同济大学第五版高等数学教材配套

内容主线

主要考点

解题套路

解题观摩

自己动手

复旦大学

陈洪明 主编

下册

高等数学全程辅导

中国建材工业出版社

复旦大学

高等数学全程辅导

同济五版

高等数学全程辅导

（下 册）

陈洪明 编

中国建材工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程辅导/陈洪明编 .—北京:中国建材工业出版社,2002.9

ISBN 7-80159-324-3

Ⅰ.高… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 067746 号

高等数学全程辅导

中国建材工业出版社出版
新华书店经销
北京奥隆印刷厂印刷
开本 850×1168 1/32 印张 30.75 字数 780 千字
2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月第 1 次印刷
印数 1-10000 册
ISBN 7-80159-324-3/G·061
全套定价:32.00 元 本册定价:16.00 元

前　言

绝非以往的辅导丛书，让您一目了然，释然解惑……

内容主线　以图表的形式，把本章内容以逻辑结构为主串成线，使您清晰掌握主要的内容与逻辑结构。

主要考点　把您平铺的思维立体化，并把入学考试的考点也覆盖在内。

解题套路　把典型题及在考试中经常出现的题告诉您一种思维模式，解题套路，用不同的方法达到同样的目的。

解题观摩　通过精典例题，典型例题，提供给您解题的方法、技巧。还特别选用了一些入学考试的真题来覆盖本章节所有的内容。

第一思路　对具体例题的解题方法进行技巧点精。从分析每个具体例题的常用思维入手，同时结合本题的特点和此类题型的解题套路，为学生提供清晰的解题思路。

自己动手　提供了大量练习题，并且在书末附有详细的解答过程，力图通过大量的练习题，把主线→考点→套路→观摩真正地串起来，融会贯通，巩固所学。

同济五版本章节习题解答　本书不仅对《高等数学》（第五版）所附的全部习题进行了解答，而且在解题过程中，着重从解题思路和解题技巧上进行了精练的分析和引导，同时提供详细的解答过程。

同济大学应用数学系主编的《高等数学》是一套深受读者

欢迎并获奖多次的优秀教材，被全国许多院校采用，现在已印刷发行 20 多年，再版多次。**目前第五版是在第四版的基础上全面修订而成的。**修订保留了原教材的系统和风格，及其结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学的优点，同时吸收了当前教材改革中一些成功的改革举措。

为了配合新教材，同时，为了解决许多教师在使用本教材进行教学时，经常有学生要求对其中的课文及习题进行深入讲解的问题，我们专门组织了一些长期在高等数学教学一线的教师和教授重新编写了这套最新版本高等数学辅导书。本书旨在帮助、指导广大读者掌握基本概念和掌握基本解题方法，在此基础上融会贯通。本书的篇幅和内容与相应课程的学时数相适应，例题和练习题都是精心选编的，题型基本而典型，广泛而不重复，与教材紧密衔接，是课堂教学的补充和提高，但又不超出基本要求。本书内容的编排、章节的次序、定义定理的叙述、符号术语的使用均与教材一致。

本套辅导书分为上下两册。上册内容包括**函数与极限，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用**和**空间解析几何与向量代数**七个篇章，下册包括**多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分和曲面积分，无穷级数**和**微分方程**五个篇章。每章我们采取独特的“内容主线”——“主要考点”——“解题套路”——“解题观摩”——“第一思路”——“自己动手”——“同济五版本章习题及解答”的编排模式，相信读者通过本书，定能巩固所学知识，掌握解题技巧，在考试中取得好成绩。

