b$

則 $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$=(a-b)F(a,b)$

$\because a\geq 0\quad b\geq 0\quad \therefore F(a,b)\geq 0$

又 $a\geq b$　則 $a-b\geq 0$

$\therefore a^n-b^n\geq 0$　即　$a^n\geq b^n$

(ii) 若 $a^n\geq b^n$　n 為正整數

$a^n-b^n\geq 0$

又 $F(a,b)=a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\geq 0$

且 $a^n-b^n=(a-b)F(a,b)$

$\therefore a-b\geq 0$ 即 $a\geq b$

4. 若 $a\geq 0$ 及 $b\geq 0$，證明 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，且等號成立之充要條件為 $a=b$。

證：$a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

但 $a\geq 0$ 及 $b\geq 0$，故 $\sqrt{a}$ 及 $\sqrt{b}$ 皆為實數，即 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 為實數，故 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$，$\therefore\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

若$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$，故$a+b-2\sqrt{ab}=0$，由最先的式子知

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$，得$a=b$。

反之，若$a=b$，則$\sqrt{ab}=\sqrt{a^2}=a$，又$\frac{a+b}{2}=a$

故$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$

5. 若$a>0$及$b>0$，證明$a>b$ 若且唯若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

證：$a>b\Rightarrow a-b>0$，$ab>0$

$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}>0 \quad \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$（$\because a>0$，$b>0$）

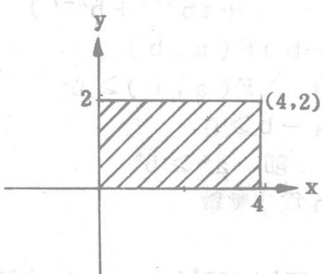
$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{a}}>\frac{1}{\frac{1}{b}} \Rightarrow \quad a>b$

節0～2 平面解析幾何（原書第15頁）

I. 畫下列各有序對所成的集合

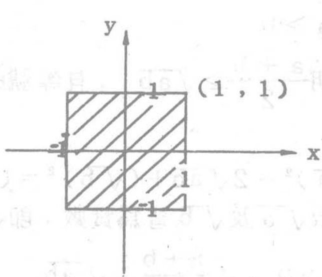
1. $\{(x,y)\mid 0<x<4,\ 0<y<2\}$

解：



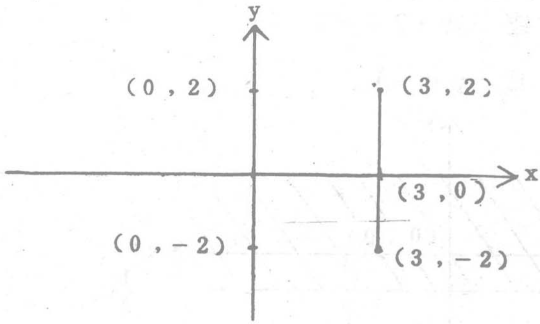
2. $\{(x,y)\mid -1\leq x\leq 1,\ -1\leq y\leq 1\}$

解：



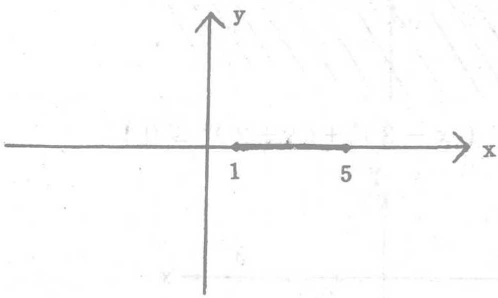
3. $\{(x,y) \mid x=3 \quad -2 \le y \le 2\}$

解：



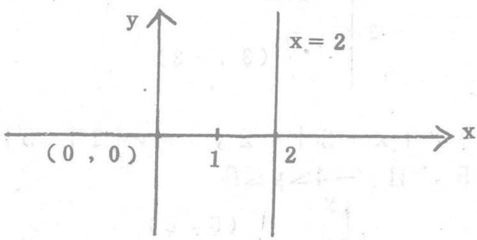
4. $\{(x,y) \mid 1 \le x \le 5，y=0\}$

解：



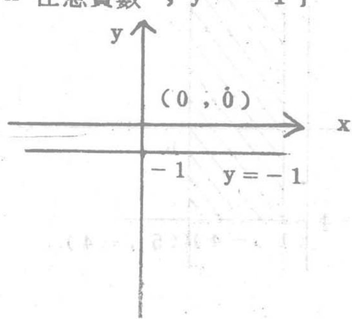
5. $\{(x,y) \mid x=2$，y 任意實數$\}$

解：



6. $\{(x,y) \mid x$ 任意實數，$y=-1\}$

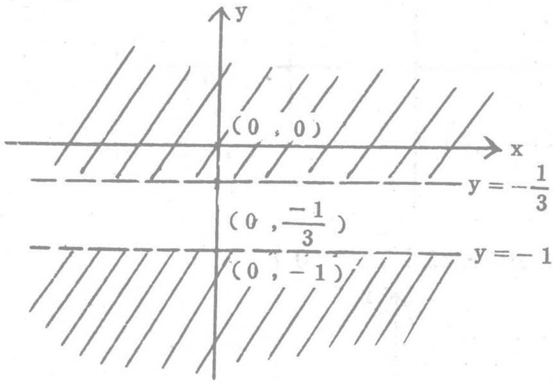
解：



7. $\{(x,y) \mid x$ 任意實數，$|3y+2|>1\}$

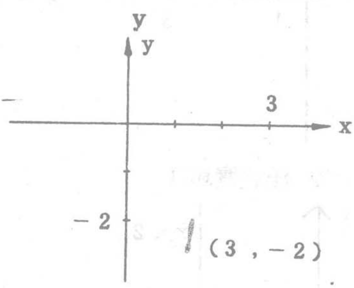
解：$3y+2>1$　或　$3y+2<-1$

$\Rightarrow y>\frac{-1}{3}$　或　$y<-1$



8. $\{(x,y) \mid (x-3)^2+(y+2)^2 \leq 0\}$

解：



9. $\{(x,y) \mid |x-3|<2,\ |-y+1| \leq 5\}$

$1<x<5$，且　$-4 \leq y \leq 6$

解：