高等学校经典教材辅导丛书

数学分析

习题解析

华东师大第三版

上册

主编　任亲谋

- 知识归纳
- 习题全解
- 经典考题
- 考点精解

陕西师范大学出版社

数学分析习题解析(上)

主　编　任亲谋
主　审　朱永庚
编　者　阎恩让　何广平　姚建武
谢淑翠　胡洪萍　田菊容
于　萍　冉　凯　杨花娥

陕西师范大学出版社

图书代号:JC3N1123

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题解析/任亲谋编著. - 西安:陕西师范大学出版社,2004.9
ISBN 7 - 5613 - 0994 - 5
Ⅰ.数… Ⅱ.任… Ⅲ.数学分析 - 高等学校 - 解题 Ⅳ.O17 - 44
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 089744 号

策划编辑	雷永利
责任编辑	陈焕斌
封面设计	徐 明
责任校对	万晓红 陈常宝
出版发行	陕西师范大学出版社
社 址	西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)
网 址	http://www.snuph.com
经 销	新华书店
印 制	潼关县印刷厂
开 本	850×1168 1/32
印 张	27.25
字 数	622 千
版 次	2004 年 9 月第 1 版
印 次	2004 年10月第 2 次
印 数	5001— 10 000
定 价	35.00 元(上、下册)

开户行:光大银行西安南郊支行 账号:0303070 - 00330004695
读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。
电 话:(029)85307864 85233753 85251046(传真)
E - mail: if - centre@snuph.com

前　言

关于习题,我国一代数学宗师华罗庚先生在其所著《高等数学引论》的序言中有如下精辟的论述:"习题的目的首先是熟练和巩固学习了的东西;其二是启发大家灵活运用,独立思考;其三是融会贯通,出些综合性的习题,把不同部门的数学沟通起来."

美国数学家 P. R. Halmos 说,"数学家存在的主要理由就是解问题. 因此,数学的真正组成部分是问题和解."匈牙利数学家 G. Bolya 指出:"掌握数学就意味着善于解题."20 世纪 70 年代美国数学指导委员会曾提出:"学习数学的主要目的在于解题."

事实上,有些习题还往往是有关理论知识的必不可少的补充,作为构成该书的一个有机组成部分,是作者着意进行的一种特殊安排. 不做或不做好这样的习题会对理解掌握有关理论知识形成某种缺陷.

由以上所述,可见习题在数学教学中的地位和作用是举足轻重,不可等闲视之的.

数学分析是数学专业的一门最重要的基础课.习题是数学教学中的一个重要组成部分,在数学分析中尤其是这样.因为通过数学分析中习题训练而获得的数学思想、方法、技巧和素质,使后继和邻近课程的学习变得容易而大受其益,这已是无可争议的公认事实.

然而,令人遗憾的是忽视习题教学的观点和做法在当前现实中并不鲜见.例如对习题的要求不甚明确,挤占必要的习题课教学时间,对学生在习题中存在的重要、典型、普遍性的问题着力解决不够……不同程度地存在着学生"讲课内容听懂了,就是不会做习题"的现象.要很好解决这个问题需要做多方面的工作,而设法直接帮助学生学会解答教科书中的习题,也许是切实可行的有效途径之一.但单靠任课教师来解决这一问题,至少在目前情况下是困难的.

陕西师大出版社的编辑们根据市场调研,倡导并策划了《数学分析习题解析》这个选题,希望借助于"不说话的老师"来解决上述问题.该选题很快得到了一些高校长期从事数学分析教学的老师们的热情支持和积极参与,陕西师大数学与信息科学学院任亲谋副教授欣然应聘为本书的主编,从而使本书得以如期付梓面世.

编写本书的主旨,当然不是"越俎代庖",更不会限制学生独立思考.书中在解答习题的同时,力求做到如华罗庚先生所指出的那样,告诉学生"人家是怎样想出来的"?做到"这一步看下步并不难,连看几步就达到目的"的要求.所以希望读者对一道习题经过自己一番独立思考而不得其解,进而参考本书时,不仅了解其怎样解,而且要深究为何这样解,切不可就题解题了事.