本书可供大专院校、电大、职大、夜大等广大学生及将参加硕士研究生入学考试的学生复习与自学使用。既适合初学者，也适合巩固复习。

本书由复旦大学陈洪明同志主编全书的总撰定稿和审订工

作，在编写的过程中，我们还得到了复旦大学数学系王军平，郭德界的帮助，编者在此深表感谢。由于编者水平，书中错误之处在所难免，恳切希望同行和广大读者批评指正。

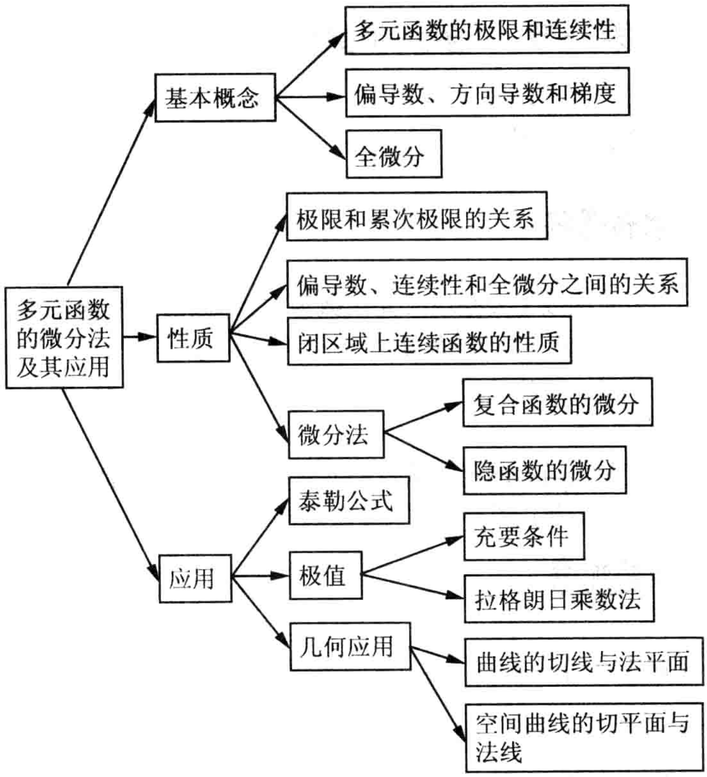
编者于北京

2002 年 9 月

目　　录

第八章　多元函数微分法及其应用

内容主线



主要考点

1. 多元函数的极限和连续性；

2. 偏导数,全微分的概念,可微的充要条件;

3. 复合函数,隐函数的求导法;

4. 方向导数和梯度的概念及其计算;

5. 空间曲线的切线和法平面,曲面的切平面和法线;

6. 多元函数的极值和条件极值以及拉格朗日乘数法;

7. 多元函数的最值及其简单应用.

第一节　多元函数的极限与连续性

一、多元函数的定义

解题套路

1. 多元函数主要是以二元函数为主,掌握由一元函数推广到二元函数的方法,进而就能从二元推广到多元.

2. 求多元函数的表达式时,要把握住谁是自变量,作变量代换解出自变量.

3. 求多元函数的定义域也一元函数求定义域类似,由解不等式或不等式组确定多元函数的定义域.

解题观摩

【例 8-1】 (1) $f(x,y)=\dfrac{4xy}{x^2+y^2}$,求 $f(tx,ty)$;

(2) $f(x+y,e^y)=x^2y$,求 $f(x,y)$.

第一思路 要弄清楚谁是自变量,第一题只须将 tx,ty 分别代换 x 与 y,第二题是逆向思维的过程,可令 $x+y=u,e^y=v$,求出 f 关于 u,v 的表达式可得.

【解答】

(1)$f(tx,ty)\ \dfrac{4(tx)\cdot(ty)}{(tx)^2+(ty)^2}$

$$=\frac{4xy}{x^2+y^2}=f(x,y)$$

(2) 令 $x+y=u,e^y=v$,那么解出 x,y 得:

$$\begin{cases} y=\ln v \\ x=u-\ln v. \end{cases}$$

$$f(u,v)=x^2(u,v)\cdot y(u,v)=(u-\ln v)^2\cdot\ln v$$

$$f(x,y)=(x-\ln y)^2\cdot\ln y.$$

【例 8－2】　求下列函数的定义域:

(1)$z=\ln(y^2-2x+1)$;　　(2)$z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;

(3)$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;

(4)$z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

(5)$u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$;

(6)$u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

第一思路　根据简单函数的定义域,通过解不等式或不等式组求得.注意:一元函数的定义域是实数轴上的区间,二元函数的定义域是平面上点的集合,三元函数是立体空间上点的集合,三元以上的则更复杂,我们只要把握住其定义域需要满足的条件就行了.

【解答】

(1) 由 $y^2-2x+1>0$ 得 $y^2>2x-1$,定义域为

$$D=\{(x,y)\mid y^2>2x-1\}.$$

(2) $D=\{(x,y)\mid x+y>0,x-y>0\}$

(3) 由 $\begin{cases}y\geqslant 0\\ x-\sqrt{y}\geqslant 0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y\geqslant 0,x\geqslant 0\\ x^2\geqslant y\end{cases}$，定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,x^2\geqslant y\geqslant 0\}.$$

(4) 由 $\begin{cases}y-x>0,\\ x\geqslant 0,\\ 1-x^2-y^2>0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y>x\geqslant 0\\ x^2+y^2<1\end{cases}$

$$D=\{(x,y)\mid y>x\geqslant 0,x^2+y^2<1\}.$$

(5) 由 $\begin{cases}R^2-x^2-y^2-z^2\geqslant 0\\ x^2+y^2+z^2-r^2>0\end{cases}$

得 $r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$

定义域 $V=\{(x,y,z)\mid r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}.$

(6) 由 $\begin{cases}x^2+y^2\neq 0\\ \left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}(x,y)\neq(0,0),\\ z^2\leqslant x^2+y^2\end{cases}$

所以 $V=\{(x,y,z)\mid z^2\leqslant x^2+y^2,(x,y)\neq(0,0)\}.$

自己动手

【题8-1】 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式：

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

【题8-2】 求函数 $u=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-2x}}{\sqrt{3x-x^2-y^2}}$ 的定义域.

二、多元函数的极限

解题套路

1. 利用定义判断重极限的存在（此法的缺点是必须先知道重

极限的值).弄清多元函数的极限与一元函数的极限有很大的不同:一元函数取在某点极限的过程是在此点左右两侧方向分别沿直线趋于此点,函数有相同极限.而多元函数取在某点极限的过程可以从各个方向沿各种曲线(不只是直线)趋于此点,函数有同一极限.

2. 利用夹逼准则判断重极限的存在.

3. 利用反例判断重极限的不存在.找出两条不同的路径,使得沿这两条路径趋于定点的极限不相等,还可以找出一条特殊的路径,使得沿这条路径的极限不存在.

4. 利用累次极限和重极限的关系判断重极限不存在.因为若重极限存在,则两个累次极限必存在且相等.所以若两个累次极限有一个不存在或都存在但不相等,则重极限不存在.注意:即使两个累次极限存在并且相等,也不能说重极限就一定存在.两个累次极限存在且相等只是重极限存在的必要条件.并且即使两个累次极限都不存在,重极限也有可能存在.

5. 求多元函数极限的常用方法有:极限的四则运算法则与连续性,由变量代换化为一元函数求极限,利用初等变形,两边夹法则与无穷小性质等.

6. 当确定重极限存在时,求极限时可选择一条特殊的路径,求出沿这条路径的极限值就是重极限.

解题观摩

【例8-3】 证明:$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

第一思路 因为已经知道其重极限的值是0,所以可用重极限的定义($\varepsilon-\delta$)来证明.还可以利用夹逼准则.

【解答】 解法一:

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|=\frac{\sqrt{x^2\cdot y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\triangleq\frac{1}{2}\rho(\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=|OP|,P(x,y)),$$

于是，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=2\varepsilon>0$；当$0<\rho<\delta$时，有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon,\therefore\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

解法二：

因为 $0\leqslant\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{xy}{\sqrt{2xy}}\leqslant\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2}}\to0(x\to0,y\to0)$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

【例 8－4】 求证：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy^2}{x^3+y^3}$的极限不存在.

第一思路 选择不同的直线 $y=kx$，函数的极限不一样，所以其极限不存在.

【解答】 取 $y=kx$，有

$$\lim_{x\to0}\frac{xy}{\sqrt{x^3+y^3}}=\lim_{x\to0}\frac{k^2x^3}{x^3+k^3x^3}=\frac{k^2}{1+k^3},$$

可知其极限随取的直线不同（取 k 不同）而不同，

故$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^3+y^3}}$不存在.

【例 8－5】 说明$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x-y}{x+y}$不存在.

第一思路 利用其两个累次极限存在但不相等得证.

【解】

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}-\frac{x}{x}=1;$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{y}=-1,$$

显然 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)\neq\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$.

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y}{x+y}$ 不存在.

【例8-6】 证明二元函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}$ 两个累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 存在且相等，但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

第一思路 这是一个反例，说明了累次极限存在且相等是重极限存在的必要条件.

【证明】

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}=0;$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}=0.$$

故累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$,

若换成 (x,y) 按直线 $y=kx$ 趋于 0，即

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^4}{k^2x^4+(1+k)^2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{k^2x^2+(1+k)^2}$$

显然若 $k=0$，则极限为 0，若 $k=-1$，则极限为 1.