本书的主体内容是华东师范大学编写的《数学分析》(上、下册)教材(第三版)的全部习题的详细解答.其中,约有1/3的习题不仅给出了解答,而且给出"解前分析"和"解后回顾",前者剖析题意,分析思路,示明解法是如何想出来的,应从何处着手,以培养学

生的正确思维方式.后者则是总结方法、技巧、规律、关键,指出易犯错误,分析可能的其他解法,进一步引申拓展等,达到解一题而会解一类题,提高解题能力,探索解题规律,积累解题经验.

本书选编的硕士研究生入学试题,尽管由于各校各专业、各导师的情况迥异,从中虽未必能看出硕士研究生入学试题的命题走向,但仍不失其考研复习、训练的参考价值.

本书中的单元测试题则多为各校平时教学中实际使用过,故有重要的复习、检测功能,建议阅读者不要轻易放过.

对于本书中的不足和错误,恳请读者予以指正,使其日臻完善.

朱永庚

2003.8.28

目　录(上　册)

第一单元　一元函数微分学

第二单元 一元积分学

第一单元　一元函数微分学

第一章　实数集与函数

§1　实　数

1. 设 a 为有理数，x 为无理数. 证明：

(1) $a+x$ 是无理数；(2) 当 $a\neq 0$ 时，ax 是无理数.

解前提示　根据有理数集对加、减、乘、除(除数不为 0)四则运算的封闭性，用反证法证.

证　(1) 假设 $a+x$ 是有理数，则 $(a+x)-a=x$ 是有理数，这与题设 x 是无理数相矛盾. 故 $a+x$ 是无理数.

(2) 假设 ax 是有理数，则当 $a\neq 0$ 时，$\frac{ax}{a}=x$ 是有理数，这与题设 x 为无理数相矛盾. 故 ax 是无理数.

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解：

(1) $x(x^2-1)>0$；　(2) $|x-1|<|x-3|$；

(3) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{3x-2}$.

解　(1) 由原不等式有

$$\begin{cases}x>0,\\x^2-1>0\end{cases}\quad 或 \quad\begin{cases}x<0,\\x^2-1<0.\end{cases}$$

而前一个不等式组的解集是 $A=\{x\mid x>1\}$，后一个不等式组的解集是 $B=\{x\mid -1<x<0\}$，故(1)的解集是 $A\cup B$. 如图 1－1.

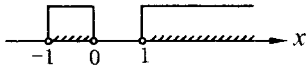

图 1－1

(2) 由原不等式有 $\left|\frac{x-1}{x-3}\right|<1$，于是 $\left|1+\frac{2}{x-3}\right|<1$. 所以 $-1<1+\frac{2}{x-3}<1$，即 $0<\frac{1}{3-x}<1$，则 $3-x>1, x<2$. 故(2)的解集为 $(-\infty,2)$. 如图 1－2.

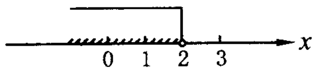

图 1－2

(3) 由原不等式应有 $\sqrt{3x-2}\geqslant 0, \sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant 0$，从而对原不等式两端平方有

$$x-1+2x-1-2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\geqslant 3x-2.$$

因此有 $2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\leqslant 0$，所以 $\sqrt{(x-1)(2x-1)}=0$，由此得 $x=1$，或 $x=\frac{1}{2}$. 但检验知 $x=1$ 和 $x=\frac{1}{2}$ 均不符合原不等式. 所以原不等式的解集为 $\varnothing$.

解后回顾　在(2)中是将绝对值不等式转化为不含绝对值的不等式去解. 若直接利用绝对值的几何意义，其解集就是数轴上到点 1 的距离小于到点 3 的距离的点集，即数轴上点 2 左侧的点集.

若直接考虑(3)的解 x 应使不等式中三个二次根式有意义，则必有 $x\geqslant 1$，但这时不等式左端为负而右端为正，显然不成立，故其解集为 $\varnothing$.

3. 设 a、$b\in\mathbf{R}$，证明：若对任何正数 ε 有 $|a-b|<\varepsilon$，则 $a=b$.

解前提示　用反证法，注意到题设中 ε 的任意性，只要设法找

到某一正数 ε 使条件不成立即可.

证　假设 $a\neq b$,则根据实数集的有序性,必有 $a>b$ 或 $a<b$.不妨设 $a>b$,令 $\varepsilon=a-b>0$,则 $|a-b|=a-b=\varepsilon$,但这与 $|a-b|=a-b<\varepsilon$ 矛盾,从而必有 $a=b$.

4. 设 $x\neq0$,证明 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant2$,并说明其中等号何时成立.

解前提示　由 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\geqslant0$, $a^2+b^2\geqslant2ab$.这个不等式以后多次要被用到.

证　因 $x\neq0$,则 x 与 $\frac{1}{x}$ 同号,从而有

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant2\sqrt{|x|\cdot\frac{1}{|x|}}=2.$$

等号当且仅当 $|x|=\frac{1}{|x|}$,即 $x=\pm1$ 时成立.

5. 证明:对任何 $x\in\mathbf{R}$ 有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant1$;

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant2$.

证　直接由绝对值不等式的性质,对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant|(x-1)-(x-2)|=|1|=1$;

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant|x-1|+|x-3|\geqslant|(x-1)-(x-3)|=2$.

6. 设 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$($\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数的集合).证明

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|.$$

你能说明此不等式的几何意义吗?

解前提示　用分析法证明.

证　欲证 $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$,

只需证　$(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2})^2\leqslant(b-c)^2$.

即证　$2a^2-2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\leqslant-2bc$,

只需证　$a^2+bc\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$,

只需证　$(a^2+bc)^2\leqslant(a^2+b^2)(a^2+c^2)$,

即证　$2a^2bc\leqslant a^2(b^2+c^2)$.

由于 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$,所以 $2bc\leqslant b^2+c^2$, $a^2>0$,所以有 $2a^2bc\leqslant a^2(b^2+c^2)$成立.

所以原不等式成立.

其几何意义为:当 $b\neq c$ 时,平面上以点 $A(a,b)$、$B(a,c)$、$O(0,0)$为顶点的三角形中,$||AO|-|BO||<|AB|$;当 $b=c$ 时,此三角形变成以点 $O(0,0)$,$A(a,b)$为端点的线段.如图 1-3.

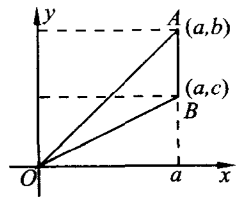

图 1-3

解后回顾　利用分析法找到证题思路,再用综合法证明,书写过程更为简捷.

7. 设 $x>0,b>0,a\neq b$,证明$\frac{a+x}{b+x}$介于 1 与$\frac{a}{b}$之间.

解前提示　本题实质上是要比较两数的大小,且该数符号不定,可用作差法.

证　因 $x>0,b>0,a\neq b$,则由 $1-\frac{a+x}{b+x}=\frac{b-a}{b+x}$, $\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{x(a-b)}{b(b+x)}$得:当 $a>b$ 时,$1<\frac{a+x}{b+x}<\frac{a}{b}$;当 $a<b$ 时,$\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}<1$.故总有$\frac{a+x}{b+x}$介于 1 与$\frac{a}{b}$之间.

解后回顾　通常要证某数 a 介于另两数 b 与 c 之间,可转化为证$(c-a)(b-a)<0$,这种方法在 b 与 c 大小关系不完全确定时,也不必分情况讨论,较为简捷.例如本题中:

因为 $x>0,b>0,a\neq b$,则有

$$\left(1-\frac{a+x}{b+x}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}\right)=\frac{-x(b-a)^2}{b(b+x)^2}<0,$$

所以$\dfrac{a+x}{b+x}$必介于1与$\dfrac{a}{b}$之间.

8. 设p为正整数. 证明：若p不是完全平方数，则$\sqrt{p}$是无理数.

证　用反证法. 假设$\sqrt{p}$为有理数，则存在正整数m、n使$\sqrt{p}=\dfrac{m}{n}$，且m与n互质. 于是$m^2=pn^2$，$m^2=n\cdot(pn)$，可见n能整除m^2. 由于m与n互质，从而他们的最大公约数为1，由辗转相除法知：存在整数u、v使$mu+nv=1$，则$m^2u+mnv=m$. 因n既能整除m^2u又能整除mnv，故能整除其和，于是n能整除m，这样$n=1$，所以$p=m^2$. 这与p不是完全平方数相矛盾.

9. 设a、b为给定实数. 试用不等式符号（不用绝对值符号）表示下列不等式的解：

(1) $|x-a|<|x-b|$；　(2) $|x-a|<x-b$；

(3) $|x^2-a|<b$.

解　(1) 原不等式等价于$\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|=\left|\dfrac{b-a}{x-b}+1\right|<1$.

因此有$-1<\dfrac{b-a}{x-b}+1<1$，即$0<\dfrac{a-b}{x-b}<2$，由此可得下列不等式组：

$$\begin{cases} x>b, \\ 0<a-b<2x-2b, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x<b, \\ 2x-2b<a-b<0. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x>b, \\ x>\dfrac{a+b}{2}, \\ a>b, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x<b, \\ x<\dfrac{a+b}{2}, \\ a<b. \end{cases}$$

故当$a>b$时，不等式的解为$x>\dfrac{a+b}{2}$；当$a<b$时，不等式解为$x<\dfrac{a+b}{2}$，当$a=b$时，不等式的解集为$\varnothing$.

(2) 原不等式等价于

$$\begin{cases} x>b, \\ b-x<x-a<x-b, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x>b, \\ a>b, \\ x>\dfrac{a+b}{2}. \end{cases}$$

故当 $a>b$ 时,不等式的解为 $x>\dfrac{a+b}{2}$;当 $a\leqslant b$ 时,不等式的解集为$\varnothing$.

(3) 当 $b\leqslant 0$ 时,原不等式的解集为$\varnothing$.

当 $b>0$ 时,原不等式等价于:$a-b<x^2<a+b$.

因此有

① 当 $a+b\leqslant 0$ 时,不等式的解集为空集;

② 当 $a+b>0$ 时,

(ⅰ) 如果 $a\geqslant b$,则解为$\sqrt{a-b}<|x|<\sqrt{a+b}$

即$\sqrt{a-b}<x<\sqrt{a+b}$或$-\sqrt{a+b}<x<-\sqrt{a-b}$;

(ⅱ) 如果 $a<b$,则解为$|x|<\sqrt{a+b}$,

即 $-\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b}$.

解后回顾 解含有绝对值的不等式的总体思路是:将含有绝对值的不等式转化为不含绝对值的不等式或不等式组去解,其转化的依据有不等式的同解原理、绝对值不等式性质、绝对值的定义等,对含有参数的绝对值不等式还往往要依据参数的不同取值范围分类讨论.

§2 数集·确界原理

1. 用区间表示下列不等式的解:

(1) $|1-x|-x\geqslant 0$; (2) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 6$;

(3) $(x-a)(x-b)(x-c)>0$(a、b、c 为常数,且 $a<b<c$);

(4) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

解　(1) 原不等式等价于下列不等式组:

$$\begin{cases} x<1, \\ (1-x)-x\geqslant 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x\geqslant 1, \\ (x-1)-x\geqslant 0. \end{cases}$$

前一个不等式组的解为 $x\leqslant\frac{1}{2}$;后一个不等式组的解集为空集,所以原不等式的解集为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

(2) 绝对值不等式$\left|x+\frac{1}{x}\right|\leqslant 6$ 等价于 $-6\leqslant x+\frac{1}{x}\leqslant 6$. 这又等价于不等式组:

$$\begin{cases} x>0, \\ -6x\leqslant x^2+1\leqslant 6x, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x<0, \\ 6x\leqslant x^2+1\leqslant -6x. \end{cases}$$

而前一个不等式组的解集为$[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$,后者的解集为$[-3-2\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}]$. 因此原不等式的解集为

$$[-3-2\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}]\cup[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}].$$

(3) 作函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$, $x\in\mathbf{R}$. 则由 $a<b<c$ 知

$$f(x)\begin{cases} <0, \text{当 } x\in(-\infty,a)\cup(b,c); \\ =0, \text{当 } x=a、b、c; \\ >0, \text{当 } x\in(a,b)\cup(c,+\infty). \end{cases}$$

因此 $f(x)>0$,当且仅当 $x\in(a,b)\cup(c,+\infty)$.
故原不等式的解集为

$$(a,b)\cup(c,+\infty).$$

(4) 若 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$,则当且仅当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$时,$\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$. 再由正弦函数的周期性知:$\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$的解集是

$$\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3}{4}\pi\right],\text{其中 } k \text{ 为整数}.$$